

Qualitative Behandlung des Kontaktproblems – Normalkontakt ohne Adhäsion

2



Wir beginnen unsere Betrachtung von Kontaktphänomenen mit dem *Normalkontaktproblem*. Bei einem Normalkontaktproblem handelt es sich um zwei Körper, die durch Anpresskräfte *senkrecht zu ihrer Oberfläche* in Berührung gebracht werden. Ein prominentes Beispiel ist das Rad auf einer Schiene. Die zwei wichtigsten Zusammenhänge, welche die Theorie eines Normalkontakts liefern soll, sind:

1. Der Zusammenhang zwischen der Anpresskraft und der Normalverschiebung der Körper, welcher die Steifigkeit des Kontaktes und somit die dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems mitbestimmt und
2. die im Kontaktgebiet auftretenden Spannungen, die für den Festigkeitsnachweis erforderlich sind.

Ohne Berührung gibt es keine anderen Kontaktphänomene, keine Reibung und keinen Verschleiß. In diesem Sinne kann man den Normalkontakt als eine Grundvoraussetzung für alle anderen tribologischen Phänomene betrachten. Dabei ist zu bemerken, dass es im Allgemeinen selbst bei einem Normalkontakt eine relative Bewegung von Oberflächen in *tangentialer* Richtung geben kann – aufgrund der unterschiedlichen Querkontraktion kontaktierender Körper. Dadurch kommen auch beim Normalkontaktproblem Reibungskräfte in den Grenzflächen ins Spiel. Wenn wir berücksichtigen, dass die Reibungskräfte selbst wesentlich durch den Kontakt zwischen Mikrorauigkeiten der Oberflächen bestimmt sind, sehen wir, dass Normal-, Tangentialbeanspruchungen und Reibung bereits im einfachsten Kontaktproblem auf verschiedenen Betrachtungsskalen auf komplizierte Weise verflochten sind. In einer ersten Näherung wollen wir uns von diesen Komplikationen abstrahieren und untersuchen das *reine Normalkontaktproblem*, indem wir annehmen, dass in der Kontaktfläche keine Reibungskräfte wirken. Auch die immer vorhandenen Anziehungskräfte zwischen Oberflächen – Adhäsion – werden zunächst vernachlässigt.

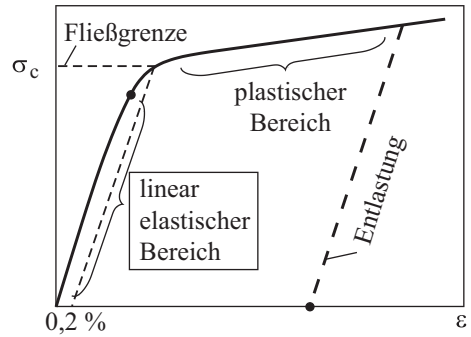
Eine analytische oder numerische Analyse von Kontaktproblemen ist auch in den einfachsten Fällen sehr kompliziert. Ein qualitatives Verständnis von Kontaktproblemen dagegen lässt sich mit sehr einfachen Mitteln erreichen. Wir beginnen daher unsere Diskussion mit Methoden zur qualitativen Analyse von Kontaktphänomenen, die in vielen Fällen auch für zuverlässige quantitative Abschätzungen benutzt werden können. Eine rigorose Behandlung der wichtigsten klassischen Kontaktprobleme folgt in weiteren Kapiteln. Wir werden eine Reihe von Kontaktproblemen zwischen Körpern verschiedener Form untersuchen, die oft als Bausteine für kompliziertere Kontaktprobleme gebraucht werden können.

2.1 Materialeigenschaften

Dieses Buch setzt die Bekanntschaft des Lesers mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie voraus. In diesem Abschnitt fassen wir nur Definitionen von wichtigsten Materialparametern zusammen, die für eine qualitative Untersuchung von kontaktmechanischen Fragestellungen von Bedeutung sind. Diese Zusammenfassung ersetzt nicht die allgemeinen Definitionen und Gleichungen der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie.

- a. *Elastische Eigenschaften.* In einem einachsigen Zugversuch wird ein schlanker Stab mit konstantem Querschnitt A und der Anfangslänge l_0 um Δl gedehnt. Das Verhältnis der Zugkraft zur Querschnittsfläche ist die Zugspannung

Abb. 2.1 Schematische Darstellung eines Spannungs-Dehnungs-Diagramms für viele Metalle und Nichtmetalle



$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

Das Verhältnis der Längenänderung zur Anfangslänge ist die Zugdehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.2)$$

Ein typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm für viele Metalle und Nichtmetalle ist in Abb. 2.1 dargestellt. Bei kleinen Spannungen sind diese proportional zur Deformation

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.3)$$

Der Proportionalitätskoeffizient E ist der *Elastizitätsmodul* des Stoffes. Mit der Längsdehnung hängt eine Querkontraktion des Materials zusammen, die durch die *Poissonzahl* (oder Querkontraktionskoeffizient) ν charakterisiert wird. Einem *inkompressiblen Medium* entspricht $\nu = 1/2$.

Auf ähnliche Weise wird der Schubmodul als Proportionalitätskoeffizient zwischen der Schubspannung und der von ihr verursachten Scherdeformation definiert. Der Schubmodul hängt mit dem Elastizitätskoeffizienten und der Poissonzahl gemäß

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

zusammen. Das Verhältnis der Spannung zur Volumenänderung bei allseitigem Druck wird Kompressionsmodul K genannt:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.5)$$

Im elastisch deformierten Körper ist potentielle Energie gespeichert, deren *Energiedichte* E (Energie pro Volumeneinheit) sich wie folgt berechnet:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (2.6)$$

Bei Scherdeformation gilt

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2G}. \quad (2.7)$$

- b. *Plastische Eigenschaften.* Nach dem Erreichen der *Fließgrenze* weicht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm abrupt von dem ursprünglichen linearen Verlauf ab und geht im weiteren Verlauf fast horizontal: Der Stoff wird plastisch deformiert. Die plastische Deformation wird dadurch gekennzeichnet, dass nach der Entlastung eine Restdeformation bleibt.

Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten ist in der Regel schnell aber kontinuierlich, so dass sich keine eindeutige „Fließgrenze“ definieren lässt. Vereinbarungsgemäß wird als Fließgrenze σ_c die Spannung angenommen, bei der die bleibende Deformation 0,2% beträgt.

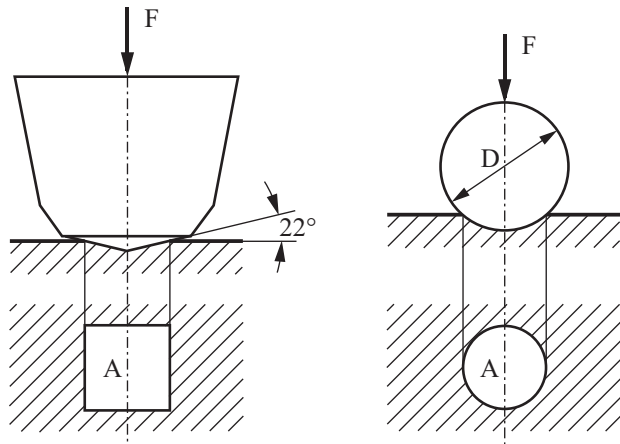
Die Fließgrenze hängt vom Deformationszustand des Materials ab. Für Reibungsphänomene ist der *stark deformationsverfestigte* Zustand maßgebend, den man in der Oberflächenschicht nach einer tribologischen Beanspruchung in der Regel findet. Das bedeutet, dass wir in tribologischen Anwendungen unter der Fließgrenze in der Regel den Grenzwert dieses Parameters im stark verfestigten Zustand verstehen. Dementsprechend findet bei Deformation keine weitere wesentliche Verfestigung statt und das Material kann in erster Näherung als elastisch-ideal plastisch betrachtet werden.

Eine einfache Methode zur Bestimmung der Fließgrenze eines elastisch-ideal plastischen Mediums ist die *Härtemessung*. Sie besteht im Eindrücken eines harten Indenters in die zu untersuchende Oberfläche (Abb. 2.2). Das Verhältnis der Normalkraft zur Fläche des Eindrucks ist die Eindruckhärte oder einfach die *Härte* des Materials¹:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A}. \quad (2.8)$$

¹ Die Härtewerte nach Vickers und nach Brinell stimmen mit der so definierten Eindruckhärte bis zu einem konstanten Koeffizienten überein: Die Härte nach Vickers ist gleich etwa 0,1 der oben definierten Eindruckhärte. Wir werden in diesem Buch nur die Definition (2.8) benutzen.

Abb. 2.2 Härtemessung nach Vickers und nach Brinell



Tabor hat sowohl theoretisch als auch experimentell gezeigt, dass in den meisten Fällen die Härte etwa das Dreifache der Fließgrenze beträgt²:

$$\sigma_0 \approx 3\sigma_c. \quad (2.9)$$

Die Härtemessung spielt eine zentrale Rolle in der tribologischen Charakterisierung von Werkstoffen, da tribologische Prozesse im Wesentlichen durch Wechselwirkung von Mikrorauigkeiten bestimmt werden und diese nach ihrer Geometrie sehr ähnlich einem Härtestest sind. Die Eindringhärte hängt von der Form des Indenters nur schwach ab. In erster Näherung kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.

Verschiedene Materialeigenschaften, die für die Kontaktmechanik und Reibung von Interesse sind, wie Elastizitätsmodul, Härte, thermischer Dehnungskoeffizient und Oberflächenenergie weisen starke Korrelationen auf. Umfangreiche experimentelle Daten hierfür können im exzellenten Buch von Ernest Rabinowicz „Friction and wear of materials“ gefunden werden³.

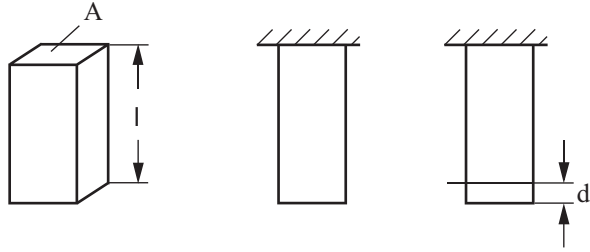
2.2 Einfache Kontaktaufgaben

Am einfachsten können solche Kontaktaufgaben gelöst werden, bei denen die Deformation eindeutig aus den geometrischen Vorgaben folgt. Das ist der Fall in den vier nachfolgenden Beispielen.

² Tabor, D. The Hardness of Metals, Oxford University Press, Oxford, 1951.

³ E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.

Abb. 2.3 Kontakt zwischen einem elastischen Parallelepiped und einer starren Ebene



1. *Parallelepiped*

Das einfachste Kontaktproblem ist der Kontakt zwischen einem rechtwinkligen Parallelepiped und einer glatten, reibungsfreien, starren Ebene (Abb. 2.3). Beim Anpressen an die Ebene wird sich der Körper elastisch deformieren. Definieren wir die „Eindringtiefe“ d als die Strecke, die das Parallelepiped unter die Ebene „eindringen“ würde, falls die Ebene keinen Widerstand leisten würde.

In Wirklichkeit kann der Körper unter das Niveau der starren Ebene nicht eindringen und wird um den Betrag d deformiert. Ist die Länge des Parallelepipeds viel größer als seine Breite, so liegt ein *einachsiger Spannungszustand* vor und die dabei entstehende elastische Kraft ist gleich

$$F = EA \frac{d}{l}. \quad (2.10)$$

E ist hier der Elastizitätsmodul, A der Flächeninhalt des Querschnitts, l die Länge des Parallelepipeds. Die Kraft ist in diesem Fall proportional zu der Eindringtiefe d .

2. *Dünne Schicht*

Ist die Länge des Parallelepipeds viel kleiner als seine Breite (Abb. 2.4), so kann sich das Medium nicht in der Querrichtung deformieren und es liegt eine *einachsige Deformation* vor. In diesem Fall folgt aus der Elastizitätstheorie

$$F = \tilde{E}A \frac{d}{l} \quad (2.11)$$

mit

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.12)$$

Abb. 2.4 Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht und einer starren Ebene

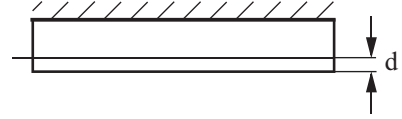
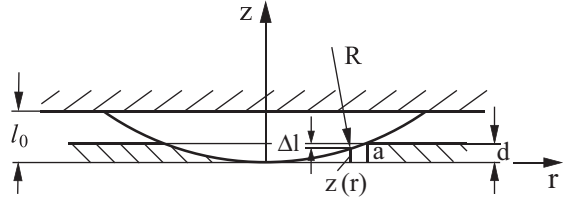


Abb. 2.5 Kontakt zwischen einem elastischen sphärischen Aufkleber und einer starren Ebene



Für Metalle gilt $\nu \approx 1/3$, so dass $\tilde{E} \approx 1,5E$ ist. Für Elastomere, die als fast nicht kompressible Medien angesehen werden können, ist $\nu \approx 1/2$ und der Modul für einseitige Kompression $\tilde{E} \approx K$ ist viel größer E (um ca. 3 Größenordnungen):

$$\tilde{E} \approx K \gg E, \text{ für Elastomere.} \quad (2.13)$$

3. Sphärischer Aufkleber

Als nächstes untersuchen wir den Kontakt zwischen einem dünnen, sphärischen, elastischen Aufkleber auf einer starren Unterlage und einer starren Ebene (Abb. 2.5).

Die maximale Dicke des Aufklebers sei l_0 und der Krümmungsradius R . Den Radius des Kontaktgebietes bezeichnen wir mit a . Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass in dem uns interessierenden Bereich der Anpresskräfte folgende geometrische Beziehungen erfüllt sind: $d \ll l_0$, $l_0 \ll a$. In diesem Fall wird sich jedes einzelne Element des Aufklebers einachsrig deformieren. Für die einachsige elastische Deformation ist der Koeffizient der einseitigen Kompression \tilde{E} (2.12) maßgebend.

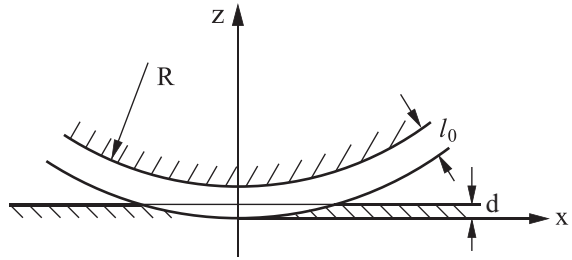
Die Form eines sphärischen Aufklebers mit dem Krümmungsradius R kann in der Nähe des Minimums als

$$z = -\sqrt{R^2 - r^2} + R \approx \frac{r^2}{2R} \quad (2.14)$$

dargestellt werden. Der Abb. 2.5 kann man leicht entnehmen, dass der Zusammenhang zwischen dem Radius a des Kontaktgebietes und der Eindringtiefe d durch die Bedingung $d = a^2 / 2R$ gegeben wird. Daraus folgt für den Kontaktradius

$$a = \sqrt{2Rd}. \quad (2.15)$$

Abb. 2.6 Zylinder mit einer elastischen Schicht im Kontakt mit einer starren Ebene



Die vertikale Verschiebung der Oberfläche bei der Koordinate r ist gleich $\Delta l = d - r^2 / 2R$. Die entsprechende elastische Deformation berechnet sich somit zu

$$\varepsilon(r) = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d - r^2 / 2R}{l_0}. \quad (2.16)$$

Die Berechnungen der Spannung und der im Kontaktgebiet wirkenden Gesamtkraft ergeben schließlich:

$$\sigma(r) = \tilde{E} \varepsilon(r), F = \tilde{E} \int_0^a 2\pi r \left(\frac{d - r^2 / 2R}{l_0} \right) dr = \tilde{E} \frac{\pi}{l_0} R d^2. \quad (2.17)$$

In diesem Fall ist die Kontaktkraft proportional zum Quadrat der Eindringtiefe. Die größte Spannung (im Zentrum des Kontaktgebietes) ist gleich

$$\sigma(0) = \tilde{E} \frac{d}{l_0} = \left(\frac{\tilde{E} F}{\pi l_0 R} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

4. Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht auf einer starren zylindrischen Unterlage und einer starren Ebene

Ein weiteres System, das in vielerlei Hinsicht interessant ist, ist ein starrer Zylinder der Länge L , der mit einer dünnen elastischen Schicht (Dicke l_0) bedeckt ist (Abb. 2.6). Unter der Annahme, dass die Eindringtiefe viel kleiner und der Kontaktradius viel größer als die Schichtdicke ist, haben wir es auch in diesem Fall mit einer einachsigen Deformation zu tun. Die Verschiebung von Oberflächenpunkten berechnet sich zu $u_z = d - x^2 / 2R$. Für die Deformation gilt

$$\varepsilon(x) = \frac{u_z}{l_0} = \frac{d - x^2 / 2R}{l_0}. \quad (2.19)$$

Die gesamte Kontaktkraft berechnet sich dann zu

$$F = 2 \int_0^{\sqrt{2Rd}} \tilde{E}L \left\{ \frac{d - x^2 / 2R}{l_0} \right\} dx = \frac{4}{3} 2^{1/2} \frac{\tilde{E}LR^{1/2}}{l_0} d^{3/2}. \quad (2.20)$$

Die maximale Spannung (in der Mitte des Kontaktgebietes) beträgt

$$\sigma(0) = \left\{ \frac{9F^2 \tilde{E}}{32L^2 R l_0} \right\}^{1/3}. \quad (2.21)$$

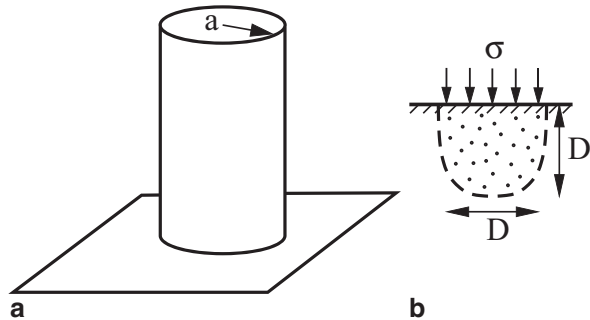
2.3 Qualitative Abschätzungsmethode für Kontakte mit einem dreidimensionalen elastischen Kontinuum

1. Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Körper

Betrachten wir nun einen starren zylindrischen Indenter in Kontakt mit einem *elastischen Halbraum* (Abb. 2.7a). Am Beispiel dieser Aufgabe erklären wir die wichtigste Idee, die in der Kontaktmechanik für qualitative Abschätzungen benutzt wird.

Wirkt eine Spannungsverteilung auf ein endliches Gebiet der Oberfläche mit einer charakteristischen Länge D (Abb. 2.7b), so haben die Deformation und die Spannung

Abb. 2.7 **a** Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Halbraum. **b** Stark deformierter Bereich des elastischen Halbraumes



im gesamten Volumen mit den Abmessungen D in allen drei räumlichen Dimensionen die gleiche Größenordnung. Außerhalb dieses „stark deformierten Volumens“ fallen die Deformation und die Spannung nach dem Gesetz $\propto r^{-2}$ ab. Das führt dazu, dass in

dreidimensionalen Systemen das genannte Volumen $\sim D^3$ den größten Beitrag zu allen energetischen oder Kraftbeziehungen liefert⁴.

Für eine erste grobe qualitative Abschätzung reicht es daher anzunehmen, dass die Deformation im genannten Volumen konstant ist und dass nur dieses Volumen deformiert wird. Selbstverständlich ist das nur eine sehr grobe Darstellung der in Wirklichkeit kontinuierlichen Verteilung von Deformationen und Spannungen im Kontinuum. Sie liefert aber in den meisten Fällen bis auf einen konstanten numerischen Faktor der Größenordnung 1, der entweder durch analytische oder durch numerische Simulationen bestimmt werden kann, den korrekten qualitativen Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft und der Eindringtiefe sowie für den Kontaktradius.

Wenden wir diese einfache Abschätzungsregel auf unser Beispiel mit dem starren Indenter an. Ist der Durchmesser des Zylinders gleich $2a$, so ist ein Volumen mit den Abmessungen $2a$ in allen drei Richtungen stark deformiert. Da dieses Volumen um d eingedrückt wird, schätzen wir die Deformation als $\varepsilon \approx d / 2a$ ab. Für die Spannung ergibt sich $\sigma \approx E\varepsilon \approx Ed / 2a$. Für die Kraft $F \approx \sigma(2a)^2 \approx 2Eda$: Die Kontaktkraft ist proportional zur Eindringtiefe und zum Kontaktradius a . Es ist interessant, diese Abschätzung mit der exakten Lösung der Aufgabe (s. Kap. 5) zu vergleichen. Das exakte Ergebnis lautet

$$F = 2E^* da \quad (2.22)$$

mit $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$. Für metallische Werkstoffe ($\nu \approx 1/3$) beträgt der Unterschied zwischen der Abschätzung und dem exakten Ergebnis nur 10%. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass die beschriebene Abschätzungsmethode nicht nur für qualitative sondern auch für relativ gute quantitative Abschätzungen benutzt werden kann.

Gleichung (2.22) besagt, dass die Eindringtiefe proportional zur Normalkraft ist. Der Koeffizient zwischen der Kraft F und der Verschiebung d wird *Steifigkeit des Kontaktes* genannt:

$$c = 2E^* a. \quad (2.23)$$

Wir unterstreichen, dass diese Steifigkeit proportional *zum Radius* des Kontaktes ist (nicht der Kontaktfläche!).

⁴ Dass die charakteristische „Eindringtiefe“ der Spannungen und Deformationen dieselbe Größenordnung haben muss wie die Abmessungen D des Druckgebietes folgt bereits aus Dimensionsgründen. In der Tat enthält die Gleichgewichtsgleichung der Elastizitätstheorie keine Faktoren mit der Dimension Länge. Die Lösung einer beliebigen Gleichgewichtsaufgabe darf daher keine Längenparameter enthalten außer der Länge, die durch die Randbedingungen vorgegeben wurde.

Kontaktmechanik und Reibung

Von der Nanotribologie bis zur Erdbebendynamik

Popov, V.L.

2015, XIX, 397 S. 228 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-45974-4