

Wir beginnen unseren Spaziergang durch die Kreisgeometrie mit der Konstruktion einiger interessanter und in der Kunst vielfach auftretender Figuren, die sich aus Kreisbögen zusammensetzen. Die theoretischen Grundlagen, die wir hierfür benötigen, sind sehr gering: Es genügt der Satz des Pythagoras. Zuvor werfen wir einen kurzen Blick auf die in diesem Buch verwendeten Bezeichnungen (siehe Abb. 1.1).

Die Gerade g durch die Punkte A und B bezeichnen wir mit AB , die Strecke mit den Endpunkten A und B mit \overline{AB} . Jede Gerade ist die Trägergerade der auf ihr liegenden Strecken. Punkte $P, Q, R \dots$ auf einer Geraden heißen *kollinear*. Jeder Punkt einer Geraden AB teilt diese in zwei, in diesem Punkt beginnende *Halbgeraden*. Die in A beginnende Halbgerade durch B bezeichnen wir mit AB^+ .

Die Länge der Strecke \overline{AB} ist der *Abstand* der Punkte A und B , den wir als $d(A, B)$ schreiben. Da Missverständnisse nicht zu befürchten sind, werden wir bisweilen auch vom Verhältnis zweier Strecken sprechen, wenn wir das Verhältnis ihrer Längen meinen. Der

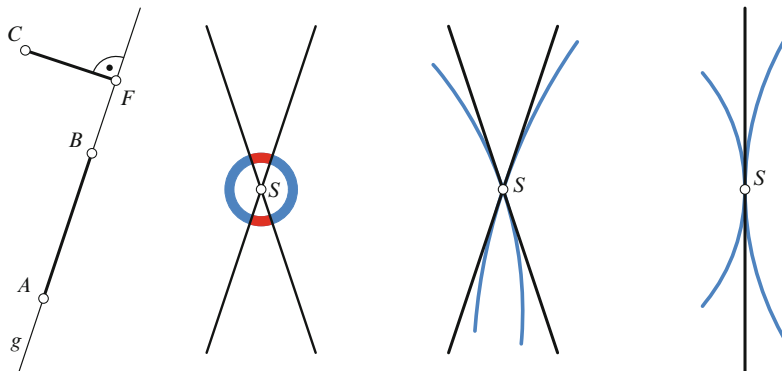


Abb. 1.1 Grundbegriffe

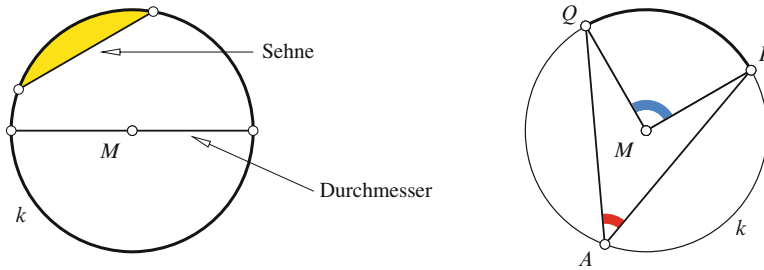


Abb. 1.2 Begriffe am Kreis

Abstand $d(C, g)$ eines Punktes C von einer Geraden g ist die Länge der Strecke \overline{CF} , wobei F der Fußpunkt des von C auf g gefällten Lotes ist.

Zwei Halbgeraden mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S bilden einen *Winkel* mit dem *Scheitel* S . Zwei Geraden durch S erzeugen somit vier Winkel, von denen je zwei gegenüberliegende (als Scheitelwinkel) gleich groß sind und zwei benachbarte sich zu 180° ergänzen. Kennt man also *einen* Winkel, so kennt man alle. Wir sprechen daher kurz vom *Schnittwinkel* zweier Geraden. Handelt es sich bei den Geraden um die Tangenten zweier Kurven in einem gemeinsamen Punkt S , so ist dies auch der Schnittwinkel dieser Kurven. Beträgt er 0° (oder 180°), so *berühren* sich die Kurven.

In einer Ebene ist ein *Kreis* k durch seinen *Mittelpunkt* M und seinen *Radius* r festgelegt als Ort aller Punkte der Ebene, die von M den Abstand r haben. Die Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte heißt *Sehne* des Kreises, ist sie doppelt so lang wie ein Radius, auch *Durchmesser* (siehe Abb. 1.2). Besitzt ein Kreis den Durchmesser \overline{AB} , so sprechen wir kurz vom Kreis über \overline{AB} . Jede Sehne teilt die Kreisfläche in zwei *Segmente*.

Einen durch zwei Radien \overline{MP} und \overline{MQ} ausgeschnittenen *Kreisbogen* und dessen Länge bezeichnen wir mit \widehat{PQ} (siehe Abb. 1.2). Es gibt davon zwei, die wir zueinander *komplementär* nennen. Die beiden Halbgeraden MP^+ und MQ^+ schließen den zugehörigen *Mittelpunktswinkel* oder *Zentriwinkel* ein. Wählen wir einen (von P und Q verschiedenen) Punkt A auf dem zu einem Bogen \widehat{PQ} komplementären Bogen, so liefern die Halbgeraden AP^+ und AQ^+ einen *Umfangswinkel* oder *Peripheriewinkel* über dem Bogen \widehat{PQ} . Wenn klar ist, welcher Bogen mit den Endpunkten P, Q gemeint ist, sprechen wir bisweilen auch vom Umfangswinkel über der Sehne \overline{PQ} .

Schließlich nennen wir zwei Kreise mit gleichem Mittelpunkt *konzentrisch*. Die Gerade durch die Mittelpunkte zweier nicht konzentrischer Kreise ist deren *Zentrale*.

1.1 Der bekannteste Kreis

Der wohl bekannteste Kreis ist nach Thales benannt, der etwa von 625 bis 547 v. Chr. in Milet, einer Stadt an der Westküste Kleinasiens, lebte. In seiner weitestgehenden Formulierung lautet der entsprechende Satz wie folgt.

Satz 1.1 (Satz des Thales) *Das Dreieck ABC besitzt genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn der Punkt C auf dem (Thales-)Kreis über \overline{AB} liegt.*

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergeben in einem rechtwinkligen Dreieck die nicht rechten Winkel zusammen 90° . Hat also das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel, so kann man diesen durch eine Strecke \overline{CD} so teilen, dass im Dreieck ADC zweimal der Winkel α und im Dreieck BCD zweimal der Winkel β auftritt (siehe Abb. 1.3a). Da ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln gleichschenkelig ist, folgt hieraus

$$d(A, D) = d(C, D) = d(B, D),$$

weshalb die Punkte A, B, C auf einem Kreis mit Mittelpunkt D liegen.

Liegt umgekehrt C auf dem Kreis über \overline{AB} , so gilt für den Mittelpunkt M der Strecke \overline{AB}

$$d(A, M) = d(B, M) = d(C, M)$$

(siehe Abb. 1.3b). Also sind die Dreiecke MCA und MBC gleichschenkelig, weshalb ihre Basiswinkel jeweils gleich groß sind. Somit gilt

$$\alpha + \beta = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

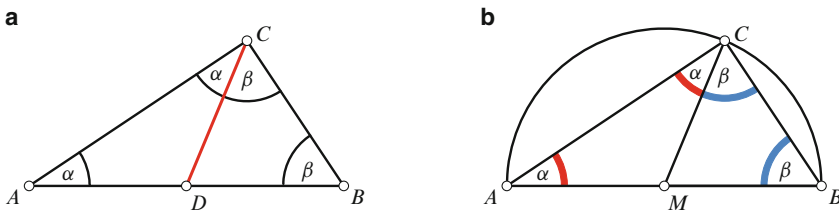


Abb. 1.3 Der Satz des Thales

1.2 Der gotische Spitzbogen

Mit der Gotik löste der Spitzbogen den romanischen Rundbogen ab. Er ermöglichte den Bau höherer Kirchen, deren Lichtarchitektur Gott, die Quelle allen Lichts, erfahrbar machen sollte. Die farbigen Fenster dieser Kirchen faszinieren den Betrachter bis heute. Als erstes Bauwerk der Hochgotik gilt die Kathedrale von Chartres (siehe Abb. 1.4). Begonnen wurde mit ihrem Bau im Jahre 1194, nachdem ein Stadtbrand den romanischen Vorgängerbau zerstört hatte. Offiziell eingeweiht wurde die Kirche erst 1260. Die Gesamtfläche ihrer Fenster beträgt rund 5000 m^2 , was etwa der Fläche eines Fußballfeldes entspricht.

Ein gotisches Kirchenfenster besteht aus einem Rechteck, das nach oben durch die so genannte *Kämpferlinie* begrenzt ist (rot in Abb. 1.5). Ihre Endpunkte heißen die *Kämpferpunkte*. Darüber erhebt sich das von zwei Kreisbögen (mit gleichem Radius) begrenzte Bogenfeld. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich den Fall, der in Abb. 1.5a zu sehen ist. Hier fallen die Mittelpunkte der Kreisbögen mit den Kämpferpunkten zusammen. Diese Konstruktion der Spitzbögen kann man variieren, indem man die Mittelpunkte der Kreise nach außen (überhöhter Spitzbogen; siehe Abb. 1.5b) oder innen (gedrückter Spitzbogen; siehe Abb. 1.5c) verschiebt.

Das Bogenfeld ist meist reich mit Maßwerk, also durch die filigrane Arbeit von Steinmetzen, verziert (siehe Abb. 1.6). Noch aufwendiger waren diese Verzierungen in den



Abb. 1.4 Die Kathedrale von Chartres (Olvr / Wikimedia Commons)

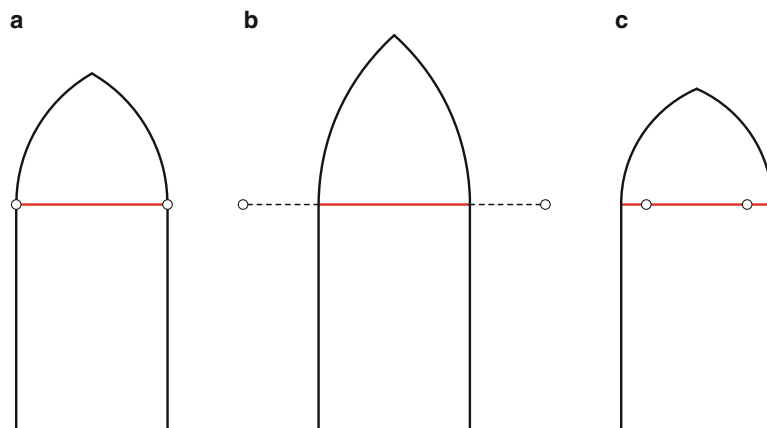


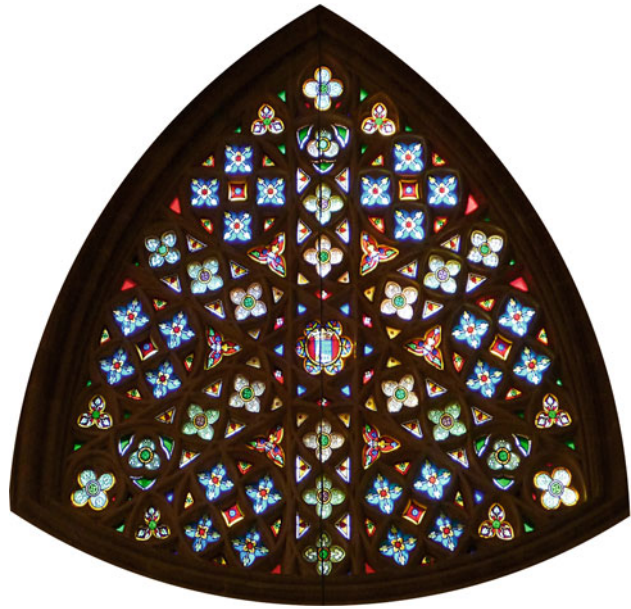
Abb. 1.5 Kirchenfenster

Abb. 1.6 Bogenfeld in Fontfroide (bei Narbonne)



prächtigen runden, im Durchmesser bisweilen mehr als 10 Meter großen Fenstern über dem Hauptportal oder in den Fassaden des Querschiffes, die als Fensterrosen oder Rosetten bekannt sind. Die Abb. 1.7 zeigt ein reich verziertes Kirchenfenster mit einer Randkurve, die aus dem Rahmen fällt. Im Kap. 10 werden wir auf diese Randkurve zurückkommen.

Abb. 1.7 Fenster in der Kathedrale von Bilbao



Wir sehen, dass sich das Maßwerk aus verschiedenen geometrischen Formen zusammensetzt, bei denen der Kreis eine wichtige Rolle spielt. Wie sich solche Formen konstruieren und ihre Maße berechnen lassen, sehen wir uns in diesem Kapitel an einigen Beispielen an.

Zunächst betrachten wir Maßwerk in einem Spitzbogen. Dabei gehen wir stets davon aus, dass dieser Spitzbogen von der Kämpferlinie \overline{AB} der Länge R und von zwei Kreisbögen mit den Mittelpunkten A und B begrenzt wird.

Als erstes füllen wir den Spitzbogen mit einem Kreis (siehe Abb. 1.8a). Wie lassen sich der Mittelpunkt M und der Radius r dieses Kreises bestimmen?

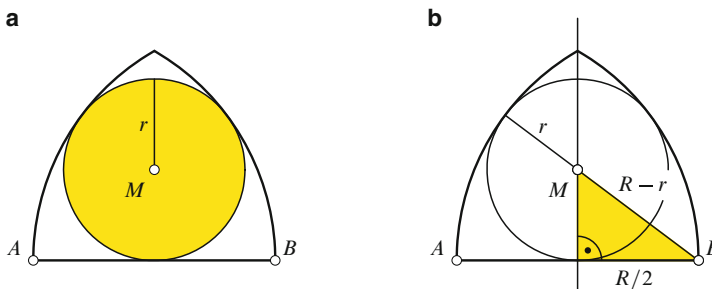


Abb. 1.8 Einbeschriebener Kreis

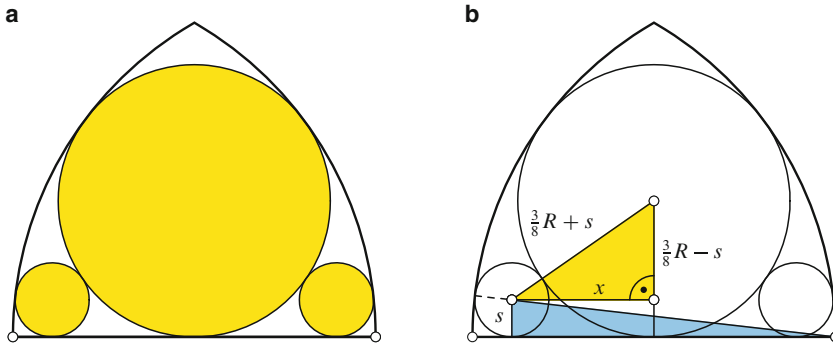


Abb. 1.10 Zwei weitere Kreise

Zusammen zeigt dies

$$-\frac{7}{2}s + \frac{5}{4}R = \sqrt{R^2 - 2Rs}.$$

Quadrieren liefert

$$s = \frac{R}{98}(27 \pm 12\sqrt{2}).$$

Da s kleiner als $\frac{3}{8}R$ ist, erhält man schließlich

$$s = \frac{R}{98}(27 - 12\sqrt{2}) \approx \frac{R}{10}.$$

Nun setzen wir zunächst zwei Halbkreise (mit dem Radius $\frac{R}{4}$) auf die Kämpferlinie und anschließend in die Restfläche einen berührenden Kreis (siehe Abb. 1.11a). Gesucht sind der Radius r und der Mittelpunkt dieses Kreises.

Wenden wir wieder zweimal den Satz des Pythagoras an, erhalten wir (siehe Abb. 1.11b)

$$h^2 = (R - r)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(r + \frac{R}{4}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2.$$

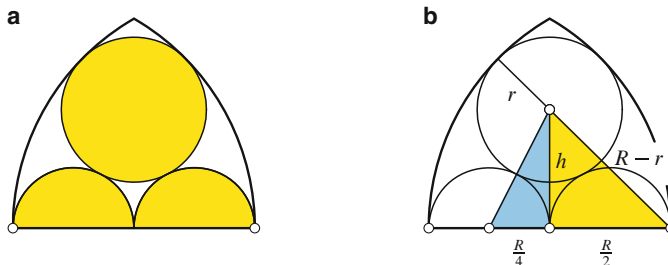


Abb. 1.11 Zwei Halbkreise



Abb. 1.12 Drei und vier Bögen

Hieraus folgt

$$\frac{3}{4}R^2 + r^2 - 2Rr = r^2 + \frac{1}{2}Rr,$$

was

$$\frac{3}{4}R^2 = \frac{5}{2}Rr$$

und schließlich

$$r = \frac{3}{10}R$$

ergibt.

Dass man auch mehr als zwei Halbkreise auf die Kämpferlinie setzen kann, zeigen die Spitzbögen aus dem Kreuzgang des ehemaligen Klosters Fontfroide (bei Narbonne), die in Abb. 1.12 zu sehen sind.

Nun setzen wir in den Spitzbogen erst zwei weitere Bögen mit halbem Radius und dann einen Berührkreis ein (siehe Abb. 1.6 und Abb. 1.13a).

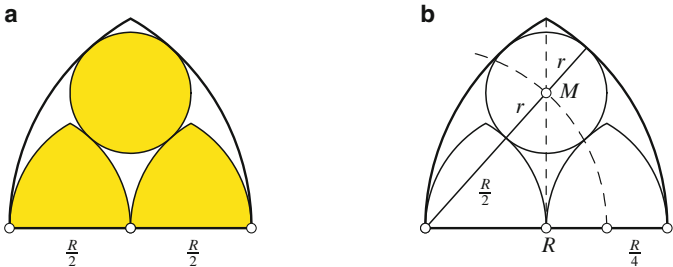


Abb. 1.13 Spitzbögen im Spitzbogen

Die Abb. 1.13b zeigt, dass sich der Radius r dieses Kreises sehr einfach berechnen lässt. Es gilt nämlich

$$\frac{R}{2} + 2r = R,$$

also

$$r = \frac{R}{4}.$$

Der Mittelpunkt M des Kreises ist damit Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Kämpferlinie mit dem Kreis um einen Kämpferpunkt mit dem Radius

$$\frac{R}{2} + r = \frac{3}{4}R.$$

1.3 Pässe und Fischblasen

Die Kreise, die wir im vorigen Abschnitt in die Spitzbögen gesetzt haben, lassen sich natürlich weiter verzieren. In den Abbildungen 1.6 und 1.7 haben wir hierfür bereits Beispiele gesehen. Ein weiteres Beispiel aus der Kathedrale von Narbonne zeigt die Abb. 1.14.

Besonders beliebte Motive waren dabei Fischblasen und Drei- oder Vierpässe. Mit ihnen werden wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

Wir beginnen mit dem Vierpass und der vierschweifigen Fischblase. Dazu setzen wir in einen Kreis k mit Radius R vier kongruente berührende Kreise (siehe Abb. 1.15). Indem man die Berührkreise geeignet abschneidet, erhält man unterschiedliche Figuren. In der



Abb. 1.14 Pässe und Fischblasen

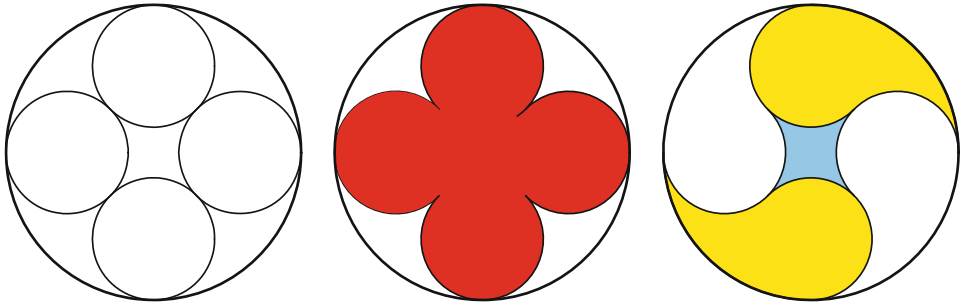


Abb. 1.15 Vierpass und vierschweifige Fischblase

Mitte sehen wir den *Vierpass*, rechts die *vierschweifige Fischblase*. Beide Figuren sind auch – reich verziert – in der Abb. 1.14 zu sehen. Wie groß ist der Radius r der vier Berührkreise?

Der Satz des Pythagoras liefert im gelben Dreieck der Abb. 1.16a

$$(2r)^2 = 2 \cdot (R - r)^2,$$

also

$$r^2 + 2Rr = R^2$$

oder

$$(r + R)^2 = r^2 + 2Rr + R^2 = 2R^2.$$

Da r positiv ist, ergibt dies

$$r = -R + R\sqrt{2}.$$

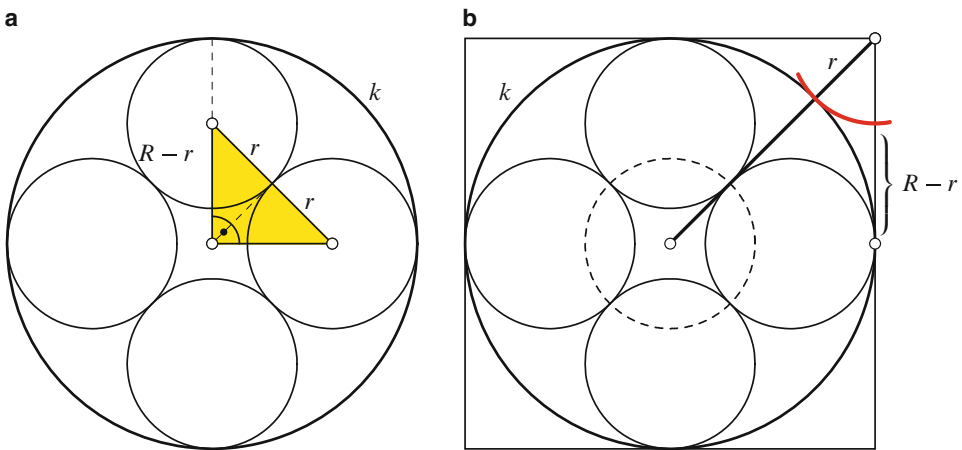


Abb. 1.16 Berechnung und Konstruktion

Die Abb. 1.16b zeigt, dass die Konstruktion dieser Größe sehr einfach ist. Ein Berührquadrat des Kreises k hat die Seitenlänge $2R$. Die halbe Diagonale des Quadrats hat daher nach dem Satz des Pythagoras die Länge $R\sqrt{2}$. Zieht man hiervon R ab, so erhält man nach unserer Rechnung den Radius r der vier Berührkreise. Der Kreis um eine Quadratecke, der den Kreis k von außen berührt, hat somit den gesuchten Radius r . Auch der Abstand $R - r$ der vier Kreismittelpunkte vom Mittelpunkt des Kreises k lässt sich direkt ablesen.

Die Abb. 1.6 zeigt, dass bisweilen auf die vier Kreise ein fünfter gesetzt wird. Geht er (wie der gestrichelte Kreis in Abb. 1.16b) durch die vier Berührungspunkte der eingeschriebenen Kreise, so ist er zu diesen kongruent (man betrachte im gelben Dreieck der Abb. 1.16a die Höhe auf die Hypotenuse).

Wir kommen nun zum Dreipass und zur dreischweifigen Fischblase. Dazu setzen wir in unseren Kreis k mit Radius R drei kongruente berührende Kreise (siehe Abb. 1.17). Durch geeignetes Abschneiden enthält man wieder unterschiedliche Figuren, in der Mitte den *Dreipass*, rechts die *dreischweifige Fischblase*.

Wie groß ist der Radius r der drei Berührkreise?

Da ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge s den Umkreisradius $\frac{s}{3}\sqrt{3}$ besitzt, besitzt ein gleichseitiges Dreieck mit Umkreisradius R die Seitenlänge $R\sqrt{3}$. Daher liefert der 2. Strahlensatz (man betrachte in Abb. 1.18 die gelbe Figur)

$$(R - r) : R = 2r : R\sqrt{3}.$$

Dies ergibt den Radius

$$r = (2\sqrt{3} - 3)R$$

und die für die Konstruktion der Mittelpunkte interessante Größe

$$R - r = (4 - 2\sqrt{3})R.$$

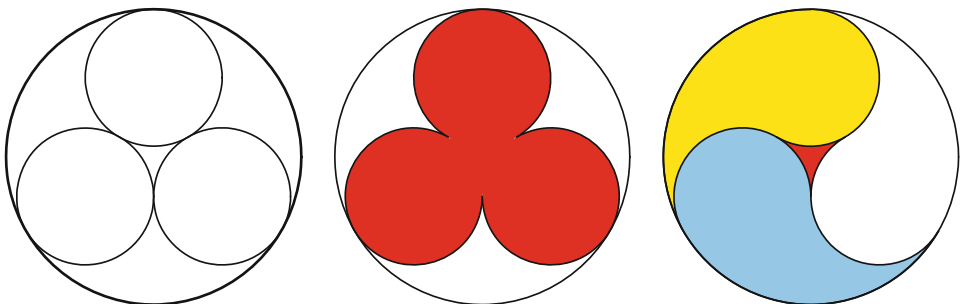


Abb. 1.17 Dreipass und dreischweifige Fischblase

Kreisgeometrie

Eine elementare Einführung

Aumann, G.

2015, VIII, 260 S. 260 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-45305-6