2 Von Mengen und Unmengen

Gott existiert, weil die Mathematik widerspruchsfrei ist, und der Teufel existiert, weil wir das nicht beweisen können.

André Weil[1]

Der Mengenbegriff

Georg Cantor (1845–1918) stellte am 29. November 1873 in einem Brief an den Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind sinngemäß die folgende Frage:

> „Kann man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... so der Gesamtheit der positiven reellen Zahlen zuordnen, dass jeder natürlichen Zahl n eine und nur eine reelle Zahl entspricht?“

Die „reellen Zahlen“, von denen hier die Rede ist, kann man sich als unendliche Dezimalbrüche vorstellen, und Cantor wollte wissen, ob die Gesamtheit dieser Dezimalbrüche abgezählt werden kann.

Am 7. Dezember 1873 konnte Cantor selbst den Beweis dafür geben, dass es eine solche Zuordnung zwischen den natürlichen und den reellen Zahlen **nicht** gibt! Die „Menge der reellen Zahlen“ ist nicht „abzählbar“.

Man kann dieses Datum als Geburtsstunde der ***Mengenlehre*** bezeichnen, die von Cantor vor allem entwickelt wurde, um besser mit den verschiedenartigen unendlichen Mengen umgehen zu können.

Aus dem Jahre 1895 stammt Cantors berühmte „Mengendefinition“:

Definition (Mengen und Elemente)

Unter einer ***Menge*** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ***Elemente*** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Geschult durch unsere Überlegungen zur Axiomatik und Logik können wir an dieser Definition keinen großen Gefallen finden. In Wirklichkeit werden hier die Grundbegriffe „Menge“ und „Element“ eingeführt. Als Nächstes würden wir jetzt ein Axiomensystem erwarten. Das würde uns aber mit sehr komplizierten Begriffsbildungen konfrontieren, und so fortgeschritten sind wir im deduktiven Denken noch

[1] Der Franzose André Weil (1906–1998) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts, Mitgestalter der modernen algebraischen Geometrie und Gründungsmitglied der „Bourbaki“-Gruppe. Sein Bonmot war eine Reaktion auf Kurt Gödels Ergebnisse zu den Grundlagen der Mengenlehre.

K. Fritzsche, *Mathematik für Einsteiger*, DOI 10.1007/978-3-662-45388-9_2,

nicht. Deshalb begnügen wir uns erst einmal mit der anschaulichen Erklärung und machen uns darauf gefasst, dass über kurz oder lang Probleme auftreten werden.

Die Mengen bezeichnen wir fortan meist mit Großbuchstaben, die Elemente mit Kleinbuchstaben. Ist a ein Element von M, so schreiben wir:

$$\boxed{a \in M}$$

Aber **Vorsicht**! Die Welt ist nicht in Mengen und Elemente eingeteilt. Was eben noch eine Menge war, kann – als Objekt unseres Denkens – im nächsten Augenblick als Element einer anderen Menge dienen.

Will man eine neue Menge einführen, so braucht man Methoden zu ihrer Beschreibung:

Die einfachste Methode ist das **Aufzählen der Elemente**. Dazu werden die Elemente, durch Komma getrennt, hintereinander aufgeschrieben und insgesamt zwischen geschweifte Klammern gestellt.

2.1 Beispiele

A. $\{1, 2, 3\}$ ist die Menge der Zahlen 1, 2 und 3.

B. {blau, grün, gelb, orange, rot, violett} ist die Menge der Primär- und Sekundärfarben.

C. $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ ist die Menge der „Farben“ beim Skatspiel.

Bei dieser Schreibweise kommt es nicht auf die Reihenfolge an! So sind etwa die Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{3, 1, 2\}$ gleich. Wichtig ist aber, dass die Elemente „wohlunterschieden“ sind. Die Menge $\{1, 2, 2\}$ stimmt mit der Menge $\{1, 2\}$ überein.

Manchmal ist es einem zu mühsam, alle Elemente hinzuschreiben. Dann deutet man die fehlenden durch Pünktchen an.

2.2 Beispiele

A. $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10.

B. $\{a, b, c, \ldots, z\}$ ist die Menge der Kleinbuchstaben von a bis z.

Handelt es sich schließlich um unendlich viele Elemente, so lässt man das Ende offen.

2.3 Beispiele

A. $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen (Hier benutzen wir erstmals das Symbol „:=“ zum Definieren eines neuen Objekts!) und $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0.

B. $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.

C. $\mathscr{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ ist die Menge der Primzahlen.

Diese Schreibweise bietet natürlich Anlass zu vielerlei Missverständnissen. Zum Beispiel kann $\{3, 5, 7, \ldots\}$ die Menge der ungeraden positiven ganzen Zahlen sein, aber auch die Menge der ungeraden Primzahlen. Und was verbirgt sich hinter der Menge $\{3, 31, 314, 3\,141, 31\,415, \ldots\}$?

Besser ist daher die ***Beschreibung einer Menge durch eine Aussageform***. Ist $E(x)$ eine Aussageform mit einer freien Variablen x, so bezeichnet man die Menge M aller Objekte a, für die die Aussage $E(a)$ wahr ist, mit

$$M = \{x \mid E(x)\} \quad \text{oder mit} \quad M = \{x : E(x)\}.$$

Man sagt: „*M ist die Menge aller x mit $E(x)$.*"

2.4 Beispiele

A. $\mathscr{P} := \{x \mid x \text{ ist Primzahl}\}$.

B. Die Menge $\{x \mid (x \in \mathscr{P}) \wedge (x \text{ ist ein Teiler von } 30)\}$ besteht genau aus den Elementen 2, 3 und 5.

C. Die Menge $\{x \mid x = 2k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge der ungeraden positiven ganzen Zahlen.

Definition (Gleichheit von Mengen)

Zwei Mengen M und N heißen ***gleich*** (in Zeichen: $M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

2.5 Beispiel

Aussage: *Sei $M := \{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \wedge (4x = 16)\}$ und $N := \{4\}$. Dann ist $M = N$.*

Diese Aussage erfordert einen Beweis:

1. Ist $x \in N$, so ist $x = 4$. Aber 4 ist eine ganze Zahl und es ist $4 \cdot 4 = 16$. Also liegt die 4 auch in M.

2. Ist $x \in M$, so ist x eine ganze Zahl und $4 \cdot x = 16$, also $4 \cdot x = 4 \cdot 4$. Aber dann ist $x = 4$ und damit $x \in N$. Damit ist alles bewiesen. ∎

Klartext: Nach einer kurzen und pragmatischen Einführung in die logischen Grundlagen sind wir im Rahmen der Mengenlehre in der Mathematik angekommen. Bei den obigen Zeilen handelt es sich nun um den ersten **mathematischen** Beweis in unserer Darstellung. Den sollten wir möglichst genau analysieren, denn unser Ziel besteht ja darin, die Kunst des Beweisens zu erlernen. Benutzt werden dürfen die Regeln der Logik, die Grundbegriffe der Mengenlehre, die Möglichkeiten der Beschreibung von Mengen und die Definition der Gleichheit von Mengen. Behauptet wird: $\{x : (x \in \mathbb{Z}) \wedge (4x = 16)\} = \{4\}$.

Wie findet man einen Beweis dieser Behauptung? Zunächst ist es nützlich, Abkürzungen einzuführen, damit alles etwas übersichtlicher wird, zum Beispiel: $M := \{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \wedge (4x = 16)\}$ und $N := \{4\}$. Damit gewinnt die Behauptung die Gestalt „$M = N$". Erinnert man sich an die Definition der Gleichheit, so weiß man, dass man zeigen muss, dass M und N die gleichen Elemente besitzen. In anderen Worten: „$x \in M \iff x \in N$", oder ausführlicher: „Für alle x gilt: $x \in M \iff x \in N$." Und wie zeigt man das nun? Als Neuling im Geschäft kann man ruhig mal einen Rat annehmen, und der lautet hier: Zerlege eine Äquivalenz „$\mathscr{A} \iff \mathscr{B}$" in zwei Implikationen „$\mathscr{A} \implies \mathscr{B}$" und „$\mathscr{B} \implies \mathscr{A}$". Der Beweis zerfällt damit in zwei Teile.

1. Teil des Beweises: Weil eine Aussage für alle x bewiesen werden soll, beginnt man so: Sei $x \in M$ beliebig vorgegeben. Das heißt: $x \in \mathbb{Z}$ und $4x = 16$. Jetzt braucht man doch noch eine Information, die weder aus der Logik noch aus der Mengenlehre kommt, nämlich die Existenz einer einzigen (und ganzzahligen) Lösung der Gleichung $4x = 16$. Im nächsten Kapitel werden wir das Axiomensystem so erweitern, dass sich die Lösung $x = 4$ exakt herleiten lässt. Da aber jeder diese Lösung auch mit Hilfe seines Schulwissens findet, sei dieser Vorgriff gestattet. Also ergibt sich aus der Aussage „$x \in M$" die Aussage „$x = 4$", und die hat offensichtlich die Aussage „$x \in \{4\}$", also „$x \in N$" zur Folge.

Der 2. Teil des Beweises ist noch einfacher. Ist $x \in N$ beliebig vorgegeben, so muss zwangsläufig $x = 4$ sein. Das ist ein Element von $\mathbb{Z}$, und es ist $4x = 16$, also $x \in M$. Um den Schluss eines Beweises zu kennzeichnen, wird künftig statt des etwas bombastisch klingenden „q.e.d." ein kleines Karo (■) verwendet.

Das Beispiel zeigte, wie generell die Gleichheit von Mengen bewiesen wird:

$$M = N \iff ((x \in M) \implies (x \in N)) \wedge ((x \in N) \implies (x \in M)).$$

Wen stört, dass auf der rechten Seite der Äquivalenz eine Aussageform mit der Variablen x steht, der kann noch ein „für alle x" einfügen. Da außerdem auch die Mengenbezeichnungen M und N Variable sind, erhalten wir streng genommen erst dann eine Aussage, wenn wir noch die Quantifizierung „für alle M und N" vor die gesamte Äquivalenz setzen. In der Praxis lässt man das allerdings meist weg.

2.6 Eigenschaften der Gleichheit

Für die Gleichheit von Mengen gelten folgende Gesetze:

1. *Reflexivität: Jede Menge ist sich selbst gleich ($M = M$).*
2. *Symmetrie: Ist $M = N$, so ist auch $N = M$.*
3. *Transitivität: Ist $M = N$ und $N = P$, so ist auch $M = P$.*

Beweis:
1) Für alle x gilt sicher: $x \in M \iff x \in M$. Also ist $M = M$.

2) Die Gleichheit $M = N$ wird vorausgesetzt, also die Wahrheit der Äquivalenz $x \in M \iff x \in N$. Aber dann ist auch die dazu symmetrische Äquivalenz $x \in N \iff x \in M$ wahr, also $N = M$.

3) Nach Voraussetzung sind die beiden Äquivalenzen $x \in M \iff x \in N$ und $x \in N \iff x \in P$ wahr. Nach dem Ersetzungsprinzip[2] können wir die Aussageform $x \in N$ in der ersten Äquivalenz durch $x \in P$ ersetzen. Damit erhalten wir die Gleichheit von M und P. ∎

Definition (Teilmenge)

Die Menge T heißt ***Teilmenge*** von M (in Zeichen: $T \subset M$), wenn jedes Element von T auch ein Element von M ist.

Damit gilt:

$$T \subset M \quad \iff \quad (x \in T) \implies (x \in M).$$

Auch hier wurde die Quantifizierung „für alle x“ weggelassen. In Beweisen taucht sie meist in der Formulierung „sei x beliebig“ wieder auf. Will man etwa beweisen, dass $\{1, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist, so geht man folgendermaßen vor:

Sei x ein *beliebiges* Element von $\{1, 5\}$. Dann muss $x = 1$ oder $x = 5$ sein. In beiden Fällen ist x offensichtlich auch ein Element von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Also ist $\{1, 5\}$ Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Entsprechend zeigt man, dass $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist. Wenn Sie das selbst einmal versuchen, brauchen Sie sich nicht darüber zu wundern, dass Sie Formulierungsschwierigkeiten bekommen. Unsere bisherige Definition der Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ war nämlich nur eine anschauliche Beschreibung. Wenn Sie an einer wasserdichten Definition der Menge der natürlichen Zahlen interessiert sind, müssen Sie sich bis zum nächsten Kapitel gedulden. Dort werden wir $\mathbb{Z}$ so einführen, dass die Beziehung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ zu einer *trivialen*[3] Aussage wird.

Aufgabe 1 (Eigenschaften der Teilmengen-Beziehung)

> Zeigen Sie, dass die Teilmengen-Beziehung reflexiv und transitiv ist, und belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sie nicht symmetrisch ist.

Nun zu einem anderen Problem:

Wie sieht die Menge $M := \{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \wedge (4x = 5)\}$ aus? Da die Gleichung $4x = 5$ keine ganzzahlige Lösung besitzt, gibt es kein Objekt a, für das die Aussage $(a \in \mathbb{Z}) \wedge (4 \cdot a = 5)$ wahr wäre. Also kann die Menge M kein einziges Element enthalten.

Definition (leere Menge)

Die ***leere Menge*** $\varnothing$ ist die Menge, die kein Element enthält.

[2] Für diejenigen, die nicht die Zugabe in Kapitel 1 gelesen haben: Man kann innerhalb einer zusammengesetzten Aussage eine Teilaussage jederzeit durch eine äquivalente Aussage ersetzen.

[3] „Trivial“ bedeutet „platt, seicht, abgedroschen“. Zum Schrecken der Anfänger benutzen die Mathematiker dieses Wort sehr gern, wenn sie keine Lust haben, eine einfache Folgerung zu beweisen.

Die Aussageform $x \in \varnothing$ ist also *immer falsch*! Entsprechend ist die Aussageform $\neg(x \in \varnothing)$ *immer wahr*, also eine Tautologie. Übrigens: Statt $\neg(x \in M)$ schreibt man meistens $x \notin M$. Dass wir die leere Menge als eigenständiges Objekt zur Verfügung haben, ist sehr angenehm, denn oft sieht man einer Menge nicht sofort an, ob sie Elemente enthält. Ohne die leere Menge wäre man ständig zu Fallunterscheidungen gezwungen.

Probleme der Mengenbildung

Schon früh führte die vage gehaltene Mengendefinition Cantors zu Widersprüchen. Besonders bekannt sind die Russel'schen[4] Antinomien[5], vor allem die Geschichte vom Barbier:

Es war einmal ein Dorfbarbier, der hängte in sein Fenster ein Schild mit folgender Aufschrift:

„Ich rasiere jeden Mann im Ort, der sich nicht selbst rasiert!“

Das ging so lange gut, bis ein Fremder in den Ort kam und ihn fragte, ob er sich denn selbst rasiere. „Ja“, wollte der Barbier sagen, als ihm plötzlich Bedenken kamen. Rasierte er sich wirklich selbst, so dürfte er sich – des Schildes wegen – nicht rasieren. Rasierte er sich aber nicht selbst, so müsste er sich eben doch rasieren.

Seit der Zeit vernachlässigte der Barbier sein Geschäft immer mehr, und wenn er nicht gestorben ist, dann grübelt er noch immer darüber nach, ob er sich nun rasieren soll oder nicht.

Was hat denn das mit der Mengenlehre zu tun? Nun, es sei

$$U := \{x \mid x \notin x\}.$$

Ist $U \notin U$ wahr, so muss U ein Element von U sein, also auch $U \in U$. Ist dagegen $U \notin U$ falsch, so kann U nicht in U liegen, es ist $U \notin U$. In jedem Fall erhält man einen Widerspruch. U ist keine Menge, sondern eher eine ***Unmenge***.

Derartige Widersprüche wurden zunächst nur provisorisch durch das Verbot, allzu wilde Mengen zu bilden, aus der Welt geschafft. Erst 1908 stellte Ernst Zermelo, ein Schüler Cantors, ein Axiomensystem vor, das die Antinomien vermeidet – soweit man bis jetzt weiß.

Wir wollen das Zermelo'sche Axiomensystem hier nicht im Detail besprechen, vielmehr begnügen wir uns damit, gewisse Regeln für das Konstruieren von Mengen aufzustellen:

[4]Bertrand Russell (1872–1970) war ein britischer Philosoph, Logiker, Mathematiker und Sozialwissenschaftler. 1950 erhielt er den Nobelpreis für Literatur, später war er ein führender Vertreter der Weltfriedensbewegung.

[5]Eine „Antinomie“ ist ein Widerspruch zwischen zwei gültigen Sätzen.

1. Ist G eine bereits gegebene *Grundmenge*, $E(x)$ eine Aussageform mit einer Variablen x und G ein zulässiger Objektbereich für $E(x)$, so ist es erlaubt, die Menge aller Elemente $x \in G$ zu bilden, für die $E(x)$ zu einer wahren Aussage wird. Das ergibt die schon bekannte Konstruktion

$$\boxed{M = \{x \in G \mid E(x)\} \text{ oder } M = \{x \in G \,:\, E(x)\}.}$$

2. Ist M eine Menge, so kann man deren ***Potenzmenge***

$$\boxed{\mathbf{P}(M) := \{T \mid T \subset M\}}$$

bilden, also die Menge aller Teilmengen von M.

3. Sind A und B zwei Mengen, so existiert die ***Vereinigung*** (oder ***Vereinigungsmenge***) von A und B. Darunter verstehen wir die Menge

$$\boxed{A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.}$$

Diese Konstruktion kann auch auf mehrere Mengen angewandt werden.

4. Aus den obigen Konstruktionen können weitere abgeleitet werden, z.B.:

Sind A und B zwei Mengen, so existiert der ***Durchschnitt*** (oder die ***Schnittmenge***) von A und B, d.h. die Menge

$$\boxed{A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\},}$$

und auch die ***Differenz*** von A und B, die Menge

$$\boxed{A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.}$$

Ist G eine zuvor festgelegte Grundmenge und $A \subset G$ eine Teilmenge, so bezeichnet man die Differenz $G \setminus A$ auch als ***Komplement*** von A in G und schreibt A' dafür.

2.7 Beispiele

A. Mengen, die durch Aussageformen beschrieben werden:

(a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\} = \{-3, +3\}$.

(b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(c) Sei E die euklidische Ebene, $P \in E$ ein Punkt und r eine positive Zahl. Dann ist $\{Q \in E \mid\ Q$ hat von P den Abstand $r\}$ der (ebene) Kreis um P mit Radius r.

B. Potenzmengen:

(a) Sei $M := \{1, 2, 3\}$. Wir wollen sämtliche Teilmengen von M bestimmen. Zunächst gehört die leere Menge dazu! Denn die Aussageform

$$„\, x \in \varnothing \implies x \in M\,“$$

ist immer wahr, weil die Aussageform „$x \in \varnothing$“ immer falsch ist. Wie gut, dass die logische Implikation auch falsche Prämissen zulässt. Mit dem „gesunden Menschenverstand“ allein kämen wir bei solchen Spitzfindigkeiten nicht weit.

Geht man systematisch vor, so sucht man als Nächstes am besten nach den 1-elementigen Teilmengen, das sind $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{3\}$. Die 2-elementigen Teilmengen sind $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ und $\{2, 3\}$. Und schließlich ist M auch Teilmenge von sich selbst. Damit gilt:

$$\mathbf{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\,\}.$$

(b) Mein Freund Helmut möchte wissen, ob die leere Menge auch eine Potenzmenge hat. Tun wir ihm den Gefallen und betreiben etwas GAN[6].

Die Aussage „$\varnothing \subset \varnothing$“ ist wahr, weil die leere Menge aus formal-logischen Gründen in jeder Menge enthalten ist. Offensichtlich kann es nur eine leere Menge geben (überlegen Sie sich, warum!), und jede nicht leere Menge enthält mindestens ein Element, kann also nicht in der leeren Menge enthalten sein. Der langen Rede kurzer Sinn: Es ist

$$\mathbf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}.$$

Aus der leeren Menge haben wir durch Übergang zur Potenzmenge eine Menge mit einem Element konstruiert! Nun wollen wir es auf die Spitze treiben: Was ist denn die Potenzmenge der Potenzmenge der leeren Menge? Denken Sie mal kurz nach! Haben Sie's? Das Ergebnis lautet:

$$\mathbf{P}(\mathbf{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

Das ist nun eine Menge mit zwei Elementen! Und wenn wir das Verfahren noch einmal durchführen, so bekommen wir eine Menge mit vier Elementen. Es ist offensichtlich, dass wir auf diesem Wege beliebig lange weiterschreiten können.

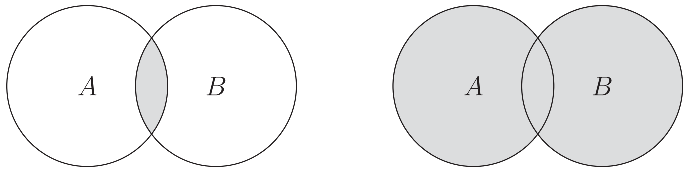
Aus Nichts haben wir eine neue, andere Welt erschaffen![7]

[6]„General Abstract Nonsense“ sagt man zu formal richtigen, inhaltlich aber eher langweiligen mathematischen Abhandlungen.

[7]Der Ausspruch ist geklaut! Johann Bolyai hat so seine Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie kommentiert.

C. Durchschnitt und Vereinigung:

Abb. 2.1



$A \cap B$ $A \cup B$

Hier handelt es sich eigentlich nur um die mengentheoretische Formulierung der logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$. Veranschaulichen kann man sie sich mit Hilfe der Venn-Diagramme[8], die zu Zeiten der „New Math"[9] an den Schulen traurige Berühmtheit erlangten. Zwei simple Beispiele wollen wir wenigstens angeben:

(a) $\{2,4,6,8\} \cup \{3,6,9\} = \{2,3,4,6,8,9\}$.

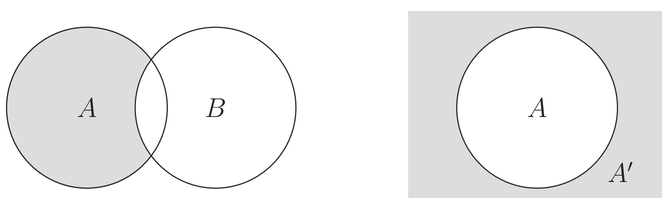
(b) $\{2,4,6,8\} \cap \{3,6,9\} = \{6\}$.

Übrigens nennt man zwei Mengen A und B ***disjunkt***, wenn ihr Durchschnitt leer ist.

D. Differenz und Komplement:

Auch hierzu gibt es Venn-Diagramme, die eigentlich schon alles erklären:

Abb. 2.2



$A \setminus B$

Ist etwa $A = \{2,4,6,8\}$ und $B = \{3,6,9\}$, so ist $A \setminus B = \{2,4,8\}$.

[8]Der Brite John Venn (1834–1923) war zunächst Priester und später Professor für Logik und Naturphilosophie in Cambridge.

[9]Nach Vorschlägen der Didaktiker J. Piaget und Z.P. Dienes wurde in den siebziger Jahren versucht, Kindern an der Grundschule mit Hilfe sogenannter „logischer Blöcke" die Mengenlehre zu vermitteln – als westliche Antwort auf den Sputnik-Schock. Was mit kleinen, ausgewählten Schülergruppen funktionierte, endet beim Massenversuch mit einem grandiosen Misserfolg. Das Pendel schlug dann zur anderen Seite aus, die Mengenlehre wurde fast vollständig aus den Lehrplänen verbannt, die Venn-Diagramme als „Kartoffelkunde" verhöhnt. Witzigerweise ist der Begriff der „Schnittmenge" in den Köpfen der Kinder von damals hängen geblieben, er gehört heute zum Vokabular vieler Politiker und Journalisten. Ein später Erfolg der „Neuen Mathematik"!

Mengen-Algebra

2.8 Satz

Für beliebige Mengen A, B, C gelten folgende Regeln:

1. *Kommutativgesetze:* $A \cup B = B \cup A$ *und* $A \cap B = B \cap A$.
2. *Assoziativgesetze:*
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *und* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. *Distributivgesetze:*
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

BEWEIS: Die Aussagen folgen ganz leicht aus den entsprechenden Regeln der formalen Logik, deshalb will ich hier nur die erste Formel als Beispiel beweisen:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \quad \vee \quad x \in B \\ &\iff x \in B \quad \vee \quad x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

Nach Definition der Gleichheit von Mengen bedeutet das: $A \cup B = B \cup A$. ■

Klartext: Zunächst eine Warnung: Es ist bequem, Äquivalenzzeichen wie im vorangegangenen Beweis zu benutzen, aber man sollte sich zuvor doch genau überlegt haben, dass tatsächlich Implikationen in beiden Richtungen gelten. Der leichtfertige Umgang mit Äquivalenzen ist eine der großen Fehlerquellen in der Mathematik.

Was aber hat das alles mit Algebra zu tun? In der Algebra geht es um die Auflösung von Gleichungen mit Hilfe von Umstellungen und Umformungen wie z.B. $a+b = b+a$ oder $c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$. In der Mathematik spricht man immer dann von „Algebra“, wenn Regeln und Strukturen auftauchen, die in ihrer Art damit vergleichbar sind. An Stelle der Rechenoperationen „+“ und „·“ können ruhig andere Operationen oder Verknüpfungen auftreten, also auch die Mengen-Operationen „∪“ und „∩“. Aber jedes Mal, wenn dabei die Seiten vertauscht werden dürfen, spricht man vom Vertauschungs- oder Kommutativgesetz. Wenn umgeklammert werden kann, also die Reihenfolge der Ausführung der Operationen keine Rolle spielt, spricht man vom Verknüpfungs-, Klammer- oder Assoziativgesetz. Und dass man etwas ausklammern oder umgekehrt Klammern durch „Ausmultiplizieren“ auflösen kann, ist die Aussage des Verteilungs- oder Distributivgesetzes. Hier fällt auf, dass es in der „Boole'schen Algebra“ der Mengen-Operationen zwei Distributivgesetze gibt (im Gegensatz zu der aus der Schule bekannten klassischen Algebra, bei der + und · natürlich nicht verwechselt werden dürfen).

2.9 Charakterisierung von Teilmengen

Sind N, M zwei Mengen, so gilt:

$$N \subset M \iff N \cap M = N.$$

Beweis: Es ist eine Äquivalenz der Form $A \iff B$ zu beweisen. Wir erledigen das in zwei Schritten:

1) Zunächst zeigen wir die Implikation $A \implies B$: Die Prämisse (A) bedeutet:

$$\text{Für alle } x \text{ gilt:} \quad x \in N \implies x \in M.$$

Hieraus wollen wir die Mengen-Gleichheit $N \cap M = N$ folgern.

a) $x \in N \cap M \implies (x \in N \wedge x \in M) \implies x \in N$ (nach den Gesetzen der Logik). Daraus folgt, dass $N \cap M \subset N$ ist.

b) $x \in N \implies (x \in N \wedge x \in M)$ (wegen der Prämisse!). Also ist $N \subset N \cap M$, und zusammen mit (a) ergibt das die gewünschte Gleichheit.

2) Zur Implikation $B \implies A$: Es sei jetzt $N \cap M = N$. Ist $x \in N$, so ist nach Voraussetzung auch $x \in N \cap M$, also $(x \in N \wedge x \in M)$. Dann ist erst recht $x \in M$ und das bedeutet, dass $N \subset M$ ist. ∎

2.10 Eigenschaften der Komplement-Bildung

Sei G eine fest vorgegebene Grundmenge, $A, B \subset G$. Dann gilt:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \textit{und} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Beweis: Sei x ein beliebiges Element der Grundmenge G. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)' &\iff \neg(x \in A \cap B) \\ &\iff \neg(x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \\ &\iff \neg(x \in A) \quad \vee \quad \neg(x \in B) \quad \text{(De Morgan!)} \\ &\iff x \in A' \quad \vee \quad x \in B' \\ &\iff x \in A' \cup B'. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Die zweite folgt analog. ∎

Aufgabe 2 (Beispiele zur Mengen-Algebra)

> Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B:
>
> 1. $A \subset B \iff A \cup B = B$.
> 2. $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
> 3. $A \cap B = \varnothing \iff A \setminus B = A$.

Die Arbeit mit Quantoren

Wir wollen jetzt den Umgang mit Aussageformen auf eine solide Basis stellen.

Definition (Existenzquantor)
Sei $E(x)$ eine Aussageform und G eine Menge zulässiger Objekte dafür.
Ist $\{x \in G \mid E(x)\} \neq \varnothing$, so schreibt man:

$$\boxed{\exists\, x \in G \;:\; E(x)}$$

Man sagt: ***Es gibt*** (oder: ***es existiert***) ein $x \in G$ mit der Eigenschaft $E(x)$.

Das Zeichen „ $\exists$ “ nennt man den ***Existenzquantor***. Er gibt an, dass es wenigstens ein Objekt x mit der fraglichen Eigenschaft gibt, es kann aber natürlich auch sehr viele x mit dieser Eigenschaft geben.

Definition (Allquantor)
Die Voraussetzungen seien die gleichen wie oben.
Ist $\{x \in G \;:\; E(x)\} = G$, so schreibt man:

$$\boxed{\forall\, x \in G \;:\; E(x)}$$

Man sagt: ***Für alle*** (oder: ***für jedes***) $x \in G$ gilt $E(x)$.

Das Zeichen „ $\forall$ “ nennt man den ***Allquantor***.

Stellt man vor eine Aussageform einen Existenz- oder Allquantor, so erhält man eine Aussage. Diesen Vorgang nennt man ***Quantifizierung***.

Um die Aussage „ $\exists\, x \in G$ mit $E(x)$“ zu beweisen, muss man ein Element $a \in G$ finden, so dass die Aussage $E(a)$ wahr ist. Dies ist wieder so ein Punkt, an dem man als Anfänger verzweifeln möchte. Nicht die Suche nach dem a steht normalerweise im Mittelpunkt (das kann irgendwie vom Himmel fallen), sondern der Nachweis, dass $E(a)$ erfüllt ist, dass also die „Probe“ stimmt. Zum Glück gewöhnt man sich an alles und nach einiger Zeit wundern auch Sie sich nicht mehr, wenn ein Beweis mit den Worten „Sei $a < 5/17$ ... “ beginnt und hinterher wie durch Zauberhand alles wunderbar zusammenpasst.

In Wirklichkeit fällt auch in der Mathematik nichts vom Himmel. Die mühsame Arbeit, ein passendes a zu finden, wird nur meist im stillen Kämmerlein erledigt. Umso größer ist dann das Erstaunen des Publikums, wenn das Gesuchte wie ein „deus ex machina“[10] erscheint. Leider wird die Suche nicht immer von Erfolg gekrönt und es stellt sich die Frage, ob man einen Existenzbeweis auch führen kann, ohne das gesuchte Objekt in der Hand zu halten. Tatsächlich ist das möglich, indem man zu

[10] Bereits im antiken Theater gab es raffinierte mechanische Konstruktionen, mit deren Hilfe Schauspieler (zum Beispiel solche, die einen Gott verkörperten) ganz unvermittelt auf der Bühne erscheinen konnten, eben als „Gott aus der Maschine“.

zeigen versucht, dass die logische Verneinung der Existenzaussage falsch ist. Das ist ein weiterer Grund dafür, dass die Widerspruchsbeweise und Kontrapositionen so beliebt sind. Allerdings muss man sich damit abfinden, dass einem solchen „indirekten“ Beweis immer ein bisschen der Makel der Unfähigkeit anhaftet. Direkte Existenzbeweise erfreuen sich einer weitaus größeren Wertschätzung, obwohl rein logisch kein Grund dafür vorhanden ist. Es gibt sogar eine kleine Fraktion unter den Mathematikern, die indirekte Beweise strikt ablehnt.

2.11 Beispiele

A. Die Aussage „ $\exists\, x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$ “ ist leicht zu beweisen. Man setze einfach $x = 3$, $y = 4$ und $z = 5$. Tatsächlich ist $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Diese „Probe“ reicht als Beweis. Viel interessanter ist die Frage, ob es noch weitere Lösungen gibt. Denn jede Lösung liefert in der Geometrie ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten allesamt eine ganzzahlige Länge haben. Tatsächlich gibt es sogar unendlich viele Lösungen: Sind u und v natürliche Zahlen, $u > v$, so kann man $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ und $z = u^2 + v^2$ setzen. Es ist

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \;=\; u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\ &= (u^2)^2 + 2u^2v^2 + (v^2)^2 \;=\; (u^2 + v^2)^2 \;=\; z^2. \end{aligned}$$

Es liegt nun nicht so fern, das gleiche Problem mit anderen Exponenten zu untersuchen. Gibt es ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für ein $n > 2$? Der Jurist und Hobbymathematiker Pierre de Fermat[11] behauptete im 17. Jahrhundert, einen wunderbaren Beweis dafür gefunden zu haben, dass es solche Lösungen nicht gibt. Leider sei nur der Rand des Buches, auf dem er seine Behauptung notiert habe, zu klein, um den Beweis vollständig aufzuschreiben. Die Notiz wurde erst nach dem Tode Fermats bekannt und beschäftigte für 350 Jahre die Fachwelt genauso wie unzählige Hobbymathematiker (zumal zu Anfang des 20. Jahrhunderts ein hoher Geldpreis für die Bestätigung des großen Fermat'schen Satzes ausgesetzt wurde). Erst 1994 bewies der britische Mathematiker Andrew Wiles, dass Fermat recht hatte, allerdings mit Mitteln, die erst zum Ende des 20. Jahrhunderts zur Verfügung standen. Man vermutet heute, dass Fermat einen Beweis für den Fall $n = 4$ und vielleicht auch für den Fall $n = 3$ gefunden und dann gedacht hatte, man könne diesen Beweis leicht auf den allgemeinen Fall verallgemeinern.

B. Die Aussage „Es gibt eine reelle Zahl, die nicht als rationaler Bruch geschrieben werden kann“ scheint einfach zu beweisen zu sein, wir haben das ja eigentlich schon in Kapitel 1 erledigt. Wenn man sich allerdings in den Gefilden der Algebra bewegt, gibt es so etwas wie die Diagonale im Einheitsquadrat

[11] Der Franzose Pierre de Fermat (1607–1665) beschäftigte sich neben seinem Beruf als Richter in der Freizeit mit Mathematik. Obwohl er seine Ergebnisse fast ausschließlich in Form von Briefen oder als Randnotizen in alten Schriften der Nachwelt hinterließ, gilt er als einer der genialsten Mathematiker seiner Zeit.

nicht, und auch der Satz des Pythagoras ist plötzlich ohne Bedeutung. Man muss sich also besinnen und genau festlegen, was vorausgesetzt werden kann. Die Eigenschaften der reellen Zahlen werden im nächsten Kapitel als Axiome eingeführt. Wenn diese Axiome so gestaltet sind, dass es zu jeder positiven reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt, dann existiert insbesondere die Zahl $\sqrt{2}$, und mit dem schon bekannten Beweis kann man zeigen, dass diese Zahl nicht rational sein kann. Es wird sich zeigen, dass dieses Programm zum Ziel führt, dass man aber unbedingt das Widerspruchsprinzip braucht.

Und wie beweist man eine All-Aussage? Wir haben schon an früherer Stelle erwähnt, dass man meist mit den Worten „Sei x ein beliebiges Element von …“ beginnt. Darauf sollte dann ein direkter Beweis folgen. Kommt man so nicht zurecht, so kann man auf das Widerspruchsprinzip zurückgreifen. Man nimmt an, es gebe ein Gegenbeispiel, und führt diese Annahme zum Widerspruch.

Aus einer All-Aussage kann man durch Spezialisierung eine Aussage über ein bestimmtes Objekt gewinnen. Wir können dafür ein umgangssprachliches Beispiel aus der klassischen Logik angeben:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Alle Menschen sind sterblich.}\\ \text{Sokrates ist ein Mensch.}\end{array}\right\} \implies \text{Sokrates ist sterblich.}$$

Die Verträglichkeit von Quantoren mit $\wedge$- und $\vee$-Verknüpfungen sieht auf den ersten Blick ein wenig kompliziert aus. Es wird sehr viel einfacher, wenn man die Mengensprache benutzt. Zum Beispiel bedeutet die Aussage

$$\exists\, x \in G \,:\, A(x) \vee B(x) \iff (\exists\, x \in G \,:\, A(x)) \vee (\exists\, x \in G \,:\, B(x))$$

mit den Mengen $A = \{x \in G \,:\, A(x)\}$ und $B = \{x \in G \,:\, B(x)\}$ einfach nur:

$$A \cup B \neq \varnothing \iff (A \neq \varnothing) \vee (B \neq \varnothing)\,.$$

Auf einen formalen Beweis verzichten wir hier.

Aufgabe 3 (Mengen-Algebra und Logik)

Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in die Prädikatenlogik.

1. $A \cap B \neq \varnothing \implies (A \neq \varnothing) \wedge (B \neq \varnothing)$.
2. Für $A, B \subset G$ gilt:
   (a) $A \cap B = G \iff (A = G) \wedge (B = G)$.
   (b) $(A = G) \vee (B = G) \implies A \cup B = G$.

Geben Sie Beispiele dafür an, dass die Implikationen nicht durch Äquivalenzzeichen ersetzt werden können.

Ist $A(x, y)$ eine Aussageform mit zwei Variablen und sind G und H Teilmengen der jeweils zulässigen Objektbereiche, so kann man durch zweifache Quantifizierung zu Aussagen kommen:

$$\exists\, x \in G\ \exists\, y \in H\ :\ A(x, y), \quad \forall\, x \in G\ \exists\, y \in H\ :\ A(x, y) \text{ usw.}$$

Gleiche Quantoren können vertauscht werden, eine Vertauschung zweier verschiedener Quantoren ist i.A. nicht möglich. Die Bedeutung der richtigen Reihenfolge der Quantoren wird sich besonders in der Analysis zeigen und stellt für den Anfänger einen sehr unangenehmen Stolperstein dar. Ich kann nur empfehlen, immer wieder nach der *Bedeutung* hinter dem formalen Apparat zu suchen. Wer in der Lage ist, einen Gedanken sprachlich einwandfrei zu formulieren, der sollte auch mit dem Gebrauch von Quantoren zurechtkommen.

Verneinungsregeln

In einem besonders wichtigen Fall können wir zum Glück ein einfaches Kochrezept angeben. Bisher haben wir ja das Problem der logischen Verneinung einer quantifizierten Aussageform noch nicht systematisch behandelt. Um aber Widerspruchsbeweise führen zu können, muss man solche Verneinungen gut beherrschen:

2.12 Verneinung quantifizierter Aussagen

1. $\neg(\forall\, x \in G : E(x)) \iff \exists\, x \in G : \neg E(x).$

2. $\neg(\exists\, x \in G : E(x)) \iff \forall\, x \in G : \neg E(x).$

BEWEIS: 1) Verneinung von All-Aussagen:

Ist $M := \{x \in G : E(x)\}$ und $M' := \{x \in G : \neg E(x)\}$ die Komplementärmenge, so ist $M \cup M' = G$ und $M \cap M' = \varnothing$.

Die Behauptung (1) entspricht der Aussage „$M \neq G \iff M' \neq \varnothing$“, und die ist äquivalent zu der Behauptung „$M = G \iff M' = \varnothing$“. Letzteres ist leicht zu verifizieren:

a) Ist $M = G$, so ist $M' = G' = G \setminus G = \{x \in G : x \notin G\} = \varnothing$.

b) Ist $M' = \varnothing$, so ist $M = M \cup \varnothing = M \cup M' = G$.

2) Die Verneinung von Existenz-Aussagen erhält man aus (1) durch geschickte Anwendung der doppelten Verneinung: $\neg\big(\exists\, x \in G : E(x)\big) \iff \neg\big(\exists\, x \in G : \neg\neg E(x)\big) \iff \neg\Big(\neg\big(\forall\, x \in G : \neg E(x)\big)\Big) \iff \forall\, x \in G : \neg E(x).$ ■

2.13 Beispiele

A. Aussage: Alle Mathematiker sind Nichtraucher.
Verneinung: Es gibt einen Mathematiker, der raucht. (Also nicht etwa: Alle Mathematiker rauchen.)

B. Aussage: Alle Wege führen nach Rom.
Verneinung: Es gibt einen Weg, der nicht nach Rom führt.

C. Aussage: Es gibt eine rationale Zahl q mit $q^2 = 2$.
Verneinung: Für alle rationalen Zahlen q ist $q^2 \neq 2$.

D. Bei komplizierteren Aussagen mit möglicherweise mehrfach geschachtelten Quantoren versagt meist der gesunde Menschenverstand. Hier soll nur ein harmloser Fall betrachtet werden:

Die Menge der reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet. Eine wahre Aussage ist dann z.B. das „Archimedes-Axiom“:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > x.$$

Die logische Verneinung lautet:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \leq x.$$

Überraschenderweise braucht man den Satz inhaltlich gar nicht zu verstehen. Eine sukzessive Anwendung der Verneinungsregeln liefert das Ergebnis ganz automatisch. Und hier ist das Kochrezept: Alle Quantoren werden ausgewechselt ($\exists \leftrightarrow \forall$) und die Aussage am Schluss wird verneint. Aber selbstverständlich soll dieses Kochrezept nur verzweifelten Anfängern eine erste Hilfe bieten. Wer Mathematik lernen will, muss auch Verneinungen beliebiger quantifizierter Aussagen inhaltlich verstehen.

Schließlich soll auch nicht verschwiegen werden, dass es in der Literatur noch andere Bezeichnungen für die Quantoren gibt:

Statt $\forall$ schreibt man oft $\bigwedge$, statt $\exists$ schreibt man $\bigvee$. Man kann das so erklären: Ist $I_n := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ und $E(k)$ eine Aussageform mit I_n als zulässigem Objektbereich, so gilt:

$$\begin{aligned} \forall\, k \in I_n : E(k) &\iff E(1) \wedge \ldots \wedge E(n) \\ \exists\, k \in I_n : E(k) &\iff E(1) \vee \ldots \vee E(n). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Negation von Quantoren)

Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

1. $\forall\, x \in G : (\, A(x) \Longrightarrow B(x)\,)$.
2. $\exists\, x \in G : (\forall\, y \in H : A(x,y)) \vee (\,\exists\, y \in H : \neg B(x,y))$.

Zum Schluss möchte ich ein berühmtes Rätsel von Lewis Carroll[12] vorstellen. Sie können es mit Logik oder mit Mengenlehre lösen. Wichtig ist, dass Sie nur die angegebenen Informationen benutzen! Denken Sie daran, dass für mich „Känguru“ und „Katze“ zwei Bezeichnungen für die gleiche Tiergattung sein könnten.

Aufgabe 5 (Das Rätsel von Carroll)

1. Die einzigen Tiere in diesem Haus sind Katzen.
2. Jedes Tier, das gern in den Mond starrt, ist als Schoßtier geeignet.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, gehe ich ihm aus dem Weg.
4. Es gibt keine fleischfressenden Tiere außer denen, die bei Nacht jagen.
5. Es gibt keine Katze, die nicht Mäuse tötet.
6. Kein Tier mag mich, außer denen im Haus.
7. Kängurus sind nicht als Schoßtiere geeignet.
8. Nur fleischfressende Tiere töten Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht mögen.
10. Tiere, die bei Nacht jagen, starren gerne in den Mond.

Wie verhalte ich mich gegenüber Kängurus?

Zugabe für ambitionierte Leser

Nach Einführung der Quantoren können wir unser Regelsystem zur Bildung von Beweisen folgendermaßen erweitern:

Sei G eine Menge zulässiger Objekte für die Aussageform $E(x)$.

1. Regel vom Existenz-Nachweis:

$$\left.\begin{array}{rl}\text{Wenn} & \vdash a \in G \\ \text{und} & \vdash E(a)\end{array}\right\}, \quad \text{dann} \quad \vdash \exists x \in G : E(x).$$

2. Regel von der Generalisierung:

$$\begin{array}{rl}\text{Wenn} & \vdash x \in G \Longrightarrow E(x) \quad \text{(mit einem von } x \text{ unabhängigen Beweis)}, \\ \text{dann} & \vdash \forall x \in G : E(x).\end{array}$$

3. Regel von der Spezialisierung:

$$\left.\begin{array}{rl}\text{Wenn} & \vdash a \in G \\ \text{und} & \vdash \forall x \in G : E(x)\end{array}\right\}, \quad \text{dann} \quad \vdash E(a).$$

[12] „Lewis Carroll“ ist ein Pseudonym des englischen Mathematikers Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898), der sich viel mit Logik beschäftigt hat. Berühmt wurde er allerdings durch sein Buch *Alice im Wunderland*.

Aufgaben

2.1 Lösen Sie Aufgabe 1 (Eigenschaften der Teilmengen-Beziehung) auf Seite 39.

2.2 Lösen Sie Aufgabe 2 (Beispiele zur Mengen-Algebra) auf Seite 45.

2.3 Lösen Sie Aufgabe 3 (Mengen-Algebra und Logik) auf Seite 48.

2.4 Lösen Sie Aufgabe 4 (Negation von Quantoren) auf Seite 50.

2.5 Lösen Sie Aufgabe 5 (Das Rätsel von Carroll) auf Seite 51.

2.6 Beschreiben Sie die folgenden Objekte mit Hilfe der Mengenschreibweise – es gibt meistens mehrere Beschreibungsmöglichkeiten:

1. Die Kugelschale um den Punkt P mit innerem Radius r und Dicke d.
2. Die Gesamtheit aller Lösungen der Gleichung $3x^2 - 2x = 1$.
3. Alle ganzen Zahlen, die kleiner als 7 und größer als -1 sind.
4. Alle Punkte im Koordinatensystem, die von der x-Achse und der y-Achse den gleichen Abstand haben.

2.7 Benutzen Sie Gleichungen und Ungleichungen, um Mengen zu beschreiben, die in Wirklichkeit leer sind (denen man das aber nicht auf den ersten Blick ansieht).

2.8 Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, b) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$.
c) $3 \in \{3\}$, d) $3 \subset \{3\}$, e) $\varnothing \subset \{1\}$, f) $\varnothing \in \{1\}$.

2.9 Bestimmen Sie jeweils $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ für die folgenden Mengen:

1) $A := \{x \in \mathbb{R} : 2(x-1) < 1\}$ und $B := \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$.

2) $A := \{x : \exists\, p \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 3p\}$ und $B := \{x : \exists\, q \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 4q\}$.

3) $A := \{x \in \mathbb{N} : \exists\, p, q \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } x = 2p + 3q\}$ und $B := \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 50\}$.

2.10 Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\{1\})) \cap \mathbf{P}(\{\varnothing, 1\})$.

2.11 Es sei M eine Menge mit n Elementen, $a \notin M$. Um wie viele Elemente ist $\mathbf{P}(M \cup \{a\})$ größer als $\mathbf{P}(M)$?

2.12 Zeigen Sie, dass $\mathbf{P}(X) \cap \mathbf{P}(Y) = \mathbf{P}(X \cap Y)$ und $\mathbf{P}(X) \cup \mathbf{P}(Y) \subset \mathbf{P}(X \cup Y)$ für alle Mengen X und Y gilt. Geben Sie ein einfaches Beispiel dafür an, dass im zweiten Fall i.A. nicht die Gleichheit gilt.

2.13 Beweisen Sie die folgenden Inklusionen (Teilmengen-Beziehungen):

$$\begin{aligned} A \cup (B \setminus C) &\subset (A \cup B) \setminus (C \setminus A) \\ \text{und} \quad (A \cap B) \setminus (A \cap C) &\subset A \cap (B \setminus C). \end{aligned}$$

2.14 Ein Händler hat schwarze und silberne DVD-Geräte auf Lager. Davon sind 159 schwarz oder fehlerhaft (oder beides), 21 sind gleichzeitig schwarz und fehlerhaft, 17 sind gleichzeitig silbern und fehlerhaft. Interpretieren Sie die Angaben mengentheoretisch und ermitteln Sie, wieviele schwarze Geräte im Lager stehen.

2.15 Formulieren Sie die folgenden umgangssprachlichen Aussagen mit Hilfe des Existenz- bzw. Allquantors.

1. Die Polizei meldet, dass Fußgänger auf der A46 gesichtet wurden.
2. Bei der Galavorstellung gab es keine freien Plätze mehr.
3. Jeder Student muss wenigstens eine mündliche Prüfung ablegen.
4. Wenn ich in der Stadt auch nur einen Gerechten finde, werde ich sie nicht zerstören.
5. Nicht alle Kühe stehen im Stall.
6. Keine Kuh steht im Stall.

2.16 $A_1, \ldots, A_n$ seien Teilmengen einer Grundmenge G. Formulieren und beweisen Sie mit dem Allquantor und dem Existenzquantor die folgende Aussagen:

$$\begin{array}{rrcl} & G \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n) & = & (G \setminus A_1) \cap \ldots \cap (G \setminus A_n) \\ \text{und} & G \setminus (A_1 \cap \ldots \cap A_n) & = & (G \setminus A_1) \cup \ldots \cup (G \setminus A_n). \end{array}$$

2.17 Benutzen Sie Quantoren, um die folgenden Aussagen zu verneinen:

a) Das Parallelenaxiom (Axiom 5 von Euklid, siehe Kapitel 1, Abschnitt „Axiomensysteme").
b) „In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte".
c) „Beim Betriebsfest hat jeder Abteilungsleiter in jeder Stunde mit jeder Angestellten Walzer getanzt."
d) „In jeder Stadt gibt es einen Mann, der nicht in jeder Gaststätte bekannt ist."
e) „Es gibt einen Studenten, der in jedem Semester in jeder Vorlesung zu spät kommt."

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-45387-2

Mathematik für Einsteiger
Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn
Fritzsche, K.
2015, XII, 377 S. 115 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45387-2