
Vorwort

Ὅψις γὰρ τῶν ἀδῆλων τὰ φαινόμενα.

(Die Phänomene eröffnen eine Sicht auf das Verborgene.)

ANAXAGORAS

Es gibt keine mathematische Definition **inverser Probleme**. In Technik und Naturwissenschaft hat es sich jedoch eingebürgert, von einem inversen Problem zu sprechen, wenn

- eine Abbildung $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ gegeben ist, die einen Kausalzusammenhang zwischen einer Ursache $u \in \mathbb{U}$ und der entsprechenden Wirkung $T(u) \in \mathbb{W}$ modelliert und
- die Aufgabe zu lösen ist, aus einer Wirkung $w \in \mathbb{W}$ auf eine Ursache $u \in \mathbb{U}$ mit $T(u) = w$ zu schließen. Die Berechnung von $w = T(u)$ zu gegebenem $u \in \mathbb{U}$ heißt **direktes Problem**.

Es kann sein, dass eine bestimmte Wirkung erwünscht ist und danach gefragt wird, wie sie zu erzielen sei. Dann spricht man von einem **Steuerungsproblem**. Im Folgenden geht es nur um den anderen Fall, dass eine Wirkung beobachtet und nach ihrer Ursache gefragt wird. Diese Fragestellung tritt auf, wenn eine interessierende physikalische Größe nicht direkt gemessen werden kann, sondern nur indirekt über eine verursachte Wirkung zugänglich ist. Man spricht dann von einem **Identifikationsproblem**. Es gibt viele Beispiele für Identifikationsprobleme in Naturwissenschaft und Technik, etwa

- in der Geophysik (das Gravitationsgesetz erlaubt die Berechnung der Gravitationskraft bei bekannter Masseverteilung. Die Umkehrung hiervon ist es, aus Messungen der Gravitationskraft auf Masseverteilungen zu schließen. Eine Anwendung ist die Suche nach Lagerstätten von Rohstoffen, die sich durch ihre spezifische Masse von umgebendem Gestein unterscheiden),
- in der Medizintechnik (das Beersche Gesetz erlaubt die Berechnung der Intensitätsabnahme eines Röntgenstrahls, der ein Gewebe mit bekannter Dichteverteilung durchdringt. Die Umkehrung hiervon ist es, aus Messungen der Intensitätsabnahme von Röntgenstrahlen auf die Dichteverteilung eines Gewebes zu schließen. Eine Anwendung ist die Darstellung des Körperinneren in der Computertomographie),

- in der Verfahrenstechnik (die Wärmeleitungsgleichung beschreibt die Ausbreitung von Wärme bei bekannten, zeit- und ortsabhängigen Wärmeleitkoeffizienten des erwärmten Materials. Die Umkehrung hiervon ist es, aus Temperaturmessungen auf Wärmeleitkoeffizienten zu schließen. Eine Anwendung ist die Überwachung von Materialverschleiß bei Verbrennungsvorgängen) oder
- in der Elektrotechnik (das Gesetz von Biot-Savart beschreibt die Induktion eines Magnetfelds bei bekannter Stromdichte. Die Umkehrung ist der Rückschluss auf eine Stromdichte aus Messungen des Magnetfelds. Eine Anwendung ist die Untersuchung und Optimierung von Lichtbögen beim Schweißen).

Inverse Probleme weisen häufig die Schwierigkeit auf, dass ihre Lösung u extrem sensitiv von der Wirkung w abhängt, das heißt zwei sehr ähnliche Wirkungen können zwei sehr unterschiedliche Ursachen haben. Wenn dann, wie es in der Praxis immer der Fall ist, nur fehlerbehaftete Messwerte von w zur Verfügung stehen, die bestenfalls zu einer hypothetischen Wirkung $\tilde{w} \neq w$ passen, ist es ganz unabhängig von der zur Verfügung stehenden Rechenleistung und -genauigkeit unmöglich, die wahre Ursache u von w zu finden: Einerseits ist eine Lösung von $T(u) = w$ nicht möglich, da nur eine Näherung \tilde{w} von w bekannt ist. Andererseits ist eine Lösung von $T(u) = \tilde{w}$ aufgrund der Sensitivitätsproblematik sinnlos, denn man würde ein u erhalten, das mit der wahren Ursache nichts zu tun hat. Wenn allerdings von der gesuchten Lösung u nicht nur bekannt ist, dass es sich um die Lösung von $T(u) = w$ handelt, sondern eine *zusätzliche Information* der Art „ u hat die Eigenschaft E “ vorliegt, dann ist es sinnvoll, folgendes Ersatzproblem zu betrachten: Man finde in der Menge aller Ursachen \tilde{u} , welche die Eigenschaft E haben, eine solche, dass der Abstand von $T(\tilde{u})$ zu \tilde{w} minimal wird. Wenn die Lösung \tilde{u} dieses Ersatzproblems weniger sensitiv von der Wirkung \tilde{w} abhängt als die Lösung u des Originalproblems von w , dabei aber gegen u strebt, wenn \tilde{w} gegen w strebt, dann nennt man dies eine **Regularisierung** des inversen Problems.

Es gibt viele ausgezeichnete Mathematikbücher über inverse Probleme, in deren Zentrum die Analyse von Sensitivitäten und von Strategien der Regularisierung stehen, erwähnt seien nur die Werke [21], [19], [17] und [31]. Deren Autoren bedienen sich alle der mathematischen Theorie der Funktionalanalysis, das heißt der Analysis und linearen Algebra in unendlichdimensionalen Räumen. Dies hat den Vorteil, dass das Wesentliche der inversen Problemen anhaftenden Schwierigkeiten bündig dargestellt und analysiert werden kann. Andererseits stellt die abstrakte Funktionalanalysis für viele an inversen Problemen Interessierte eine recht hohe Zugangshürde dar. Es ist das erste Ziel des vorliegenden Buchs, einen Zugang zu inversen Problemen zu bieten, ohne mehr mathematisches Wissen in Analysis, Matrizen- und Wahrscheinlichkeitsrechnung vorauszusetzen, als in den ersten beiden Jahren eines Ingenieurstudiums vermittelt wird. Aus der Funktionalanalysis wird im Wesentlichen nur die abstrakte Auffassung von Funktionen als Vektoren benötigt und diese wird nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern explizit dargelegt. Die allgemeine Theorie der Regularisierung von Operatoren wird nicht behandelt. Stattdessen werden inverse Probleme erst diskretisiert, also durch ihre endlichdimensionalen Ana-

loga, zumeist Gleichungssysteme oder allgemeiner Ausgleichsprobleme näherungsweise beschrieben, und dann werden *diese* regularisiert. Ein zweites Anliegen ist es, die Darstellung des Stoffs an den Etappen zu orientieren, die bei der praktischen Lösung inverser Probleme zu bewältigen sind. Einer ausführlichen Besprechung konkreter Diskretisierungen, von Regularisierungsstrategien und Berechnungsmöglichkeiten für Regularisierungsparameter sowie einer Illustration hiervon an Beispielen wird mehr Raum gegeben als einer möglichst allgemeinen Darstellung. Details zu numerischen Verfahren werden weggelassen, da die meisten Anwender ohnehin auf fertige Programmpakete zurückgreifen.¹

Begonnen wird im ersten Kapitel mit der Vorstellung von vier repräsentativen und gleichzeitig anwendungsrelevanten Beispielen inverser Probleme. Es folgt ein technischer Abschnitt, in dem Vektorräume eingeführt werden, deren Elemente Funktionen sind. Dies dient einer vereinheitlichten Beschreibung inverser Probleme als zu lösende Gleichungen in Vektorräumen auch in den Fällen, wo Ursache und Wirkung von Zeit und/oder Ort abhängen, also Funktionen sind. In diesem formalen Rahmen wird dann die oben angesprochene, für inverse Probleme typische, erhöhte Sensitivität als sogenannte „Schlechtgestelltheit“ charakterisiert. Das zweite Kapitel bringt die Analyse eines Spezialfalls, nämlich *linearer* inverser Probleme für nur *endlich viele* unbekannte Parameter. Dies sind lineare Gleichungssysteme oder allgemeiner lineare Ausgleichsprobleme. Hier steht mit der Konditionszahl ein Maß zur Verfügung, mit der Schlechtgestelltheit bewertet werden kann. Außerdem treten Ausgleichsprobleme auch auf, wenn man, wie im dritten Kapitel beschrieben, Gleichungen $T(u) = w$ für Funktionen u und w durch Diskretisierung näherungsweise in Gleichungen $f(x) = y$ für Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ überführt, um diese numerisch zu lösen. Wichtig ist die Frage nach den bei der Diskretisierung entstehenden Fehlern. Dazu muss geklärt werden, in welchem Sinn ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ Approximant einer Funktion sein und „gegen diese konvergieren“ kann. Ein von der „direkten“ Diskretisierung abweichendes, anhand von Beispielen besprochenes Vorgehen ist es, die Gleichung $T(u) = w$ erst nach einer (Fourier-) Transformation zu diskretisieren. Dies kann auf besonders effiziente Rechenverfahren führen. Die durch Diskretisierung linearer inverser Probleme entstehenden linearen Gleichungssysteme oder Ausgleichsprobleme erben die Eigenschaft, dass ihre Lösung äußerst sensitiv von der (diskretisierten) Wirkung abhängt. Die Berechnung einer aussagekräftigen Näherungslösung ist dann nur möglich, wenn eine regularisierte Variante des Problems gefunden wird. Darum geht es im vierten Kapitel, in dessen Mittelpunkt die nach Tikhonov und Phillips benannte Regularisierungsmethode steht. Auf nichtlineare inverse Probleme wird im fünften Kapitel im Wesentlichen nur anhand eines Beispiels eingegangen, welches stellvertretend für den Problemkreis der Parameteridentifikation bei Differentialgleichungen steht. Gefragt wird dabei nicht nach der Lösung eines Anfangs- oder Randwertproblems für eine gegebene Differentialgleichung, sondern bei bekannter Lösung nach einer unbekannten Koeffizi-

¹ Bei der Erstellung dieses Buchs wurden MATLAB in der Version [22] sowie die C-Programme aus [28] verwendet.

entenfunktion der Differentialgleichung. Benötigte Kenntnisse aus der linearen Algebra werden in Anhang A aufgelistet.

Ich bedanke mich bei Herrn Clemens Heine vom Springer Verlag für seine Förderung dieses Buchs und die sehr angenehme Zusammenarbeit. Meinem Kollegen, Herrn Professor Stefan Schäffler, danke ich herzlich für die kritische, mir sehr wertvolle Durchsicht meines Manuskripts und das freundschaftliche Interesse, mit dem er meine Arbeit seit vielen Jahren begleitet und unterstützt. Von Herzen danke ich Herrn Professor Christian Reinsch, der mich als Lehrer entscheidend geprägt hat.

Inverse Probleme

Grundlagen, Theorie und Anwendungsbeispiele

Richter, M.

2015, IX, 128 S. 24 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-45810-5