

2 Teilbarkeit

Übersicht

2.1	Texterarbeitung	16
2.2	Übung und Selbstkontrolle	27
2.3	Weitere Beispiele	33

Teilbarkeitsfragen werden bereits in der Schule gestellt und teilweise beantwortet. Am Beispiel der Quersummenregeln, die als Kriterien für die Teilbarkeit durch 3 und 9 bekannt sind, lässt sich exemplarisch mathematisches Denken einführen.

Eine sorgfältige Analyse, warum Quersummenregeln überhaupt funktionieren, führt zum Rechnen mit Restklassen, das heißt zu einer neuen algebraischen Struktur. Damit besteht die Möglichkeit, verallgemeinerte Quersummenregeln zu entwickeln, die es ihrerseits erlauben, Teilbarkeitsregeln für beliebige Zahlen abzuleiten. Teilbarkeitsregeln zeigen somit sehr schnell die Vorzüge des im Mathematikstudium so stark betonten strukturellen Denkens auf.

Lernziele

1. Teilen mit Rest und schriftliches Dividieren
 - a) Sie können die Operation „Teilen mit Rest“ und den Algorithmus des schriftlichen Dividierens auf Zahlenbeispiele anwenden. (BT3)
 - b) Sie können den Algorithmus des schriftlichen Dividierens und die Operation „Teilen mit Rest“ in Beziehung setzen und dementsprechend ableiten, dass der Algorithmus ein wiederholtes Durchführen der Operation „Teilen mit Rest“ ist. (BT5)
2. Restklassen
 - a) Sie können Repräsentanten einer Restklasse benennen. (BT1)
 - b) Sie können die Restklassen bezüglich einer vorgegebenen natürlichen Zahl sowohl als Menge in aufzählender Schreibweise (Repräsentanten) als auch als Menge mit definierender Eigenschaft angeben. Sie können auch die Restklasse $[k]$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ angeben. (BT1)

- c) Sie können die Rolle der Repräsentanten in der Beschreibung von Restklassen erklären. (BT2)
 - d) Sie können Restklassen in den verschiedenen Sprech- und Schreibweisen darstellen (Mengenschreibweise aus Lernziel 2b, „modulo m “, $[n]$, $[n]_m$, $n \equiv r \pmod{m}$, $n \equiv_m r$). (BT2)
 - e) Sie können für eine vorgegebene natürliche Zahl eine Additions- und eine Multiplikationstabelle anfertigen. (BT3)
 - f) Sie können herausarbeiten, dass die Verfahren zur Addition und Multiplikation von Restklassen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. (BT4)
3. Restklassen und Teilbarkeit
- a) Sie können erklären, wieso das Konzept der Restklasse erlaubt, die Teilbarkeit (durch eine feste Zahl n) einer Zahl mit der Teilbarkeit (durch n) der Ziffern in der Dezimaldarstellung in Zusammenhang zu setzen. (BT2)
 - b) Sie können Restklassen korrekt zur Beschreibung von Teilbarkeitseigenschaften einsetzen. (BT3)
4. Teilbarkeitsregeln
- a) Sie können Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 formulieren. (BT2)
 - b) Sie können erklären, was die gewichtete Quersumme einer ganzen Zahl ist und diese bezüglich einer gegebenen Gewichtung für ein Zahlenbeispiel explizit bilden. (BT2 und BT3)
 - c) Sie können anhand eines geeigneten Textes die Herleitung von Teilbarkeitsregeln erklären und die Rolle von gewichteten Quersummen dabei herausarbeiten. (BT2 und BT4)
 - d) Sie können eine durch eine gewichtete Quersumme gegebene Teilbarkeitsregel analysieren und über deren Korrektheit entscheiden. (BT3 und BT4)
 - e) Sie können eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch eine gegebene natürliche Zahl entwerfen. (BT5)

2.1 Texterarbeitung

In diesem Kapitel soll ein Text gelesen werden, der die Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen thematisiert. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen den Restklassen modulo n der Zehnerpotenzen und einer verallgemeinerten Quersummenregel für Teilbarkeit durch n erklärt. Weiterhin erfolgt eine Darstellung der

zyklischen Struktur der Reste der Zehnerpotenzen in Verbindung mit der Addition und der Multiplikation auf der Menge der Restklassen.

Literatur: [HH12]

Beispieltext: [HH12], S. 16–22

Beispieltext aus [HH12]

Ergebnis von Abstraktion: Neue Strukturen

Konkrete Problemstellungen führen oft in natürlicher Weise auf neue, abstrakte (algebraische) Strukturen. Dieser Sachverhalt lässt sich gut mit der Problemstellung „Teilbarkeitsregeln“ illustrieren.

Schüler lernen, dass eine Zahl genau dann durch 2 bzw. 5 teilbar ist, wenn die letzte Ziffer der Dezimaldarstellung durch 2 bzw. 5 teilbar ist. Um festzustellen, ob eine Zahl durch 4 teilbar ist, muss man die letzten beiden Ziffern betrachten. Allgemein bekannt ist auch die *Quersummenregel*, mit der man feststellen kann, ob eine Zahl durch 3 bzw. 9 teilbar ist: nämlich genau dann, wenn die Quersumme durch 3 bzw. 9 teilbar ist. In der Regel wird in der Schule aber nichts darüber gesagt, wie man einer Zahl ansieht, ob sie durch 7 teilbar ist. Es stellt sich die Frage: Gibt es eine Teilbarkeitsregel für 7?

Die Quersummenregel für die Teilbarkeit durch 3 legt nahe, dass Teilbarkeitsregeln mit der Darstellung der Zahlen im Zehnersystem zusammenhängen, denn schließlich addiert man bei einer Quersumme die Einer, die Zehner, die Hunderter etc. Der Schlüssel zu den Teilbarkeitsregeln ist dann die Operation des *Teilens mit Rest*, die auch oft *Division mit Rest* genannt wird. Wenn man 10 durch 3 teilt, bleibt ein Rest von 1, denn $10 = 3 \cdot 3 + 1$. Teilt man 100 durch 3, bleibt wegen $100 = 33 \cdot 3 + 1$ wieder ein Rest von 1. Wir werden sehen, dass für alle Zehnerpotenzen beim Teilen durch 3 ein Rest von 1 bleibt und sich daraus die Quersummenregel ergibt.

Um eine Teilbarkeitsregel für 7 zu finden, teilen wir jede Zehnerpotenz durch 7 und betrachten den Rest. Als Reste kommen nur 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 infrage. Wenn man 10 durch 7 teilt, bleibt ein Rest von 3, denn $10 = 1 \cdot 7 + 3$. Teilt man 100 durch 7, bleibt wegen $100 = 14 \cdot 7 + 2$ ein Rest von 2. Für $1\,000 = 142 \cdot 7 + 6$ erhalten wir 6 als Rest. Die Restefolge ist also komplizierter als bei der Division durch 3. Es ergibt sich aber trotzdem ein Schema: Für 10 000 findet man den Rest 4, für 100 000 den Rest 5. In Beispiel 1.4 wird ein Argument dafür angegeben, dass sich ab da die Reste wiederholen. Das heißt, die Restefolge für 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000 etc. ist 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1 etc.

$$\begin{aligned}
 1 &= 0 + 1 = 0 \cdot 7 + 1 \\
 10 &= 7 + 3 = 1 \cdot 7 + 3 \\
 100 &= 98 + 2 = 14 \cdot 7 + 2 \\
 1\,000 &= 994 + 6 = 142 \cdot 7 + 6 \\
 10\,000 &= 9\,996 + 4 = 1\,428 \cdot 7 + 4 \\
 100\,000 &= 99\,995 + 5 = 14\,285 \cdot 7 + 5 \\
 1\,000\,000 &= 999\,999 + 1 = 142\,857 \cdot 7 + 1
 \end{aligned}$$

Aus dieser Information lässt sich ein Analogon der Quersummenregel ableiten. Die Details der Herleitung finden sich in den Beispielen 1.4¹ und 1.5. Der wesentliche Punkt dabei ist die Einteilung der ganzen Zahlen in sieben Klassen, die sogenannten *Restklassen modulo 7*. Zwei Zahlen gehören dabei zur selben Restklasse, wenn sie bei Division durch 7 denselben Rest ergeben oder, was dasselbe ist, wenn die Differenz der Zahlen durch 7 teilbar ist (Abbildung 1.4).

?₆

Gewichtete Quersummenregel für 7: Man multipliziere die

Einer mit 1,
Zehner mit 3,
Hunderter mit 2,
Tausender mit 6,
Zehntausender mit 4,
Hunderttausender mit 5
und dann von vorn etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man eine gewichtete Quersumme. Die Zahl ist durch 7 teilbar genau dann, wenn die gewichtete Quersumme durch 7 teilbar ist.

In Bezug auf Teilbarkeitsfragen sind Zahlen in derselben Restklasse gleichwertig (äquivalent), das heißt, für solche Fragen muss man statt der unendlich vielen ganzen Zahlen nur noch sieben Klassen betrachten, was eine dramatische Vereinfachung darstellt.

?₇

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8
−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Abb. 1.4: Aufteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 7

?₈ Es stellt sich heraus, dass die Menge der Restklassen zusätzliche Struktur hat. Man kann nämlich darauf eine Addition und eine Multiplikation einführen (Abbildung 1.5). Diese neue Struktur ermöglicht es, die angesprochene periodische Struktur der Reste der Zehnerpotenzen zu finden.

?₉

Beispiel 1.4 (Teilbarkeitsregeln I)

Sei n eine ganze Zahl und m eine natürliche Zahl. Dann kann man immer zwei ganze Zahlen k und r mit $0 \leq r < m$ finden, für die gilt

$$n = k \cdot m + r. \tag{1.5}$$

¹ Referenzen innerhalb der Beispieltexte beziehen sich selbstverständlich auf das Buch, dem der Text entnommen ist. Im Allgemeinen sind die genannten Textstellen nicht in diesem Arbeitsbuch enthalten, oft befinden sie sich aber in demselben Beispieltext oder im Beispieltext zu einem anderen Kapitel.

Das bedeutet, wenn man n durch m teilt, bleibt der Rest r . Wir werden diese Tatsache in Abschnitt 1.6 beweisen (siehe Satz 1.14), aber hier benutzen wir sie einfach. Man schreibt

$$n \equiv r \pmod{m} \quad \text{oder} \quad n \equiv_m r,$$

wenn (1.5) gilt (auch wenn r nicht zwischen 0 und $m - 1$ liegt), und liest „ n ist äquivalent zu r modulo m “. Eine Zahl n ist durch m *teilbar*, wenn sie bei Teilung durch m den Rest 0 liefert, das heißt wenn $n \equiv 0 \pmod{m}$ gilt.

Die entscheidende Beobachtung für die Herleitung von Teilbarkeitsregeln ist, dass die Operation Teilen mit Rest mit Addition und Multiplikation verträglich ist: Aus $n = k \cdot m + r$ und $n' = k' \cdot m + r'$ folgt

$$n + n' = (k + k') \cdot m + (r + r') \quad \text{und} \quad nn' = (kk'm + kr' + k'r) \cdot m + rr'.$$

Wenn man also $n + n'$ durch m teilt, bleibt derselbe Rest, wie wenn man $r + r'$ durch m teilt. Analog gilt für die Multiplikation: Wenn man nn' durch m teilt, bleibt derselbe Rest, wie wenn man rr' durch m teilt. In Kurzform:

$$n + n' \equiv r + r' \pmod{m} \quad \text{und} \quad nn' \equiv rr' \pmod{m}. \quad (1.6)$$

Sei $[k]$ die Restklasse $\{n \mid n \equiv k \pmod{m}\}$ aller Zahlen, die bei Division durch m denselben Rest haben wie k . Diese m Restklassen modulo m lassen sich als m Punkte auffassen, für die wegen der beiden Gleichungen in (1.6) eine Addition und eine Multiplikation wie folgt definiert werden können (Abbildung 1.5):

$$[k] + [k'] = [k + k'] \quad \text{und} \quad [k] \cdot [k'] = [kk']. \quad (1.7)$$

Das heißt, man kann für festes m bei Division durch m mit Resten rechnen.

Insbesondere gilt für jede natürliche Zahl n mit $n \equiv r \pmod{7}$, dass $10 \cdot n \equiv 3 \cdot r \pmod{7}$. Das erklärt die periodische Struktur der Reste von Zehnerpotenzen bei Division mit Rest, weil man beim Übergang von einer Zehnerpotenz zur nächsten immer nur den Rest mit 3 multiplizieren und dann den Rest bei Division durch 7 bestimmen muss:

$$\begin{array}{llll} 1 & = & 1 & \equiv_7 1 \\ 10 & = & 10 \cdot 1 & \equiv_7 3 \cdot 1 \equiv_7 3 \\ 100 & = & 10 \cdot 10 & \equiv_7 3 \cdot 3 \equiv_7 2 \\ 1000 & = & 10 \cdot 100 & \equiv_7 3 \cdot 2 \equiv_7 6 \\ 10000 & = & 10 \cdot 1000 & \equiv_7 3 \cdot 6 \equiv_7 4 \\ 100000 & = & 10 \cdot 10000 & \equiv_7 3 \cdot 4 \equiv_7 5 \\ 1000000 & = & 10 \cdot 100000 & \equiv_7 3 \cdot 5 \equiv_7 1 \end{array}$$

Ab hier wiederholen sich die Reste der Zehnerpotenzen modulo 7:

$$\begin{array}{llll} 10\,000\,000 & = & 10 \cdot 1\,000\,000 & \equiv 3 \cdot 1 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7} \\ 100\,000\,000 & = & 10 \cdot 10\,000\,000 & \equiv 3 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7} \\ & \text{etc.} & & \end{array}$$

Man schreibt jetzt eine beliebige Zahl im Zehnersystem, das heißt als gewichtete Summe von Zehnerpotenzen, zum Beispiel

$$94\,325 = 9 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1,$$

und rechnet die Reste modulo 7 aus:

$$94\,325 \pmod{7} \equiv 9 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \pmod{7}.$$

Die Zahl 94325 ist also durch 7 teilbar, weil

$$9 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 77$$

durch 7 teilbar ist.

Anders ausgedrückt, multipliziert man die Einer, Zehner, Hunderter etc. mit den Gewichten 1, 3, 2 etc., dann hat die gewichtete Quersumme denselben Rest modulo 7 wie die ursprüngliche Zahl. Damit ist man bei der oben beschriebenen gewichteten Quersummenregel angekommen.

f₁

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Abb. 1.5: Addition und Multiplikation der Restklassen modulo 7

Die beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung einer gewichteten Quersummenregel lässt sich sofort auf beliebige andere Zahlen übertragen. Für die Zahl 11 ergeben sich als Reste der Zehnerpotenzen zum Beispiel abwechselnd immer 1 und 10. Die resultierende gewichtete Quersummenregel ist also:

Gewichtete Quersummenregel für 11: Man multipliziere die

Einer, Hunderter, Zehntausender etc. mit 1,
Zehner, Tausender, Hunderttausender etc. mit 10.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man eine gewichtete Quersumme. Die Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn die gewichtete Quersumme durch 11 teilbar ist.

Die 11er-Quersummenregel lässt sich noch vereinfachen, wenn man sich klarmacht, dass 10 und -1 bei Division durch 11 denselben Rest ergeben. Damit bekommt man die alternierende Quersummenregel:

Alternierende Quersummenregel für 11: Man multipliziere die

Einer, Hunderter, Zehntausender etc. mit 1,
Zehner, Tausender, Hunderttausender etc. mit -1 .

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man die *alternierende* Quersumme. Die Zahl ist durch 11 teilbar genau dann, wenn die alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Auch die Teilbarkeitsregel für die Zahl 2 ergibt sich aus der gewichteten Quersummenregel, die die oben vorgestellte Methode für 2 liefert. Da nämlich bis auf $1 = 10^0$ alle Zehnerpotenzen durch 2 teilbar sind, sind deren Gewichte alle gleich 0. Das heißt, die gewichtete Quersumme ist genau der Einer.

Für die Zahl 4 weiß man, dass sich die Teilbarkeit einer Zahl an den letzten beiden Ziffern ablesen lässt. Unsere Methode liefert ab dem Hunderter das Gewicht 0, das heißt, in der gewichteten Quersumme kommen nur Einer und Zehner vor. Die Gewichte sind dabei 1 und 2. Die Regel aus der Schule würde man erhalten, wenn man als Gewicht für den Zehner 10 statt 2 nähme, was ja bei Division mit 4 denselben Rest liefert.

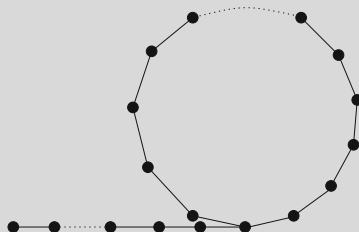
?13

Beispiel 1.5 (Teilbarkeitsregeln II)

Für eine beliebige natürliche Zahl m findet man nach Beispiel 1.4 die passende gewichtete Quersummenregel wie folgt:

- 1. Schritt:** Bestimme die Reste der 10er-Potenzen bei Division mit m . Da es nur endlich viele Reste gibt, ergibt sich nach einem endlichen „Anlauf“ eine periodische Struktur.

?14



Dass es für 7 keinen Anlauf in der periodischen Struktur gibt, liegt daran, dass 7 eine Primzahl ist und kein Teiler von 10.

?15

- 2. Schritt:** Schreibe eine Zahl n in Dezimaldarstellung, das heißt in der Form

$$n = a_j 10^j + a_{j-1} 10^{j-1} + \dots + a_1 10 + a_0,$$

und berechne den Rest von n bei Division durch m über die Reste der $a_0, a_1, \dots, a_j$, gewichtet mit den Resten der $1, 10, \dots, 10^j$.

Wendet man das in Beispiel 1.5 beschriebene Verfahren auf die Zahlen 5, 8 und 9 an, findet man ohne Probleme auch die üblichen Teilbarkeitsregeln für

?16

- 5 (letzte Ziffer),
- 8 (letzten drei Ziffern),
- 9 (Quersumme).

Auf die gleiche Weise erhält man auch solche Teilbarkeitsregeln für jede andere Zahl.

Die Diskussion von Teilbarkeitsregeln hat auf neue Strukturen geführt, nämlich die Restklassen modulo m zusammen mit ihren Additionen und Multiplikationen. Die Eigenschaften dieser Strukturen erlaubten es, das Ausgangsproblem und weitreichende Verallgemeinerungen davon zu lösen. Außerdem helfen sie, die unterschiedlichen Teilbarkeitsregeln als verschiedene Ausprägungen ein und desselben Prinzips zu verstehen. Man nennt diese Art von Struktur, die aus einer *Menge*, das heißt einer Ansammlung von verschiedenen Objekten, und *Verknüpfungen* wie $\cdot$ oder $+$ darauf besteht, eine *algebraische Struktur*. Je nach Anzahl der Verknüpfungen und ihren spezifischen Eigenschaften bekommen die algebraischen Strukturen unterschiedliche Namen wie beispielsweise *Gruppen*, *Ringe* und *Körper*. Man sollte nicht

versuchen, aus diesen Namen Eigenschaften der Strukturen abzulesen, die Namensgebung entspringt oft einer spontanen Laune der Namensgeber und spiegelt manchmal auch nur deren Humor wider. Die Restklassen sind Beispiele für Ringe, ebenso wie die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit ihrer Addition und ihrer Multiplikation (siehe Beispiel 2.9).

Lesen des Textes mit Papier und Stift

?₁

Stolperstein: „Dezimaldarstellung“

Frage: Warum steht hier das Wort „Dezimaldarstellung“? Ist das etwas anderes als die Zahl an sich?

Ach so: (nachgeschlagen) „Dezi“ bedeutet 10, und unsere Zahlen sind ja im 10er-System dargestellt:

$$\text{zum Beispiel } 874 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

?₂

Stolperstein: Die Regel an sich: Man betrachtet die letzten beiden Ziffern und fragt sich, ob diese jeweils durch 4 teilbar sind.

Komisch: $4 \mid 152$, aber $4 \nmid 5$ und $4 \nmid 2$.

Frage: Wie lautet die Regel korrekt?

Ach so: (nachgeschlagen) Wir betrachten die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern gebildet wird.

Unser Beispiel: $4 \mid 52 \Rightarrow 4 \mid 152$.

?₃

Stolperstein: „Quersumme“

Frage: Was ist eine Quersumme?

Ach so: zum Beispiel $853 \rightsquigarrow$ Quersumme: $8 + 5 + 3 = 16$

?₄

Stolperstein: verstehen, warum die Regel gilt

Frage: Warum ist „Teilen mit Rest“ ein Schlüssel zu den Teilbarkeitsregeln?

... **zunächst:** weiterlesen ... $\rightsquigarrow$ aha: $!_1$

?5

Stolperstein: Idee, Ansatz**Frage:** Wieso funktioniert das? woher kommt das?... **zunächst:** weiterlesen ... $\rightsquigarrow$ aha: !₁

?6

Stolperstein: Ich muss ein Beispiel rechnen.**Ach so:** (mit Taschenrechner: $7 \mid 59934$)

Gewichtete Quersumme von 59934:

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 105$$

Es gilt: $7 \mid 105 = 70 + 35 \Rightarrow 7 \mid 59934$.

?7

Stolperstein: Abbildung 1.4**Frage:** Wie ist die Tabelle zu lesen?

Ach so: Mit obigem Text liegen die Zahlen in einer Klasse, die beim Teilen durch 7 denselben Rest haben. Zum Beispiel sind dann 1, 8, 15, 22 in einer Klasse, weil sie Rest 1 hinterlassen, und stehen deshalb in derselben Spalte.

?8

Stolperstein: „Struktur“

Frage: Was ist mit dem Begriff „Struktur“ gemeint? Addition und Multiplikation oder diese periodische Struktur oder etwas ganz anderes?

... **zunächst:** weiterlesen ...

?9

Stolperstein: Ich muss Beispiele rechnen.**Ach so:**

$$(1) \underbrace{-87}_n = k \cdot \underbrace{9}_m + r$$

finde: $k = -10, r = 3 \rightsquigarrow -87 = -10 \cdot 9 + 3$

$$(2) \underbrace{56}_n = k \cdot \underbrace{6}_m + r$$

finde: $k = 9, r = 2 \rightsquigarrow 56 = 9 \cdot 6 + 2$

?10

Stolperstein: Ich muss ein Beispiel aufschreiben.**Ach so:** Für Stolperstein $?_9(2)$ gilt: $56 \equiv 2 \pmod{6}$ bzw. $56 \equiv_6 2$.

?11

Stolperstein: $[k]$ ist die Restklasse $\{n \equiv k \pmod{m}\}$.**Frage:** Was bedeutet diese Notation?**Ach so:** zum Beispiel $m = 4$ Dann: $[k] = \{n \equiv k \pmod{4}\}$ Also z.B. für $k = 1$:

$$\begin{aligned}
 [1] &= \{n \equiv 1 \pmod{4}\} \\
 &= \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\}
 \end{aligned}$$

?12

Stolperstein: Für jede natürliche Zahl n mit $n \equiv r \pmod{7}$ gilt $10 \cdot n \equiv 3 \cdot r \pmod{7}$.**Frage:** Warum gilt das?**Ach so:**

$$\begin{aligned}
 [10 \cdot n]_7 &= [10]_7 \cdot [n]_7 \\
 &= [3]_7 \cdot [r]_7 \\
 &= [3 \cdot r]_7
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot n \equiv 3 \cdot r \pmod{7}$$

?13

Stolperstein: Dazu brauche ich Zettel und Stift.**Ach so:**

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 && \equiv_4 1 \\
 10 &= 10 \cdot 1 && \equiv_4 2 \equiv_4 10 \\
 100 &= 10 \cdot 10 && \equiv_4 0 \\
 1000 &= 10 \cdot 100 && \equiv_4 0
 \end{aligned}$$

Beispiel: Für 8132 ist die gewichtete Quersumme $0 \cdot 8 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 8$.Die letzten beiden Ziffern liefern $32 = 10 \cdot 3 + 1 \cdot 2$.Unterschied: $(10 - 2) \cdot 3 \equiv_4 0$

?14

Stolperstein: „endlicher Anlauf“**Frage:** Wie ist das mit dem endlichen Anlauf zu verstehen?

Ach so: Beispiel: Für Teilbarkeit durch 4 besteht der „endliche Anlauf“ aus den Gewichten 1 und 2 (für Einer und Zehner) und die periodische Struktur aus den sich stets wiederholenden Nullen als Gewicht.

?15

Stolperstein: endlicher Anlauf bei Primzahlen

Frage: Warum existiert kein endlicher Anlauf bei Primzahlen, die keine Teiler von 10 sind?

... **zunächst:** weiterlesen ...

?16

Stolperstein: Dazu brauche ich Zettel und Stift.**Ach so:**

$$\begin{array}{ll}
 1 = 1 & \equiv_5 1 \\
 10 = 10 \cdot 1 & \equiv_5 0 \\
 100 = 10 \cdot 10 & \equiv_5 0 \\
 1000 = 10 \cdot 100 & \equiv_5 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 1 = 1 & \equiv_9 1 \\
 10 = 10 \cdot 1 & \equiv_9 1 \\
 100 = 10 \cdot 10 & \equiv_9 1 \\
 1000 = 10 \cdot 100 & \equiv_9 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 1 = 1 & \equiv_8 1 \\
 10 = 10 \cdot 1 & \equiv_8 2 \equiv_8 10 \\
 100 = 10 \cdot 10 & \equiv_8 4 \equiv_8 100 \\
 1000 = 10 \cdot 100 & \equiv_8 0
 \end{array}$$

Wir bemerken, dass die Fragen zu Stolperstein ?₈ und ?₁₅ offengeblieben sind. Das heißt nicht, dass man sie nicht beantworten kann. Aber in beiden Fällen wird sich die Antwort sehr viel leichter anhand späterer Beispieltexthe ergeben. Daher der Rat, zunächst weiterzulesen. Auf jeden Fall sollte man die offengebliebenen Fragen notieren und letztendlich dem Dozenten stellen, wenn man selbst zu keiner Antwort gelangt.²

² Im vorliegenden Buch findet man Antworten zu ?₈ in den Kapiteln 7 bis 9. Eine Antwort zu ?₁₅ ergibt sich aus Übung 5.15.

Erläuterungen zum Text

Bemerkung 2.1 (Notation bei Restklassen)

Will man die Menge der Restklassen modulo k mit $k \in \mathbb{Z}$ ausdrücken, so findet man verschiedene gleichberechtigte Schreibweisen. Ist einem dies nicht bewusst, können hierdurch schnell Verwirrungen entstehen.

Die gebräuchliche Notation ist $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (*sprich*: „zett modulo ka zett“). Der Einfachheit halber wird manchmal auch $\mathbb{Z}_k$ oder Z_k geschrieben.

Einzelne Restklassen werden in diesem Buch für gewöhnlich mit eckigen Klammern bezeichnet. Ist nicht klar, bezüglich welcher Zahl die Reste gebildet werden, so kann dies noch als Index geschrieben werden. Ein Beispiel ist $[a]_4 = [a] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Alternative übliche Notationen sind $\bar{a}$ oder einfach nur a , wenn klar ist, dass es sich um eine Restklasse handelt.

Beispiel 2.2 (Division mit Rest)

Die Division mit Rest kennt man aus der Grundschule als Teil des *schriftlichen Dividierens*. Zum Beispiel findet man $123 : 5 = 24$ Rest 3 via

$$\begin{array}{r} 123 : 5 = 24 \\ \underline{10} \\ 23 \\ \underline{20} \\ 3. \end{array}$$

□

Beispiel 2.3 (Teilbarkeit durch 7)

Ein ganze Zahl n ist durch 7 teilbar, wenn es eine ganze Zahl k mit $n = k \cdot 7$ gibt. So ist zum Beispiel $21 = 3 \cdot 7$ durch 7 teilbar, nicht aber $22 = 3 \cdot 7 + 1$. Unter Zuhilfenahme der Division mit Rest kann man alternativ sagen: Eine ganze Zahl n ist durch 7 teilbar, wenn bei Division durch 7 mit Rest der Wert 0 als Rest herauskommt.

Die Zahlen $\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots$ sind alle Elemente und damit *Repräsentanten* der Restklasse $[0]$ von 0 modulo 7. Analog sind $\dots, -13, -6, 1, 8, 15, \dots$ alle Elemente und damit *Repräsentanten* der Restklasse $[1]$ von 1 modulo 7.

Die Aussage $n \equiv m \pmod{7}$ lässt sich auf verschiedene Weise ausdrücken:

- Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \cdot 7 = n - m$.
- Bei Division durch 7 haben n und m denselben Rest.
- Bezeichne $[n]$ die Restklasse von n modulo 7. Dann gilt: $[n] = [m]$.
- Die beiden ganzen Zahlen n und m liegen in derselben Restklasse modulo 7.

Die Berechnung der Reste von Zehnerpotenzen bei Division durch 7 ist nach sieben Schritten komplett, weil die Multiplikation von Repräsentanten zweier Restklassen immer Repräsentanten derselben Restklasse liefert. Zum Beispiel gilt:

$$[100] = [10 \cdot 10] = [3 \cdot 3] = [9] = [2].$$

Das erlaubt die Definition einer Multiplikation von Restklassen durch $[n] \cdot [n'] := [nn']$. Damit gilt für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, dass

$$[10^k] = [10 \cdot 10^{k-1}] = [3] \cdot [10^{k-1}].$$

Man kann die Restklassen der Zehnerpotenzen also iterativ berechnen, indem man in jedem Schritt mit der Restklasse $[3]$ multipliziert. Als Ergebnis erhält man

$$[1] \rightsquigarrow [3 \cdot 1] = [3] \rightsquigarrow [3 \cdot 3] = [2] \rightsquigarrow [3 \cdot 2] = [6] \rightsquigarrow [3 \cdot 6] = [4] \rightsquigarrow [3 \cdot 4] = [5] \rightsquigarrow [3 \cdot 5] = [1].$$

Dann muss sich die Folge wiederholen, weil dieselbe Operation auf dieselben Elemente angewendet wird.

Da auch die Addition von Repräsentanten zweier Restklassen immer Repräsentanten derselben Restklasse liefert, kann man durch $[n] + [n'] := [n + n']$ eine Addition von Restklassen definieren. Mithilfe von Addition und Multiplikation von Restklassen lässt sich die Überprüfung der Teilbarkeit von 94325 auf Teilbarkeit durch 7 wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} [94325] &= [9 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0] \\ &= [9 \cdot 10^4] + [4 \cdot 10^3] + [3 \cdot 10^2] + [2 \cdot 10^1] + [5 \cdot 10^0] \\ &= [9] \cdot [10^4] + [4] \cdot [10^3] + [3] \cdot [10^2] + [2] \cdot [10^1] + [5] \cdot [10^0] \\ &= [9] \cdot [4] + [4] \cdot [6] + [3] \cdot [2] + [2] \cdot [3] + [5] \cdot [1] \\ &= [9 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1] \\ &= [77] = [0]. \end{aligned}$$

□

2.2 Übung und Selbstkontrolle

Spezielle Schnittstellenübungen

Übung 2.4 (Restklassen und Uhrzeit)

Eckbert Birnschein ist mit vielen guten Vorsätzen ins neue Jahr gestartet. Er besitzt einen Stundenzähler, mit dem er die Stunden seit Jahresbeginn aufwärts zählt. Eifrig kontrolliert er mehrmals täglich, wie lange er seine Vorsätze schon durchhält.

- (i) Welche Stunde würde Eckbert auf seiner gewöhnlichen digitalen Uhr, die im 24-Stunden-Modus die Uhrzeit anzeigt, ablesen, wenn der Stundenzähler

(a) 4713 h, (b) 837 h, (c) 262 h, (d) 52 h

anzeigt?

- (ii) Geben Sie die Mengen $M_t, t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ aller Zeiten auf Eckberts Stundenzähler an, die zur digitalen Stundenanzeige t führen.

Hinweis: Beispieltex, S. 18, Abbildung 1.4.

- (iii) Beschreiben Sie nun in mathematischen Symbolen die Menge M_t aller Zeiten auf Eckberts Stundenzähler, die zur allgemeinen digitalen Stundenangabe t führen.

Achtung: An dieser Stelle ist nach einer allgemeinen Symbolik gefragt, nicht nach Beispielen.

Übung 2.5 (Gerade und ungerade Zahlen)

In der Grundschule wird das Konzept der geraden und ungeraden Zahlen eingeführt.

- (i) Beschreiben Sie in mathematischen Symbolen zum einen die Menge aller geraden und zum anderen die Menge aller ungeraden ganzen Zahlen.
- (ii) Welchen Zusammenhang zwischen den ungeraden und geraden Zahlen und dem Begriff „Restklasse“ erkennen Sie?
- (iii) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in mathematischen Symbolen :
- (a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer eine gerade Zahl.
- (b) Addiert man eine gerade und eine ungerade Zahl, so erhält man eine ungerade Zahl.
- (c) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
- (d) Multipliziert man eine gerade Zahl mit einer beliebigen anderen Zahl, so ist das Produkt gerade.

- (iv) Beweisen Sie die Aussagen aus (iii).

Hinweis: Beispieltex, S. 18, Beispiel 1.4.

Übung 2.6 (Teilbarkeitsregeln)

- (i) Nennen Sie Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 4 und 5.
- (ii) Formulieren Sie die Regeln aus (i) als „gewichtete Quersummenregel“.
- (iii) Wie lautet eine Teilbarkeitsregel für 13? Bitte begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Hinweis:* Konstruieren Sie systematisch eine „gewichtete Quersummenregel“.
- (iv) Überprüfen Sie mithilfe von (iii), ob die Zahlen 59527 und 74754 durch 13 teilbar sind.

Übung 2.7 (Teilbarkeitsregeln)

- (i) Nennen Sie Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch 6, 8, 9 und 10.
- (ii) Geben Sie für 6, 8, 9 und 10 gewichtete Quersummenregeln gemäß dem Schema aus dem Beispieltext (S. 18, Beispiel 1.4) an.
- (iii) Wie lautet eine Teilbarkeitsregel für 17? Bitte begründen Sie Ihr Ergebnis.
Hinweis: Konstruieren Sie systematisch eine „gewichtete Quersummenregel“.
- (iv) Überprüfen Sie mithilfe von (iii), ob die Zahlen 59527 und 716618 durch 17 teilbar sind.

Vertiefende Übungen**Übung 2.8 (Rechnen mit Restklassen modulo 4)**

Anmerkung: In dieser Aufgabe werden mit $[\dots]$ Restklassen modulo 4 bezeichnet. Wir definieren also der Einfachheit halber $[\dots] := [\dots]_4$.

- (i) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Nach dem Beispieltext (S. 18, Beispiel 1.4) wissen wir, dass es eine Zahl $0 \leq r < 4$ gibt, sodass man n durch 4 mit Rest r teilen kann – in Formeln:

Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < 4$, sodass gilt: $n = k \cdot 4 + r$.

Formulieren Sie auf Grundlage dieser Definition von *Teilen mit Rest* eine Definition für Teilbarkeit durch 4 mit Rest r im Sinne von:

Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch 4 mit Rest $r \in \mathbb{N}$ ($0 \leq r < 4$) teilbar, wenn es ...

- (ii) Im Beispieltext (S. 18, Beispiel 1.4) finden wir eine Möglichkeit, die Addition und Multiplikation von Restklassen durch die Addition und Multiplikation ihrer Repräsentanten zu definieren:

$$[a] + [b] = [a + b] \text{ und } [a] \cdot [b] = [a \cdot b], \quad a, b \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Wir wollen dies zunächst an einem Beispiel verdeutlichen und betrachten 1 und 9 aus der Restklasse $[1]$ sowie 3 und 7 aus der Restklasse $[3]$. Dementsprechend gilt $[1] = [9]$ und $[3] = [7]$. Eine sinnvolle Addition von Restklassen müsste $[1] + [3] = [9] + [7]$ ergeben. Dies ist wegen

$$[1] + [3] \stackrel{(*)}{=} [1 + 3] = [4] = [16] = [9 + 7] \stackrel{(*)}{=} [9] + [7]$$

auch der Fall. Überlegen Sie sich mindestens zwei weitere solcher Zahlenbeispiele.

- (iii) An dieser Stelle haben wir noch nicht begründet, dass wir nicht doch Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $[a] = [b]$ und $[c] = [d]$ finden könnten, für die gilt:

$$[a] + [c] = [23] \quad \text{und} \quad [b] + [d] = [42].$$

Wegen $[23] = [3] \neq [2] = [42]$ wäre die Sinnhaftigkeit der Definition der Addition (im Sinne von $(*)$) von Restklassen infrage gestellt.

Nun gilt es also zu zeigen, dass dieses Problem für allgemeine Restklassen modulo 4 nicht auftreten kann. Dazu seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit $[a_1] = [a_2]$ und $[b_1] = [b_2]$. Zeigen Sie, dass dann $a_1 + b_1$ und $a_2 + b_2$ in derselben Restklasse modulo 4 liegen, dass also gilt:

$$[a_1 + b_1] = [a_2 + b_2].$$

Hinweis: Formulieren Sie zunächst das Problem mithilfe der in (i) entwickelten Definition von Teilbarkeit mit Rest.

Übung 2.9 (Rechnen mit Restklassen modulo 4)

Wir betrachten die Restklassen modulo 4.

- (i) Teilen Sie analog zu Abbildung 1.4 im Beispieltext (S. 18) die ganzen Zahlen in Restklassen modulo 4 auf.
- (ii) Beschreiben Sie die in (i) gefundenen Restklassen in mathematischen Symbolen unter Verwendung von Mengen $M_i, i \in \{1, \dots, 4\}$, wobei M_i je eine Restklasse präsentiert.
- (iii) Erstellen Sie analog zu Abbildung 1.5 im Beispieltext (S. 20) je eine Additions- bzw. Multiplikationstabelle der Restklassen modulo 4.

Übung 2.10 (Rechnen mit Restklassen)

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Anmerkung: In dieser Aufgabe werden mit $[\dots]$ Restklassen modulo m bezeichnet. Wir definieren also der Einfachheit halber $[\dots] := [\dots]_m$.

- (i) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Aus Beispiel 1.4 im Beispieltext (S. 18) wissen wir, dass es eine Zahl $0 \leq r < m$ gibt, sodass man n durch m mit Rest r teilen kann – in Formeln:

Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < m$, sodass gilt: $n = k \cdot m + r$.

Formulieren Sie auf Grundlage dieser Definition von *Teilen mit Rest* eine Definition für Teilbarkeit durch m mit Rest r im Sinne von:

Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann durch m mit Rest $r \in \mathbb{N}$ ($0 \leq r < m$) teilbar, wenn es ...

- (ii) Wir wollen an dieser Stelle allgemein beweisen, dass die in Beispiel 1.4 im Beispieltext (S. 18) eingeführte Addition und Multiplikation für unser beliebiges m im Sinne von Übung 2.8(ii) und (iii) vernünftig ist.

Zeigen Sie: Für Restklassen $[a], [a'], [b], [b']$ mit $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ gilt:

$$\begin{aligned}[a + b] &= [a' + b'], \\ [a \cdot b] &= [a' \cdot b'] .\end{aligned}$$

Hinweis: Gehen Sie analog zu Übung 2.8(iii) vor.

Übung 2.11 (Multiplikationstabellen)

Stellen Sie die Multiplikationstabellen für die Restklassen modulo 11 und 12 auf.

Übung 2.12 (Teilbarkeit durch 12)

Für wie viele der Zahlen $n \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ ist die Zahl $10^n + n$ durch 12 teilbar?

Übung 2.13 (Teilbarkeitsregel für 11)

Zeigen Sie: Eine im Dezimalsystem als $\sum_{j=0}^N a_j \cdot 10^j$ mit $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ dargestellte Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $\sum_{j=0}^N (-1)^j a_j$ durch 11 teilbar ist.

Übung 2.14 (Reste modulo 10)

Bestimmen Sie die Endziffer von

$$9999 \left(\begin{matrix} 9999 \\ 9999 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 9999 \\ 9999 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 9999 \\ 9999 \end{matrix} \right) \right) \right) .$$

Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Betrachten Sie die Endziffer von Produkten von Faktoren mit Endziffer 9.

Übung 2.15 (Teilbarkeit)

Sei $M \subset \mathbb{Z}$ eine Teilmenge mit acht Elementen. Zeigen Sie, dass Sie $a, b \in M$ finden können, sodass $a - b$ durch 7 teilbar ist. Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor:

1. Verifizieren Sie die Aussage für ein selbstgewähltes Beispiel.
2. Zeigen Sie, dass die obige Aussage für eine entsprechende beliebige Menge M gültig ist.

Kontrollfragen

Die Lösungen zu den folgenden Fragen finden Sie auf S. 380.

Frage 2.16 (Multiple Choice)

Seien $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Was beschreibt die Restklasse $[5]$ modulo 3?

- ☐ Diese Menge kann es gar nicht geben, da es bei Division durch 3 nur drei Restklassen gibt.
- ☐ Die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 5 haben.
- ☐ Die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 haben.
- ☐ Die Menge aller Zahlen, die durch 5 teilbar sind.
- ☐ Die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 3 denselben Rest haben wie 5 bei Division durch 3.
- ☐ Die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 3 denselben Rest haben wie 2 bei Division durch 3.
- ☐ $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ ist äquivalent zu } 5 \pmod{3}\}$

Frage 2.17 (Multiple Choice)

Sei $[3]$ modulo 4 die Restklasse aller Zahlen, die bei Division durch 4 denselben Rest wie 3 ergeben. Welche der folgenden Zahlen liegt in $[3]$?

- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 11
- ☐ 12
- ☐ -1
- ☐ -3

Frage 2.18 (Multiple Choice)

Wie viele $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq b < a$ gibt es, sodass $5 - b = 3a$ gilt?

- ☐ gar keine
- ☐ genau ein a und genau ein b
- ☐ unendlich viele a, b
- ☐ Es gibt solche a und b , aber über die Anzahl kann man keine Aussage treffen .

Frage 2.19 (Single Choice)

Seien $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Gibt es immer $a, b \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $0 \leq b < a$, sodass $n - b = a \cdot m$ gilt?

- ☐ ja
- ☐ nein

Frage 2.20 (Multiple Choice)

Seien $n, b \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten die Restklasse $[k]$ modulo m . Welche Zahl ist immer in $[k]$?

- ☐ $k + k$
☐ n mit: Es gibt ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $n - k = b \cdot m$.
☐ 0
☐ $42m + k$

Frage 2.21 (Multiple Choice)

Wir kennen nur die letzten drei Ziffern einer Zahl $n \in \mathbb{N}$. Für welche der unten stehenden t können wir entscheiden, ob n durch t teilbar ist oder nicht?

- ☐ $t = 3$
☐ $t = 5$
☐ $t = 12$
☐ $t = 40$

2.3 Weitere Beispiele

Direkte Anwendungen von Definitionen und Sätzen

Beispiel 2.22 (Teilbarkeit durch 2)

Die ganzen Zahlen lassen sich wie folgt in Restklassen modulo 2 aufteilen. Dabei bildet jede Spalte eine Restklasse:

$\vdots$	$\vdots$
$-4 = 2 \cdot (-2) + 0$	$-3 = 2 \cdot (-2) + 1$
$-2 = 2 \cdot (-1) + 0$	$-1 = 2 \cdot (-1) + 1$
$0 = 2 \cdot 0 + 0$	$1 = 2 \cdot 0 + 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$	$3 = 2 \cdot 1 + 1$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$	$5 = 2 \cdot 2 + 1$
$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 2. Die Restklasse $[0]$ von 0 ist die Menge aller geraden Zahlen, und die Restklasse $[1]$ von 1 besteht aus allen ungeraden Zahlen.

$+$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ sind durch 2 teilbar:

$$10^k = 2 \cdot (5 \cdot 10^{k-1}).$$

Als Rest bekommt man bei Division durch 2 also für 10, 100, 1 000, ... immer 0. Weil die Multiplikation mit der Restklasse [10] dasselbe ist wie die Multiplikation mit der Restklasse [0], kann man das auch einsehen, indem man wiederholt mit der Restklasse [10] multipliziert. Als gewichtete Quersummenregel erhält man:

Gewichtete Quersummenregel für 2: Man multipliziere die

- Einer mit 1,
- Zehner mit 0,
- Hunderter mit 0,
- Tausender mit 0 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade den Einer. Die Zahl ist durch 2 genau dann teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, das heißt der Einer, durch 2 teilbar ist.

□

Beispiel 2.23 (Teilbarkeit durch 3)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 3 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-6 = 3 \cdot (-2) + 0$	$-5 = 3 \cdot (-2) + 1$	$-4 = 3 \cdot (-2) + 2$
$-3 = 3 \cdot (-1) + 0$	$-2 = 3 \cdot (-1) + 1$	$-1 = 3 \cdot (-1) + 2$
$0 = 3 \cdot 0 + 0$	$1 = 3 \cdot 0 + 1$	$2 = 3 \cdot 0 + 2$
$3 = 3 \cdot 1 + 0$	$4 = 3 \cdot 1 + 1$	$5 = 3 \cdot 1 + 2$
$6 = 3 \cdot 2 + 0$	$7 = 3 \cdot 2 + 1$	$8 = 3 \cdot 2 + 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 3:

$+$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ liefern bei Division durch 3 den Rest 1. Dies ist eine Konsequenz der Beobachtung, dass die Multiplikation mit der

Restklasse $[10]$ dasselbe ist wie die Multiplikation mit der Restklasse $[1]$. Man kann aber auch direkt

$$10^k = 9 \cdot (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1$$

schreiben. Als gewichtete Quersummenregel bekommt man:

Gewichtete Quersummenregel für 3: Man multipliziere die

Einer mit 1,
Zehner mit 1,
Hunderter mit 1,
Tausender mit 1 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade die normale Quersumme. Die Zahl ist durch 3 teilbar genau dann, wenn die Quersumme durch 3 teilbar ist.

□

Beispiel 2.24 (Teilbarkeit durch 4)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 4 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-8 = 4 \cdot (-2) + 0$	$-7 = 4 \cdot (-2) + 1$	$-6 = 4 \cdot (-2) + 2$	$-5 = 4 \cdot (-2) + 3$
$-4 = 4 \cdot (-1) + 0$	$-3 = 4 \cdot (-1) + 1$	$-2 = 4 \cdot (-1) + 2$	$-1 = 4 \cdot (-1) + 3$
$0 = 4 \cdot 0 + 0$	$1 = 4 \cdot 0 + 1$	$2 = 4 \cdot 0 + 2$	$3 = 4 \cdot 0 + 3$
$4 = 4 \cdot 1 + 0$	$5 = 4 \cdot 1 + 1$	$6 = 4 \cdot 1 + 2$	$7 = 4 \cdot 1 + 3$
$8 = 4 \cdot 2 + 0$	$9 = 4 \cdot 2 + 1$	$10 = 4 \cdot 2 + 2$	$11 = 4 \cdot 2 + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 4:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[0]$	$[2]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 2, 3, 4, \dots$ sind durch 4 teilbar:

$$10^k = 4 \cdot (25 \cdot 10^{k-2}).$$

Als Rest bekommt man bei Division durch 4 also für 100, 1 000, 10 000, ... immer 0. Man kann das auch einsehen, indem man wiederholt mit der Restklasse $[10] = [2]$ multipliziert und feststellt, dass $[2] \cdot [2] = [0]$ gilt. Wegen $10 = 8 + 2$ erhält man als gewichtete Quersummenregel daher:

Gewichtete Quersummenregel für 4: Man multipliziere die

- Einer mit 1,
- Zehner mit 2,
- Hunderter mit 0,
- Tausender mit 0,
- Zehntausender mit 0 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade den Einer plus zweimal den Zehner. Die Zahl ist durch 4 genau dann teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, das heißt der Einer plus zweimal der Zehner, durch 4 teilbar ist.

Wendet man dieses Kriterium auf die Zahl an, die durch die letzten beiden Ziffern (Einer und Zehner) gegeben ist, dann ergibt sich dieselbe gewichtete Quersumme. Also ist die Zahl genau dann durch 4 teilbar, wenn die Zahl, die durch die letzten beiden Ziffern (Einer und Zehner) gegeben ist, durch 4 teilbar ist. □

Beispiel 2.25 (Teilbarkeit durch 5)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 5 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-10	-9	-8	-7	-6
-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 5:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[1]$	$[3]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[1]$	$[4]$	$[2]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ sind durch 5 teilbar:

$$10^k = 5 \cdot (2 \cdot 10^{k-1}).$$

Als Rest bekommt man bei Division durch 5 also für 10, 100, 1 000, ... immer 0. Als gewichtete Quersummenregel erhält man daher:

Gewichtete Quersummenregel für 5: Man multipliziere die

Einer mit 1,
Zehner mit 0,
Hunderter mit 0,
Tausender mit 0 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade den Einer. Die Zahl ist durch 5 genau dann teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, das heißt der Einer durch 5 teilbar, also 0 oder 5 ist.

□

Beispiel 2.26 (Teilbarkeit durch 6)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 6 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−12	−11	−10	−9	−8	−7
−6	−5	−4	−3	−2	−1
0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 6:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ liefern bei Division durch 6 den Rest 4, denn $10 = 6 + 4$ und für $k > 1$ gilt:

$$10^k = 9 \cdot (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10) + 10 = 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (10^{k-2} + 10^{k-3} + \dots + 1) + 10.$$

Einfacher sieht man das, indem man wiederholt mit $[10] = [4]$ multipliziert und feststellt, dass $[4] \cdot [4] = [4]$ gilt. Als gewichtete Quersummenregel bekommt man:

Gewichtete Quersummenregel für 6: Man multipliziere die

Einer mit 1,
Zehner mit 4,
Hunderter mit 4,
Tausender mit 4, etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade das Vierfache der normalen Quersumme minus dreimal den Einer. Die Zahl ist durch 6 genau dann teilbar, wenn die gewichtete Quersumme durch 6 teilbar ist.

Wenn die Zahl n durch 6 teilbar, das heißt von der Form $n = 6 \cdot m = 2 \cdot 3 \cdot m$, ist, dann ist sie auch durch 2 und 3 teilbar. Nach Beispiel 2.22 ist der Einer durch 2 teilbar. Also ist dreimal der Einer durch 6 teilbar. Damit ist die gewichtete Quersumme genau dann durch 6 teilbar, wenn das Vierfache der normalen Quersumme durch 6 teilbar ist. Das heißt, wenn n durch 6 teilbar ist, ist der Einer gerade und das Vierfache der normalen Quersumme durch 6 teilbar.

Sei umgekehrt der Einer gerade und das Vierfache der normalen Quersumme durch 6 teilbar. Dann ist die gewichtete Quersumme, also auch n , durch 6 teilbar.

Da das Vierfache einer Zahl m genau dann durch 6 teilbar ist, wenn das Zweifache dieser Zahl durch 3 teilbar ist ($2 \cdot 2 \cdot m = 4 \cdot m = 6 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot k$), ist jetzt folgendes Kriterium gezeigt: Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn die letzte Ziffer gerade und das Doppelte der Quersumme durch 3 teilbar ist.

Man kann zeigen, dass man auf die Verdoppelung der Quersumme verzichten kann, und bekommt so heraus, dass eine Zahl genau dann durch 6 teilbar ist, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. Aber um das zu beweisen, muss man zeigen, dass für eine Zahl der Form $2 \cdot m$, die durch 3 teilbar ist, schon gelten muss, dass m durch 3 teilbar ist. Das kann man machen, indem man m durch 3 teilt, und schaut, welcher Rest dabei herauskommen kann. Denkbar sind die Reste 0 (wenn m durch 3 teilbar ist), 1 und 2.

Wäre $m = 3 \cdot k + 1$, so hätte man $2 \cdot m = 6 \cdot k + 2$, das heißt, $2 = 2 \cdot m - 6 \cdot k$ wäre durch 3 teilbar, was nicht der Fall ist.

Wäre $m = 3 \cdot k + 2$, so hätte man $2 \cdot m = 6 \cdot k + 2$, das heißt, $2 = 2 \cdot m - 3 \cdot 2 \cdot k$ wäre durch 3 teilbar, was ebenfalls nicht der Fall ist.

Damit bleibt nur der Rest 0 übrig, das heißt, m ist durch 3 teilbar. $\square$

Beispiel 2.27 (Teilbarkeit durch 8)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 8 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 8:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[7]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]

$\cdot$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[0]	[2]	[4]	[6]
[3]	[0]	[3]	[6]	[1]	[4]	[7]	[2]	[5]
[4]	[0]	[4]	[0]	[4]	[0]	[4]	[0]	[4]
[5]	[0]	[5]	[2]	[7]	[4]	[1]	[6]	[3]
[6]	[0]	[6]	[4]	[2]	[0]	[6]	[4]	[2]
[7]	[0]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 3, 4, 5, \dots$ sind durch 8 teilbar:

$$10^k = 8 \cdot (125 \cdot 10^{k-3}).$$

Als Rest bekommt man bei Division durch 8 also für 1000, 10 000, 100 000, ... immer 0. Wegen $10 = 8 + 2$ und $100 = 8 \cdot 12 + 4$ erhält man als gewichtete Quersummenregel daher (man kann das auch einsehen, indem man wiederholt mit der Restklasse $[10] = [2]$ multipliziert und feststellt, dass $[2] \cdot [2] \cdot [2] = [0]$ gilt):

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 9:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[1]	[3]	[5]	[7]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]	[0]	[3]	[6]
[4]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]	[4]	[8]	[3]	[7]	[2]	[6]	[1]	[5]
[5]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[5]	[1]	[6]	[2]	[7]	[2]	[8]	[4]
[6]	[6]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[6]	[3]	[0]	[6]	[2]	[0]	[6]	[3]
[7]	[7]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[7]	[5]	[3]	[1]	[8]	[6]	[4]	[2]
[8]	[8]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[0]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ liefern bei Division durch 9 den Rest 1. Dies ist eine Konsequenz der Beobachtung, dass die Multiplikation mit der Restklasse [10] dasselbe ist wie die Multiplikation mit der Restklasse [1]. Man kann aber auch direkt

$$10^k = 9 \cdot (10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1$$

schreiben. Als gewichtete Quersummenregel bekommt man:

Gewichtete Quersummenregel für 9: Man multipliziere die

Einer mit 1,
Zehner mit 1,
Hunderter mit 1,
Tausender mit 1 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade die normale Quersumme. Die Zahl ist durch 9 teilbar genau dann, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.

□

Beispiel 2.29 (Teilbarkeit durch 10)

Die Einteilung der ganzen Zahlen in Restklassen modulo 10 stellt sich wie folgt dar (jede Spalte bildet eine Restklasse):

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die beiden folgenden Tabellen beschreiben die Addition und die Multiplikation auf der Menge der Restklassen modulo 10:

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[7]	[7]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[8]	[8]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[9]	[9]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[8]	[0]	[2]	[4]	[8]	[8]
[3]	[0]	[3]	[6]	[9]	[2]	[5]	[8]	[1]	[4]	[7]
[4]	[0]	[4]	[8]	[2]	[6]	[0]	[4]	[8]	[2]	[6]
[5]	[0]	[5]	[0]	[5]	[0]	[5]	[0]	[5]	[0]	[5]
[6]	[0]	[6]	[2]	[8]	[4]	[0]	[6]	[2]	[8]	[4]
[7]	[0]	[7]	[4]	[1]	[8]	[5]	[2]	[9]	[6]	[3]
[8]	[0]	[8]	[6]	[4]	[2]	[0]	[8]	[6]	[4]	[2]
[9]	[0]	[9]	[8]	[7]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Alle Zehnerpotenzen 10^k mit $k = 1, 2, 3, \dots$ sind durch 10 teilbar. Als gewichtete Quersummenregel bekommt man daher:

Gewichtete Quersummenregel für 10: Man multipliziere die

- Einer mit 1,
- Zehner mit 0,
- Hunderter mit 0,
- Tausender mit 0 etc.

Durch Aufaddieren der Ergebnisse erhält man als gewichtete Quersumme gerade den Einer. Die Zahl ist durch 10 genau dann teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, das heißt der Einer, durch 10 teilbar ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn der Einer 0 ist.

□

Beispiel 2.30 (Potenzen)

Können Sie in den folgenden Aussagen eine Gesetzmäßigkeit erkennen?

- (i) Betrachten Sie die Restklassen modulo 2. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^2] = [k \cdot k] = [k] \cdot [k] = [k]$ (siehe die Multiplikationstabelle in Beispiel 2.22). Also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$k^2 \equiv k \pmod{2}.$$

- (ii) Betrachten Sie die Restklassen modulo 3. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^3] = [k] \cdot [k] \cdot [k] = [k]$ (siehe die Multiplikationstabelle in Beispiel 2.23). Also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$k^3 \equiv k \pmod{3}.$$

- (iii) Betrachten Sie die Restklassen modulo 4. Dann gilt für nicht jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^4] = [k]$, denn $[2^4] = [16] = [0] \neq [2]$. Also gilt die Gleichung

$$k^4 \equiv k \pmod{4}$$

nicht für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- (iv) Betrachten Sie die Restklassen modulo 5. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^5] = [k] \cdot [k] \cdot [k] \cdot [k] \cdot [k] = [k]$ (siehe die Multiplikationstabelle in Beispiel 2.25). Also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$k^5 \equiv k \pmod{5}.$$

- (v) Betrachten Sie die Restklassen modulo 6. Dann gilt für nicht jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^6] = [k]$, denn $[2^6] = [64] = [4] \neq [2]$. Also gilt die Gleichung

$$k^6 \equiv k \pmod{6}$$

nicht für alle $k \in \mathbb{Z}$.

- (vi) Betrachten Sie die Restklassen modulo 7. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^7] = [k]$ (siehe Multiplikationstabelle im Beispielttext, Abbildung 1.5, in der die Restklassen jeweils durch ihre kleinsten nichtnegativen Elemente vertreten sind). Also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$k^7 \equiv k \pmod{7}.$$

- (vii) Betrachten Sie die Restklassen modulo 8. Dann gilt für nicht jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^8] = [k]$, denn $[2^8] = [256] = [0] \neq [2]$. Also gilt die Gleichung

$$k^8 \equiv k \pmod{8}$$

nicht für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(viii) Betrachten Sie die Restklassen modulo 9. Dann gilt für nicht jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $[k^9] = [k]$, denn $[3^9] = [3 \cdot 9^4] = [0] \neq [3]$. Also gilt die Gleichung

$$k^9 \equiv k \pmod{9}$$

nicht für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Es liegt nahe, hier nach einer Systematik zu suchen: Für welche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Zahl k^n kongruent zu k modulo n ist? Eine Antwort liefert der kleine Fermat'sche Satz, der besagt, dass diese Aussage für Primzahlen richtig ist (siehe Übung 6.14). $\square$

Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten
tutoriell und transparent

Hilgert, J.; Hoffmann, M.; Panse, A.

2015, XIII, 390 S. 100 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-45511-1