Vorwort zur 5. Auflage

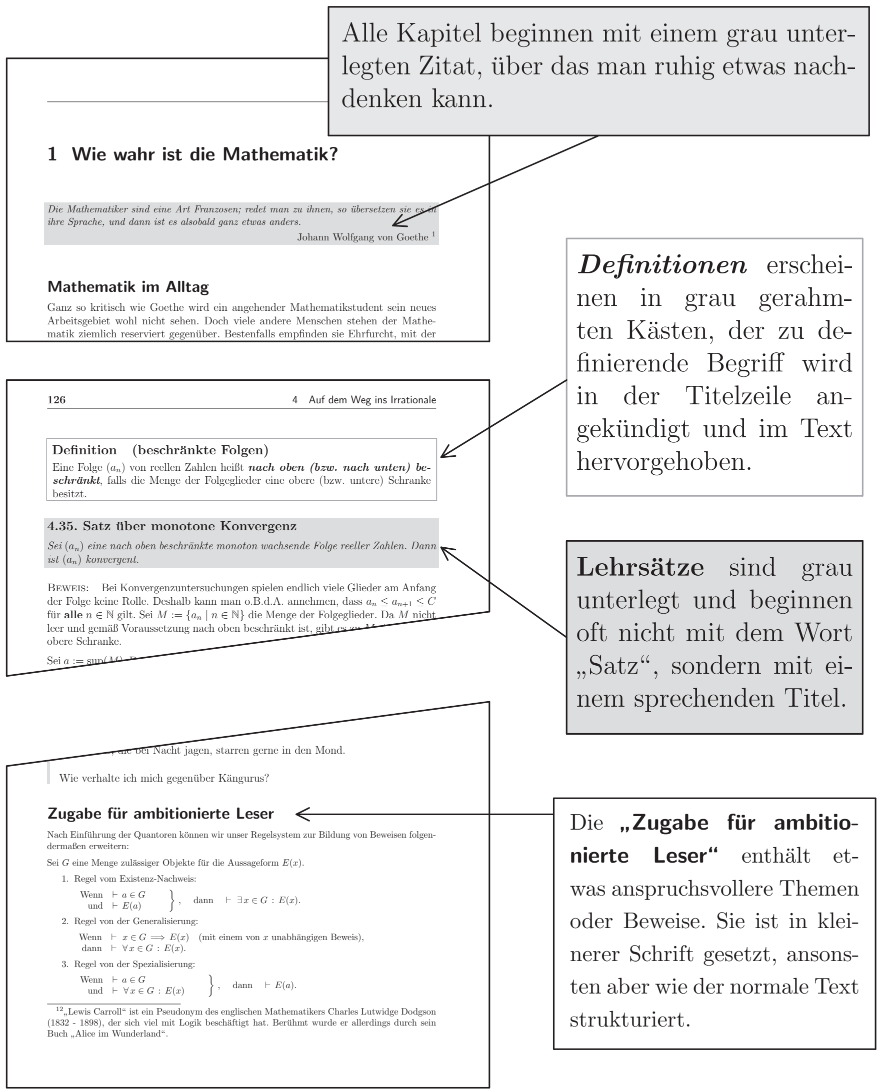
Dieses Buch wendet sich an alle, die sich ernsthaft mit Mathematik beschäftigen möchten, ganz besonders aber an alle diejenigen, die den Sprung von der Schule zu einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium wagen oder schon gewagt haben. Im Mittelpunkt stehen Dinge, die im Schulalltag meistens zu kurz kommen, nämlich der logische Aufbau der Mathematik und die Technik des Beweisens. Das Buch fordert zum Mitdenken auf und öffnet im Gegenzug die Tür zu neuen Welten. Jeder, der sich darauf einlassen will, ist herzlich willkommen und wird erleben, dass Mathematik auch Spaß machen kann. Ganz ohne schulische Vorkenntnisse geht es natürlich nicht, aber etwas Grundwissen aus der Oberstufe Mathematik reicht aus, und ein paar Erinnerungslücken seien dem Leser auch gestattet. Wer sich mit dem Gedanken trägt, Mathematik zu studieren, aber noch unentschlossen ist, kann dieses Buch für einen Selbsttest benutzen. Es kommt dabei überhaupt nicht darauf an, alles zu verstehen oder gar alle Aufgaben lösen zu können, entscheidend ist vielmehr die Fähigkeit, Leidenschaft für das Thema Mathematik zu entwickeln.

Auch die fünfte Auflage unterscheidet sich inhaltlich nicht allzu sehr von den vorherigen Versionen. Allerdings wurde der gesamte Text sehr sorgfältig in didaktischer Hinsicht überarbeitet. Einige Beweise wurden neu formuliert und so vielleicht noch zugänglicher gemacht, die vorhandenen Abbildungen wurden erweitert und durch über vierzig neue Skizzen ergänzt. Außerdem sind über 30 neue Aufgaben hinzugekommen. Insbesondere das sechste Kapitel über die ebene Geometrie sollte jetzt durch Umorganisation und eine etwas ausführlichere Darstellung noch klarer geworden sein.

Mit ein oder zwei Ausnahmen bietet jedes Kapitel am Schluss einen optionalen Anhang, die „Zugabe für ambitionierte Leser“. Die Lektüre dieser Zugabe wird natürlich jedem Leser ans Herz gelegt, aber das mag der einzelne nach eigener Einschätzung für sich entscheiden. Die Anhänge enthalten zum Beispiel anspruchsvollere Beweise, die im Haupttext weggelassen wurden, oder weiterführende mathematische Themen, deren Kenntnis für das Verständnis nachfolgender Texte nicht unbedingt erforderlich ist.

Ganz neu ist das Element „Klartext“, das dem Leser gelegentlich eine Atempause gewähren soll. In Lehrveranstaltungen erlebt man, dass es gewisse neuralgische Punkte in der Präsentation mathematischer Themen gibt, zum Beispiel bei der Einführung abstrakter Begriffe wie der Injektivität und Surjektivität von Funktionen, dem Supremum von Mengen reeller Zahlen oder der Integrierbarkeit, aber auch bei der Anwendung neuer Techniken wie etwa verschiedener Beweismethoden, Konvergenzuntersuchungen oder Stetigkeitsbeweisen mit Epsilon und Delta. Unter dem Stichwort „Klartext“ werden derartige Themen aufgegriffen und noch einmal in Ruhe besprochen oder aus einem neuen Blickwinkel betrachtet.

Die Zweifarbigkeit der vierten Auflage wurde wieder aufgegeben, um den Preis konstant halten oder sogar leicht senken zu können. Der Informationsgehalt hat nicht darunter gelitten, insbesondere wurden alle Abbildungen sorgfältig per Hand konvertiert und dabei zum Teil noch verbessert. Das Layout gestaltet sich jetzt im Detail wie folgt:



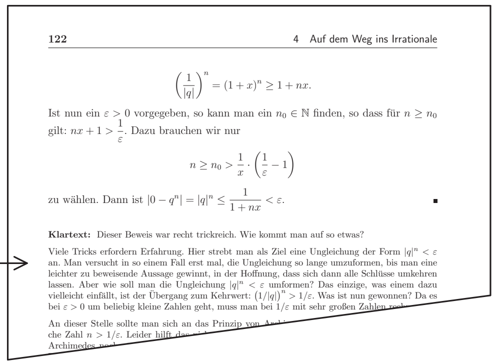
Viele werden auch die Lösungen der Aufgaben vermissen. Hier ist ein Arbeitsbuch in Vorbereitung, das neben deutlicheren Querverbindungen zur Schulmathematik, zusätzlichen Erklärungen und Beispielen vor allem die ausführlich aufgeschriebenen Lösungen zu allen Aufgaben dieses Buches präsentieren wird. Da die Fertigstellung eines neuen Buches immer gewissen Unwägbarkeiten unterliegt und niemand gegenüber den Lesern der vierten Auflage benachteiligt sein sollte, finden Sie die Lösungen in der kurzen Version, wie sie in der vorigen Auflage zu lesen waren, ab sofort auch auf meiner Homepage:

`http://www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsch/`

Beachten Sie, dass mein Name in der obigen Adresse etwas verstümmelt ist.[1] Wenn Sie die Startseite erreicht haben, klicken Sie einfach den Link „Books“ an!

Jedes Kapitel ist in Abschnitte mit eigenen Titeln untergliedert. Einzelne Aufgaben begleiten den Text und helfen bei der Vertiefung. Auf diese wird am Ende des Kapitels jeweils hingewiesen, gefolgt von vielen weiteren Aufgaben.

Gelegentlich wird ein Punkt erreicht, an dem Studierende aufstöhnen und nicht mehr mitdenken, weil ihnen alles zu viel wird. Dann hilft vielleicht ein Abschnitt mit der Überschrift **„Klartext“** weiter, in dem das Tempo deutlich heruntergefahren wird.



122 4 Auf dem Weg ins Irrationale

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Ist nun ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass für $n \geq n_0$ gilt: $nx + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dazu brauchen wir nur

$$n \geq n_0 > \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

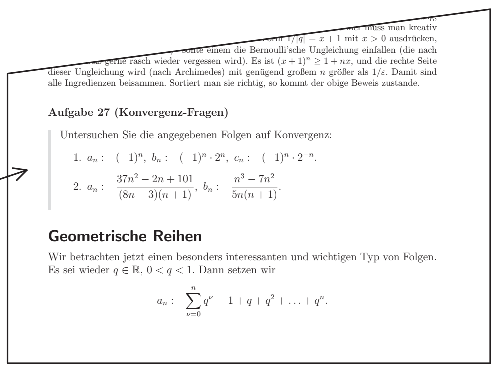
zu wählen. Dann ist $|0 - q^n| = |q|^n \leq \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$. ∎

Klartext: Dieser Beweis war recht trickreich. Wie kommt man auf so etwas?

Viele Tricks erfordern Erfahrung. Hier strebt man als Ziel eine Ungleichung der Form $|q|^n < \varepsilon$ an. Man versucht in so einem Fall erst mal, die Ungleichung so lange umzuformen, bis man eine leichter zu beweisende Aussage gewinnt, in der Hoffnung, dass sich dann alle Schlüsse umkehren lassen. Aber wie soll man die Ungleichung $|q|^n < \varepsilon$ umformen? Das einzige, was einem dazu vielleicht einfällt, ist der Übergang zum Kehrwert: $(1/|q|)^n > 1/\varepsilon$. Was ist nun gewonnen? Da es bei $\varepsilon > 0$ um beliebig kleine Zahlen geht, muss man bei $1/\varepsilon$ mit sehr großen Zahlen ...

An dieser Stelle sollte man sich an das Prinzip von ... che Zahl $n > 1/\varepsilon$. Leider hilft das ... Archimedes ...

Die **Aufgaben** innerhalb des Textes erkennt man an dem grauen Balken am linken Rand. Am Ende jedes Kapitels finden sich zahlreiche weitere Aufgaben.



... muss man kreativ ... $1/|q| = x + 1$ mit $x > 0$ ausdrücken, ... sollte einem die Bernoulli'sche Ungleichung einfallen (die nach ... gerne rasch wieder vergessen wird). Es ist $(x+1)^n \geq 1 + nx$, und die rechte Seite dieser Ungleichung wird (nach Archimedes) mit genügend großem n größer als $1/\varepsilon$. Damit sind alle Ingredienzen beisammen. Sortiert man sie richtig, so kommt der obige Beweis zustande.

Aufgabe 27 (Konvergenz-Fragen)

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz:

1. $a_n := (-1)^n,\ b_n := (-1)^n \cdot 2^n,\ c_n := (-1)^n \cdot 2^{-n}$.
2. $a_n := \dfrac{37n^2 - 2n + 101}{(8n-3)(n+1)},\ b_n := \dfrac{n^3 - 7n^2}{5n(n+1)}$.

Geometrische Reihen

Wir betrachten jetzt einen besonders interessanten und wichtigen Typ von Folgen. Es sei wieder $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Dann setzen wir

$$a_n := \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

Hier folgt nun eine kurze Beschreibung der Inhalte:

Am Anfang stehen Logik und Mengenlehre, also eine Einführung in die Sprache der modernen Mathematik. Damit soll Vertrauen in die Fundamente der mathematischen Wissenschaft erzeugt werden, es bleibt aber auch Raum für ein bisschen Skepsis. Im nächsten Schritt stellen sich die reellen Zahlen und ihre Teilbereiche

[1] Historisch durften gewisse Computernamen die Grenze von acht Zeichen nicht überschreiten.

vor, besonderes Gewicht liegt dabei auf der Behandlung der natürlichen und ganzen Zahlen, dem Induktionsprinzip, elementarer Kombinatorik und etwas Teilbarkeitslehre. Ausgehend von den rationalen Zahlen wird die Vollständigkeit unseres Zahlensystems mit Hilfe von Folgen und ihrer Konvergenz erarbeitet. Erst danach taucht der Abbildungsbegriff auf, mit den reellen Funktionen als wichtigster Beispielklasse. Polynome, rationale Funktionen, allgemeine Potenzen und Logarithmen sind dabei besonders zu nennen.

Kapitel 6 bietet eine weniger bekannte axiomatische Einführung in die ebene Geometrie, die auf den vorher bereitgestellten Begriffen aufbaut und die Schulgeometrie mit Lineal und Geodreieck abstrakt modelliert. Im nächsten Kapitel folgt die ebene Trigonometrie, und als Anwendung eine Beschreibung der euklidischen Bewegungen. So ergibt sich ein natürlicher Übergang zum Vektorbegriff, der in Kapitel 8 axiomatisch eingeführt wird, motiviert durch den Begriff der Translation in der Ebene. Der Schwerpunkt im Abschnitt über Vektorrechnung liegt auf Geraden und Ebenen im zwei- und dreidimensionalen Raum. Außerdem wird das Gauß-Verfahren als Lösungsmethode für lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten vorgestellt und die Lösungsmenge untersucht.

In dem Kapitel über Differentialrechnung wird zunächst alles Wissenswerte über stetige Funktionen erzählt und dann der Begriff der Differenzierbarkeit definiert. Differenzierbare Funktionen dienen der Bestimmung und Untersuchung von Extremwerten und Wendepunkten. Das Riemann'sche Integral wird zunächst als Flächenfunktion eingeführt, und nach der Herleitung des Fundamentalsatzes der Analysis wird das Integrieren mit Hilfe von Stammfunktionen erklärt. Erst an dieser Stelle können die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus exakt eingeführt werden.

Als zusätzliches „Schmankerl" präsentiert der letzte Abschnitt das Thema „komplexe Zahlen und Quaternionen" und gewährt damit Interessierten einen kleinen Blick über den Tellerrand.

Neben einem systematischen Einstieg in die Mathematik liefert das Buch auch viele historische Hintergrundinformationen und Anekdoten über die Mathematik und die Mathematiker.

Zum Schluss möchte ich mich bei Barbara Lühker und Andreas Rüdinger vom Verlag Springer Spektrum bedanken, die mir in bewährter Weise geholfen haben. Außerdem bedanke ich mich bei allen Lesern, die mich im Laufe der Jahre auf den einen oder anderen Fehler aufmerksam gemacht haben.

Wuppertal, im September 2014 Klaus Fritzsche

http://www.springer.com/978-3-662-45387-2

Mathematik für Einsteiger
Vor- und Brückenkurs zum Studienbeginn
Fritzsche, K.
2015, XII, 377 S. 115 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45387-2