Vorwort

Ein Buch über Elementargeometrie im 21. Jahrhundert? Wer soll das lesen?

Diese Frage ist schwieriger zu beantworten als die meisten, deren Schulzeit schon länger zurückliegt, sich vielleicht vorstellen können. Inzwischen ist die Geometrie im Mathematikunterricht nämlich mehr oder weniger komplett abgeschafft; Punkte, Geraden und Ebenen sind die einzigen geometrischen Objekte, die im baden-württembergischen Abitur noch eine Rolle spielen, und in anderen Bundesländern – von einigen im Osten abgesehen, wo es immerhin noch Kreise und Kugeln gibt – dürfte es im Wesentlichen genauso aussehen.

Wozu also ein Buch über die Geometrie, die man auf der Schule gelernt hat, bevor Dieudonné und Konsorten Euklid ermordet[1] und die Dreiecke abgeschafft haben? Die einfache Antwort ist die, dass man mit Euklid und den Dreiecken auch die Schönheit in der Mathematik geopfert hat: Es ist etwas anderes, Euklids Beweis für den Satz des Pythagoras nachvollziehen zu können, als sich Bilder von Fraktalen anzuschauen oder sich mit Fahrplannetzen zu befassen. Wer gelernt hat, wie Thales mit dem Strahlensatz die Höhe der Pyramiden oder die Entfernung von Schiffen auf dem Meer bestimmt hat, wie man mit einfachsten Beobachtungen und etwas Geometrie erstaunliche Erkenntnisse über unser Sonnensystem gewinnen kann, der wird Aufgaben des Typs „Die Marketingabteilung einer Firma geht davon aus, dass die Verkaufszahlen einer CD beschrieben werden durch die Funktion f mit ...“ oder, um bei der Geometrie zu bleiben, „Ein Raubvogel gleitet geradlinig gleichförmig in der Morgensonne über den Frühnebel“ als die Inkarnation dessen erkennen, was der copy editor „Beispiele für die veränderten Anforderungen unseres heutigen Bildungssystems“ nennt. Diese moderne didaktische Strömung der „realitätsnahen Mathematik“ kommt aus den Niederlanden, wo man aber, wie Rainer Kaenders in [6] zeigt, schon gegengesteuert hat, als man in Deutschland erst Kurs auf den Abgrund genommen hat. Laurent Lafforgue, einer der ganz großen Mathematiker unserer Tage und Träger der Fields-Medaille, dem „Nobelpreis“ in der Mathematik, benutzt eine Wortwahl, die der ursprünglich von mir gewählten etwas näher kommt, und der in seinem zusammen mit Liliane Lurçat herausgegebenen Buch „La débacle de l'école. Une tragédie incomprise“ [7] und auf seiner Homepage Rolle der nationalen Bildungsexperten [Frankreichs]

[1] Wer den K(r)ampf um die Einführung der Mengenlehre in Kindergarten und Grundschule noch miterlebt hat, wird diese Anspielung auf Dieudonnés „Nieder mit Euklid – Tod den Dreiecken“ verstehen.

in der modernen Schulbildung mit den Roten Khmer in Sachen Menschenrechte vergleicht.

Die Abschaffung von Euklid war nicht das einzige Resultat der Reformen: Das Minimieren des Übens auf der Grundschule hat zu katastrophalen Ergebnissen für Kinder aus bildungsfernen Schichten geführt, die Erhöhung der Übergangsquote zum Gymnasium zu einer Senkung des Niveaus und einem Ausbremsen der begabten Schüler. Um so mehr haben Mathematiklehrer in Baden-Württemberg die Einrichtung eines „Vertiefungskurses Mathematik“ begrüßt, der die Schäden, welche die Abschaffung der Elementargeometrie, der Algebra und der Leistungskurse, sowie die Einführung von graphikfähigen Taschenrechnern und G8 in Baden-Württemberg angerichtet haben, wenn nicht zumindest teilweise beheben, dann doch etwas abmildern soll. Vorgesehen ist, dass der Vertiefungskurs die Rechenfertigkeiten ausbaut (will heißen: den Umgang mit Brüchen und Potenzen wieder lehrt) und grundlegende Beweisverfahren der Mathematik vorstellt. In dieser Hinsicht ist der Vertiefungskurs ein Feigenblatt, mit dem man kaschieren möchte, dass die Schavansche Reform des Mathematikunterrichts an baden-württembergischen Gymnasien von 2004, die mit der Einführung von G8 einherging, vollkommen misslungen ist und dass ein Abitur nur noch auf dem Papier die allgemeine Hochschulreife bestätigt.

Der Inhalt dieses Buches orientiert sich aber nur grob an den Vorgaben des Vertiefungskurses. Die hier vorgestellte Mathematik ist ein Teil des Stoffs, der früher an Gymnasien unterrichtet wurde und der auch heute zum großen Teil unverzichtbar ist, wenn man bei Landes- und Bundeswettbewerben oder Mathematik-Olympiaden wenigstens einige wenige Erfolgserlebnisse haben möchte. Es geht um klassische Sätze der Geometrie und um eine Einführung in die Welt des Beweisens. Es geht nicht um „vergessene Schätze der Schulmathematik“, sondern um entsorgte Mathematik: die eigentlichen Schätze fangen erst da an, wo ich aufzuhören gedenke, nämlich bei den Kegelschnitten. Diese gehörten früher zu den Höhepunkten der gymnasialen Schulmathematik (in [102] ist ein Kapitel den Kegelschnitten gewidmet), und zwar zu recht: Kegelschnitte sind eines der wenigen elementaren Themen, an denen die ganze Vielfalt der Mathematik deutlich wird oder deutlich gemacht werden kann:

- Geometrie: Kegelschnitte sind ihrer Definition nach geometrische Objekte, und viele ihrer wichtigsten Eigenschaften kann man rein geometrisch einsehen und beweisen. Insbesondere lassen sich Tangenten an Kegelschnitte konstruieren, und zwar ganz ohne Analysis.

- Algebra: Kegelschnitte lassen sich durch quadratische Gleichungen beschreiben, sind also vom algebraischen Standpunkt aus gesehen die einfachsten Objekte nach Geraden und Ebenen.

- Analysis: Die ersten nichttrivialen Flächenbestimmungen im Altertum waren die des Kreises und von Segmenten einer Parabel. Archimedes hat sich mit diesen Leistungen unsterblich gemacht und damit den Grundstein zur Integralrechnung gelegt. Die andere Säule der Infinitesimalrechnung, die Differentialrechnung, geht auf die Konstruktion von Tangenten an Kreise, Ellipsen,

Parabeln und Hyperbeln zurück, welche ebenfalls die Griechen entdeckt haben.

Auch die beiden wichtigsten Zahlen der Analysis sind mit Kegelschnitten verbunden: Es ist nämlich

$$\pi = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \quad \text{und} \quad 1 = \int_1^e \frac{1}{x}\, dx,$$

wobei $y = \sqrt{1-x^2}$ die obere Hälfte des Einheitskreises und $y = \frac{1}{x}$ eine Hyperbel ist.

- Arithmetik: In der Zahlentheorie sind Gruppen auf Kegelschnitten die einfachsten „algebraischen Gruppen“. Die nächste Stufe besteht aus den „elliptischen Kurven“, die man im Zusammenhang mit dem Umfang von Ellipsen entdeckt hat, und deren Untersuchung in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts eine zentrale Rolle gespielt hat, die 1995 im Beweis der Fermatschen Vermutung gipfelte. Was die Wenigsten wissen: Elliptische Kurven werden heutzutage in smartphones bei der Verschlüsselung verwendet.

- Astronomie und Physik: Die Bahnen von Planeten und Kometen sind, wie man seit Kepler weiß, in erster Näherung Kegelschnitte (näherungsweise zum einen, weil andere Planeten die Bahnbewegung „stören“, zum andern, wie Einstein gezeigt hat, weil die Raumzeit gekrümmt ist). Der Physiker und Nobelpreisträger von 1965, Richard Feynman (1918–1988), hat es sich nicht nehmen lassen, eine Vorlesung [3] über Newtons Ableitung der Planetenbahnen mithilfe der klassischen Geometrie zu halten. Diese Achtung vor den Leistungen der klassischen Mathematik, die der Physiker Feynman hier zelebriert, sucht man bei den Entscheidungsträgern der heutigen Bildungspolitik vergeblich, sodass hierzulande kaum ein Abiturient weiß, was der Brennpunkt einer Parabel oder der Schwerpunkt eines Dreiecks ist.

Allein mit dem hier vorgestellten Material, das sich im Wesentlichen auf elementare Geometrie beschränkt, könnte man locker mehr als vier Halbjahre füllen; man kann nicht erwarten, in so kurzer Zeit den Stoff nachzuholen, der in den Reformen der letzten 30 Jahren abgeschafft werden musste, um die Vorgaben der OECD und die Vorschläge der empirischen Bildungsforschung umsetzen zu können. Außerdem wird man im Vertiefungskurs schon deshalb auf Tiefe in diesem Bereich verzichten müssen, um sicher zu stellen, dass die anderen Pflichtthemen (Gleichungen, Ungleichungen, Folgen und Reihen, Grenzwerte, Integration einfacher Funktionen, vollständige Induktion, um nur einige zu nennen) nicht zu kurz kommen. Jedenfalls findet man in diesem Buch genügend Material, um dem Namen Vertiefungskurs gerecht werden zu können, und vielleicht auch Anregungen für den „normalen“ Unterricht. Insbesondere die Seiten in „Kastenform“ sind ohne große Vorarbeit verständlich und können bei sich bietenden Gelegenheiten in den Unterricht selbst oder in AGs eingebaut werden.

Bei der Präsentation des Stoffs habe ich mich um historische Genauigkeit bemüht – gerade in unseren Zeiten, in denen Unmengen an Information (wahre und falsche) aus dem Internet gezogen werden, ist es wichtig, Angaben nicht

unkritisch zu übernehmen, sondern sie zu verifizieren. Ebenfalls habe ich durchgehend versucht, die Beiträge der Alten mit modernen Fragen und Problemen zu verbinden.

Zu den Literaturhinweisen ist zu bemerken, dass es vermutlich unmöglich ist, bei jeder Aufgabe den wirklichen Urheber zu finden. Interessante Aufgaben entwickeln sich zu Dauerbrennern und tauchen in Variationen in vielen Zeitschriften, Büchern und Wettbewerben auf. Die Verweise bei den Aufgaben dienen daher in erster Linie nicht dazu, die Herkunft des Problems anzugeben, sondern sollen vor allem Werbung für eine ganze Reihe von Quellen sein, die einen höheren Bekanntheitsgrad verdient hätten.

Unterschieden habe ich weiter zwischen Aufgaben, die im Text verstreutund zur Kontrolle des Verständnisses erforderlich sind, und Übungen, die im Wesentlichen zur Erlangung von Routine gedacht und am Ende der jeweiligen Kapitel angeführt sind (ohne dass aber alle diese Aufgaben ohne Nachdenken zu lösen wären). Routine bedeutet einerseits, dass man *weiß*, dass man eine Aufgabe lösen kann, bevor man sie durchgerechnet hat, und andererseits, dass man die oft auftretenden Leichtsinnsfehler auf ein erträgliches Maß reduziert hat.

Endlich habe ich mich in Sachen Bebilderung sehr zurückgehalten, und das obwohl ich an anderen Stellen diverse Bildbände über Mathematik lobend erwähnt habe (so wie an dieser Stelle z.B. [124]). Den Hauptgrund dafür lehrt ein Blick in ein heutiges Schulbuch: Mathematik ist neben Bildern, die kaum zum Thema gehören, und kleinen Geschichten, die rein gar nichts mit Mathematik zu tun haben, zur Nebensache degradiert worden. Der Fortschritt in Sachen Schulmathematik ist auch hier in der Vergangenheit zu suchen.

Zum Erstellen dieses Buchs habe ich vor allem folgende (frei erhältlichen) Programme genutzt:

- `emacs` als editor,
- LaTeX als Textverarbeitungsprogramm,
- `geogebra` zum Erstellen der Zeichnungen,
- `pari` zur Approximation von Quadratwurzeln.

Ein Programm wie `geogebra` ist ein sehr hilfreiches Werkzeug, aber nur dann, wenn man den Benutzern ein solides Grundwissen in Geometrie mitgibt. Wer die klassischen Sätze (und Beweise!) der Dreiecks- und Kreisgeometrie nicht kennt, für den wird `geogebra` nur ein hübsches Spielzeug bleiben. Warum die Didaktiker die Schulgeometrie *de facto* abgeschafft haben und gleichzeitig nicht müde werden, die Einführung dynamischer Geometriesoftware zu forcieren, mag verstehen wer will.

Zum Schluss sei noch gesagt, dass mir bewusst ist, dass jedes einzelne Kapitel ein ganzes Buch verdient hätte. Es war alles andere als leicht, wesentliche Dinge, über die man viel mehr sagen müsste, kurz und bündig abzuhandeln. Aber, und damit sind wir wieder am Anfang: Wer soll das lesen?

Jagstzell, August 2014 Franz Lemmermeyer

http://www.springer.com/978-3-662-45269-1

Mathematik à la Carte
Elementargeometrie an Quadratwurzeln mit einigen geschichtlichen Bemerkungen
Lemmermeyer, F.
2015, XII, 201 S. 150 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45269-1