

## Kapitel 1

# Mechanik der Massenpunkte

### Einleitung

Der einfachste Teil der Mechanik behandelt Fälle, in denen man von der Ausdehnung der Körper absehen und sie als mit Masse behaftete Punkte, **Massenpunkte** betrachten kann.

Dieser Begriff des Massenpunktes ist nicht so unproblematisch wie er klingt. Es ist verwunderlich, dass er sich überhaupt auf die Wirklichkeit anwenden lässt. Selbst ein Atom z. B. ist eigentlich kein Massenpunkt: Es kann u. a. rotieren und Rotationsenergie aufnehmen, was ein Massenpunkt nicht kann (oder wenn er es täte, würde es niemand merken). Wieso die Punktmechanik trotzdem für Atome so gut stimmt, hat erst die Quantenmechanik aufgeklärt (Abschn. 15.2). Eine weitere dem Begriff des Massenpunktes innewohnende Schwierigkeit, nämlich dass er eine unendliche Energie haben müsste, macht der Physik der Elementarteilchen noch heute zu schaffen (Abschn. 19.4.7).

Aus der Punktmechanik kann man logisch einwandfrei die Mechanik des starren Körpers (Kap. 2) und die der deformierbaren Körper (Kap. 3) entwickeln, indem man diese als Systeme unendlich vieler Massenpunkte mit festen bzw. veränderlichen relativen Lagebeziehungen auffasst.

### Inhalt

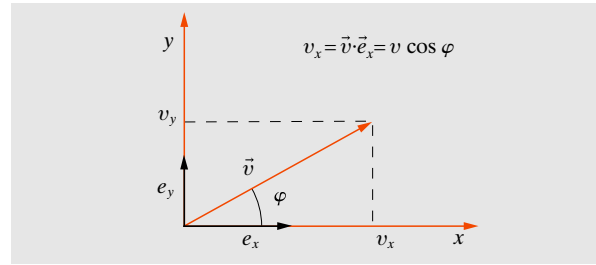
→ 1.1	Kinematik .....	14
→ 1.2	Dynamik und Statik .....	16
→ 1.3	Einfache Bewegungen .....	19
→ 1.4	Impulse und Kraftstöße .....	25
→ 1.5	Arbeit, Energie, Leistung .....	26
→ 1.6	Phasenraum und Erhaltungssätze .....	37
→ 1.7	Kräfte in bewegten Bezugssystemen .....	41
→ 1.8	Gravitation und Himmelsmechanik .....	45
→ 1.9	Reibung .....	60
→ 1.10	Offene Fragen und Grenzen .....	65

## 1.1 Kinematik

Die Kinematik untersucht das „Wie“, den Ablauf der Bewegung, ohne nach dem „Warum“ zu fragen.

### 1.1.1 Ortsvektor und Bezugssystem

Um Bewegungen zu beschreiben, muss man zuerst ein **Bezugssystem** festlegen. Sein Ursprung  $O$  kann materiell definiert sein (Zimmerecke, Autozündschloss, Erdmittelpunkt, Sonne . . .), oder ein gedachter Punkt (Schwerpunkt des Systems Erde–Mond . . .). Ob sich  $O$  selbst bewegt, spielt zunächst keine Rolle und lässt sich auch prinzipiell nicht sagen, jedenfalls nicht bei gleichförmiger Bewegung (Abschn. 1.7). Den Ort eines Massenpunktes zur Zeit  $t$  beschreibt man dann durch einen Vektor  $\vec{r}(t)$ , der von  $O$  bis zu diesem Ort führt. Der Ortsvektor wird beschrieben in einem *Koordinatensystem*. Im kartesischen System werden drei durch  $O$  gehende aufeinander senkrechte Achsen verwendet. Im dreidimensionalen Raum hat jeder Vektor drei Komponenten,  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ . Die Komponenten entsprechen den Projektionen auf die Koordinatenachsen,  $a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$  (Abb. 1.2). Mit  $\vec{e}_i$  werden die Einheitsvektoren entlang der Koordinatenlinien bezeichnet. Sie haben die Länge 1. Wenn sich der Massenpunkt relativ zu  $O$  bewegt,



■ **Abbildung 1.2** Vektorkomponenten der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  im  $xy$ -Koordinatensystem

ändert sich  $\vec{r}$  mit der Zeit  $t$ . Die Gesamtheit aller Endpunkte der Vektoren  $\vec{r}(t)$  zu allen möglichen Zeiten  $t$  bildet die Bahnkurve oder Trajektorie des Massenpunktes.

### 1.1.2 Geschwindigkeit

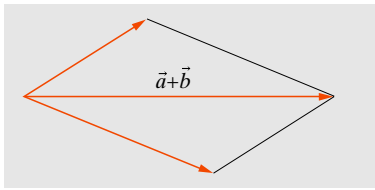
Die Differenz der Ortsvektoren für zwei Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  ist die *Verschiebung* des Massenpunktes während dieser Zeit:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) . \quad (1.1)$$

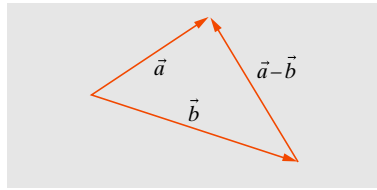
Diese Verschiebung ist „in Luftlinie“ gemessen, ohne Berücksichtigung eventueller Bahnkrümmungen (Abb. 1.3).

#### ▼ Mathematischer Hinweis

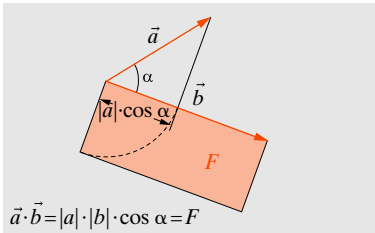
Addition,  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$



Subtraktion,  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

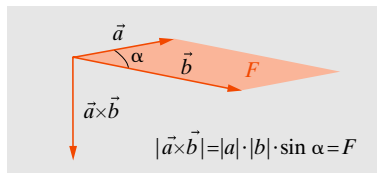


Skalarprodukt,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

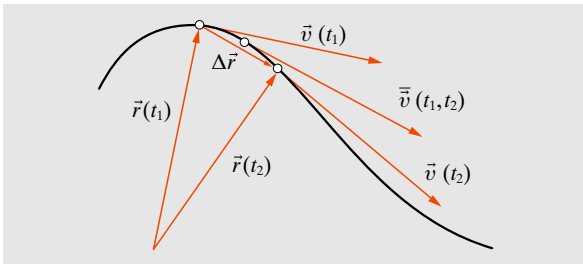


$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ; Länge eines Vektors:  $|\vec{a}| = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{1/2} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}$

Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \\ a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{vmatrix}$



■ **Abbildung 1.1** Rekapitulation der Vektoralgebra



■ **Abbildung 1.3** Konstruktion der Geschwindigkeit aus der Bahnkurve

### BEISPIEL

Worauf beruht die bekannte Regel: Man teile die Zeit zwischen Blitz und Donner (in Sekunden) durch 3 und erhält den Abstand des Gewitters in km?

Der Schall breitet sich mit  $c = 333 \text{ m/s}$  aus, das Licht praktisch unendlich schnell. Wenn das Gewitter 1 km entfernt ist, hört man den Donner 3 s nach dem Blitz.

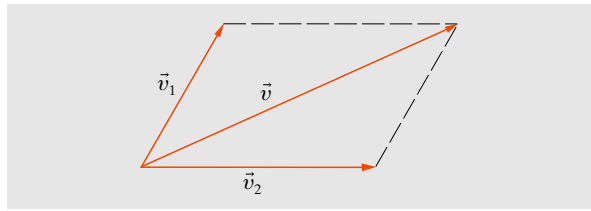
Division der Verschiebung durch die dazu benötigte Zeit  $t_2 - t_1$  liefert die **mittlere Geschwindigkeit** während dieser Zeit:

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

Sie berücksichtigt offensichtlich nur den Gesamteffekt, nicht eventuelle Änderungen der Geschwindigkeit während dieser Zeit. Um die **Momentangeschwindigkeit** oder **Geschwindigkeit** schlechthin für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa  $t_1$ , zu erhalten, argumentiert man folgendermaßen: Wenn man den Zeitpunkt  $t_2$  immer näher an  $t_1$  heranrücken lässt, verringert man immer mehr die Möglichkeit für Geschwindigkeitsänderungen innerhalb dieses Zeitintervalls. Mit dem Meter als Längeneinheit und der Sekunde als Zeiteinheit wird die Geschwindigkeit in m/s gemessen.

Der Grenzwert des Ausdruckes  $\bar{v}(t_1, t_2)$  für  $t_2 \rightarrow t_1$  ist die Momentangeschwindigkeit

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (1.3)$$



■ **Abbildung 1.4** Addition von Geschwindigkeiten

In der Folge werden wir häufig die zeitliche Ableitung einer Größe kurz durch einen darübergesetzten Punkt kennzeichnen.

Die Geschwindigkeit ist zweifellos ein Vektor: Ihrer mathematischen Entstehung nach als Quotient des Verschiebungsvektors und des Skalars Zeit; vor allem aber ihrer physikalischen Bedeutung nach, denn sie hat eine Größe *und* eine Richtung. Ihre *Richtung* ist die gleiche wie die Grenzlage des Verschiebungsvektors für  $t_2 \rightarrow t_1$ , also die Richtung der Tangente an die Bahnkurve an der entsprechenden Stelle. Beim Rechnen mit Geschwindigkeiten müssen natürlich die Regeln der Vektorrechnung befolgt werden.

Im Allgemeinen wird sich die Geschwindigkeit  $\vec{v}(t)$  von Bahnpunkt zu Bahnpunkt, also auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt ändern. Ändert sich die Richtung von  $\vec{v}$  nicht (aber evtl. die Größe), so ist die Bahn geradlinig. Ändert sich die Größe von  $\vec{v}$  nicht (aber evtl. die Richtung), so nennt man die Bewegung *gleichförmig*; sie kann indessen noch auf jeder beliebig gekrümmten Bahn erfolgen.

### BEISPIEL

Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde auf der Bahn um die Sonne; die des Mondes auf der Bahn um die Erde; die eines Punktes am Äquator bei der Achsendrehung der Erde? Mittlerer Abstand Sonne–Erde  $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$ ; mittlerer Abstand Erde–Mond  $384\,000 \text{ km}$ ; mittlerer Erdradius  $6378 \text{ km}$ .

Erde um Sonne:  $2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} / 3,15 \cdot 10^7 \text{ s} = 29,7 \text{ km/s}$ .

Mond um Erde:  $2\pi \cdot 384\,000 \text{ km} / (27,3 \cdot 86\,400 \text{ s}) = 1,02 \text{ km/s}$ .

Punkt am Äquator:  $2\pi \cdot 6378 \text{ km} / (86\,400 \text{ s} \cdot 365/366) = 0,465 \text{ km/s}$ .

### 1.1.3 Beschleunigung

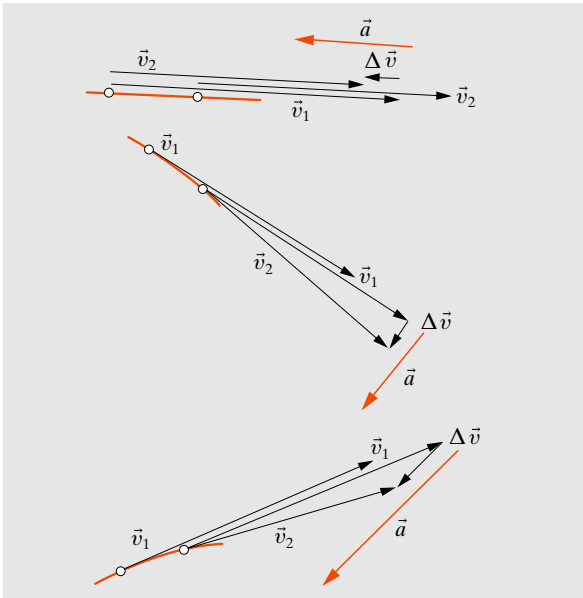
Die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta \vec{v}(t_1, t_2)$  zwischen zwei Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  ergibt sich wieder durch vektorielle Differenzbildung zwischen  $\vec{v}(t_2)$  und  $\vec{v}(t_1)$ . Diese Operation erfasst auch den Fall, dass sich nicht, oder nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Bei der zeichnerischen Bestimmung von  $\Delta \vec{v}$  muss man einen der beiden Vektoren so parallelverschieben, dass beide Anfangspunkte koinzidieren (eine Parallelverschiebung ändert den Vektor nicht).

Die **mittlere Beschleunigung** während eines Zeitraums, z. B. des Intervalls  $(t_1, t_2)$ , ergibt sich wieder, indem man die Geschwindigkeitsänderung durch die dazu benötigte Zeit dividiert:

$$\bar{\vec{a}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.4)$$

Der Grenzübergang  $t_2 \rightarrow t_1$  definiert die **Momentanbeschleunigung** oder **Beschleunigung** schlechthin für den Zeitpunkt  $t_1$ :

$$\vec{a}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.5)$$



■ **Abbildung 1.5** Oben: Bei der geradlinigen Bewegung tritt nur Tangentialbeschleunigung auf. Mitte: Kreisbewegung wird durch reine Normalbeschleunigung ( $\vec{a} \perp \vec{v}$ ) verursacht

Die Einheit der mittleren und der momentanen Beschleunigung ist sinngemäß  $\text{m/s/s} = \text{m s}^{-2}$ .

Folgende Tatsachen sind leicht aus diesen Definitionen abzuleiten (Abb. 1.5):

Wenn sich nur die *Größe* der Geschwindigkeit ändert, hat die Beschleunigung  $\vec{a}$  die Richtung (oder Gegenrichtung) zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , je nachdem, ob es sich um eine „Beschleunigung“ im alltäglichen Sinne oder um eine Bremsung handelt (Tangentialbeschleunigung).

Wenn sich nur die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, steht der Beschleunigungsvektor senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor, also auch senkrecht auf der Bahn (Normalbeschleunigung).

Im allgemeinen Fall der Größen- und Richtungsänderung der Geschwindigkeit führt die eine zu einer Tangential-, die andere zu einer Normalkomponente der Beschleunigung („normal“ = senkrecht).

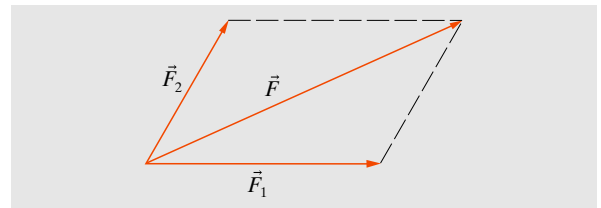
## 1.2 Dynamik und Statik

Jetzt fragen wir auch nach der Ursache der Bewegung, besser nach der Ursache einer Änderung des Bewegungszustandes. **Kräfte** spielen auch in unserer Erfahrungswelt die zentrale Rolle in der Dynamik. Sie werden durch Größe und Richtung charakterisiert, sind also Vektoren und unterliegen deren Rechenregeln (Abb. 1.6). Auch die für unser Leben so wichtige *Statik* ist ein Teil der Dynamik: Im Ruhezustand muss die Summe aller Kräfte auf einen Massepunkt verschwinden (Abb. 1.7, 1.8):

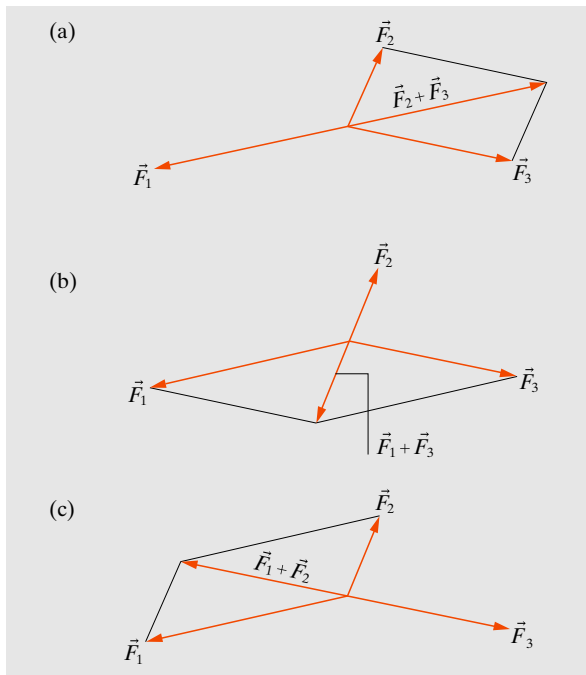
$$\text{Statik: } \sum_i \vec{F}_i = 0$$

### 1.2.1 Trägheit

Der Nutzen des kinematischen Verfahrens, aus einem beliebigen Bewegungsablauf nacheinander die Vektorfunktionen  $\vec{r}(t)$  (Bahnkurve),  $\vec{v}(t)$  (Geschwindigkeit) und  $\vec{a}(t)$  (Beschleunigung) herzuleiten, zeigt sich besonders, wenn



■ **Abbildung 1.6** Parallelogramm der Kräfte



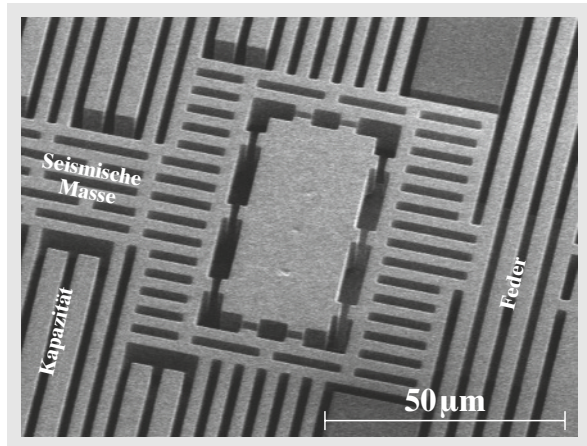
■ **Abbildung 1.7a–c** Gleichgewicht dreier Kräfte;  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ , d. h.: (a)  $\vec{F}_1 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$ , (b)  $\vec{F}_2 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_3)$ , (c)  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

man zu den Ursachen der Bewegung vorstoßen will. Hierzu muss man sich zunächst einigen, welche Bewegungen einer besonderen Ursache bedürfen und welche nicht. Die moderne exakte Naturwissenschaft begann mit der Feststellung G. Galileis (1564–1642), dass eine Bewegung mit konstantem Geschwindigkeitsvektor, eine **geradlinig gleichförmige Bewegung**, keiner Ursache bedarf, sondern aus sich selbst heraus immer weiter geht. Mit anderen Worten:

Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig (**Galileisches Trägheitsprinzip**). Ruhe ist danach nur ein Spezialfall einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} = 0$ .

### 1.2.2 Kraft und Masse

Um einen Körper zu veranlassen, seinen geradlinig gleichförmigen Bewegungszustand aufzugeben, also um ihn zu beschleunigen, muss eine **Kraft** auf ihn wirken. Die Kraft hat die gleiche Richtung wie die **Beschleunigung**, die sie



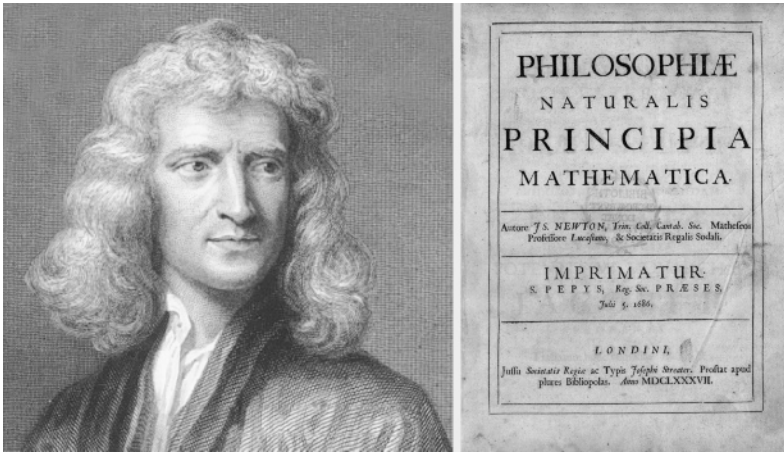
■ **Abbildung 1.8** Mikromechanischer Beschleunigungssensor (MEMS, micro-electromechanical sensor) zur Kontrolle von Airbags in Kraftfahrzeugen. Eine seismische Masse ist symmetrisch an zwei Federn (eine davon *rechts* zu sehen) aufgehängt. Sie wird bei Beschleunigung in horizontaler Richtung ausgelenkt, der große rechteckige Block *im Zentrum* dient als Stopper. Messung der Kapazität zu den benachbarten festen Elektroden liefert ein Signal für die Federauslenkung und damit die Beschleunigung. Mit freundlicher Erlaubnis der Robert Bosch GmbH

hervorrufen. Man stellt empirisch fest: Für einen gegebenen Körper ist die Größe der Kraft proportional der Größe der Beschleunigung. Gleiche Kräfte beschleunigen verschiedene Körper verschieden stark. Jeder Körper hat also eine gewisse Fähigkeit, dem Beschleunigtwerden Widerstand zu leisten, ausgedrückt durch seine **Masse**, genauer seine **träge Masse**  $m$ .

Sensoren für Beschleunigungen finden vielfache Anwendungen, z. B. in der Seismik oder in Kraftfahrzeugen. Ein miniaturisierter mikro-elektromechanischer Sensor (MEMS) zur Airbag-Steuerung ist in Abb. 1.8 zu sehen. In solchen Sensoren wird eine kleine Testmasse mit Federn an einem umgebenden Körper befestigt. Wird der Körper beschleunigt, wird die Testmasse ausgelenkt. Mit der Auslenkung der Federn wird die Kraft und damit die Beschleunigung gemessen.

Sir I. Newton (1643–1727) fasste den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung in dem **Aktionsprinzip** zusammen.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} \quad (\text{Bewegungsgleichung}) . \quad (1.6)$$



■ **Abbildung 1.9** Isaac Newton (1643–1727), der Erfinder der modernen Mechanik. Grundlagen der Differentialrechnung und der Mechanik sind in den *PRINCIPIA MATHEMATICA* von 1687 dargestellt. Mit freundlicher Erlaubnis der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

„... im November (1665) hatte ich die Differentialrechnung, im Januar darauf die Farbtheorie, im Mai hatte ich Zugang zu der umgekehrten Differentialrechnung, und im selben Jahr begann ich zu denken, dass die Schwerkraft sich auch auf den Mond erstrecke, und ... aus Keplers Gesetz ... leitete ich ab, dass die Kräfte auf die Planeten in umgekehrtem Verhältnis zum Quadrat ihres Abstandes stehen ... denn damals war ich in der Blüte des Alters, in dem ich Erfindungen machte ...“

Isaac Newton, 1716

Diese Gleichung lässt sich in drei Richtungen lesen:

- Als Definitionsgleichung oder Bestimmungsgleichung für  $m$ : Wenn ein Körper unter dem Einfluss der gegebenen Kraft  $\vec{F}$  eine Bewegung mit der Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}$  ausführt, welche Masse  $m$  ist ihm dann zuzuschreiben?
- Als Definitionsgleichung oder Bestimmungsgleichung für  $\vec{F}$ : Wenn ein Körper der Masse  $m$  eine Bewegung mit der Beschleunigung  $\ddot{\vec{r}}$  ausführt, welche Kräfte müssen dann auf ihn wirken? (Kinematische Methode.)
- Als Bestimmungsgleichung für  $\ddot{\vec{r}}$ : Wie sieht die Bewegung aus, die ein Körper der Masse  $m$  unter dem Einfluss der Kraft  $\vec{F}$  ausführt? (Dynamische Methode; Integration der Bewegungsgleichung.)

Die erste Fragestellung ist prinzipiell bedeutungsvoll, da sie die einzig konsequente Definition der *trägen* Masse darstellt. Praktisch ist sie weniger wichtig als die anderen beiden. Beim Studium spezieller Bewegungsformen werden wir entweder die zweite oder die dritte Methode benutzen.

### 1.2.3 Maßeinheiten

Dass in Newtons Bewegungsgleichung keine Proportionalitätskonstante auftritt, ist der Wahl der Einheiten zu verdanken: Man wählt die Einheitskraft so, dass sie der Einheitsmasse die Einheitsbeschleunigung mitteilt. Die Einheitsmasse war ursprünglich an die Längeneinheit angeschlossen: 1 kg ist die Masse von 1 dm<sup>3</sup> Wasser bei 4 °C und 1 bar Druck. Als Masseneinheit dient heute ein Normal, das Archivkilogramm (Abschn. 0.2.4(c)).

Im SI ist die Krafteinheit

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}.$$

Bei homogenen Körpern ist die Masse dem Volumen proportional:  $m = \varrho V$ . Die Größe  $\varrho = m/V$  heißt **Dichte** oder spezifische Masse und wird in kg/m<sup>3</sup> oder g/cm<sup>3</sup> ausgedrückt. Wasser hat bei 4 °C und 1 bar die Dichte 1000 kg/m<sup>3</sup> oder 1 g/cm<sup>3</sup>.

### 1.2.4 Newtons Axiome

Newton baute die gesamte Mechanik auf drei Sätzen auf, von denen wir die beiden ersten schon kennen:

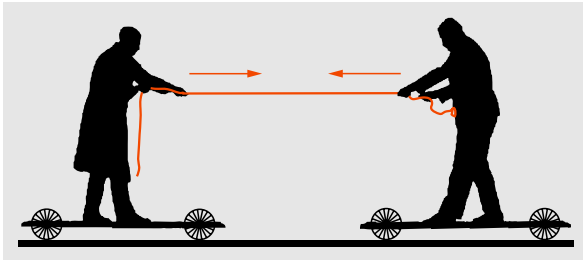
1) **Trägheitsprinzip**. Ein kräftefreier Körper bewegt sich geradlinig gleichförmig.

2) **Aktionsprinzip**. Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Körper mit der Masse  $m$  wirkt, beschleunigt sie ihn mit

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.7)$$

(Das Trägheitsprinzip ist der Spezialfall  $\vec{F} = 0$  des Aktionsprinzips.)





■ **Abbildung 1.10** Newtons Prinzip von actio = reactio im Versuch nach dem Göttinger Physiker R.W. Pohl (1884–1976)

3) **Reaktionsprinzip.** Wenn die Kraft  $\vec{F}$ , die auf einen Körper wirkt, ihren Ursprung in einem anderen Körper hat, so wirkt auf diesen die entgegengesetzt gleiche Kraft  $-\vec{F}$  (Abb. 1.10).

Newton hat sein Aktionsprinzip eigentlich anders formuliert:

2') Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Körper wirkt, ändert sich sein **Impuls**  $m\vec{v}$  so, dass

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (1.7')$$

Diese Fassung gilt im Gegensatz zu 2) auch bei veränderlicher Masse. Es ist, als hätte Newton die Relativitätstheorie vorausgeahnt, in der sich der Impuls nicht mehr linear mit der Geschwindigkeit ändert. Die moderne Physik zieht daher (1.7') vor. Man hat sogar mehrfach versucht, den Kraftbegriff ganz aus der Physik zu eliminieren und ihn durch den Begriff des Impulsaustausches zu ersetzen. Wegen ihrer Anschaulichkeit werden wir meist die Fassung (1.7) benutzen. Man muss aber beachten, dass sie nur bei Geschwindigkeiten gilt, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind (s. Kap. 13).

### 1.3 Einfache Bewegungen

Das Aktionsprinzip, die newtonsche Bewegungsgleichung, ist ein allgemein gültiges Prinzip zur Analyse von Bewegungen. Wir werden es abwechselnd „vorwärts“ und „rückwärts“ anwenden, nämlich aus den wirkenden Kräften auf den Ablauf der Bewegung schließen oder umgekehrt.

#### 1.3.1 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

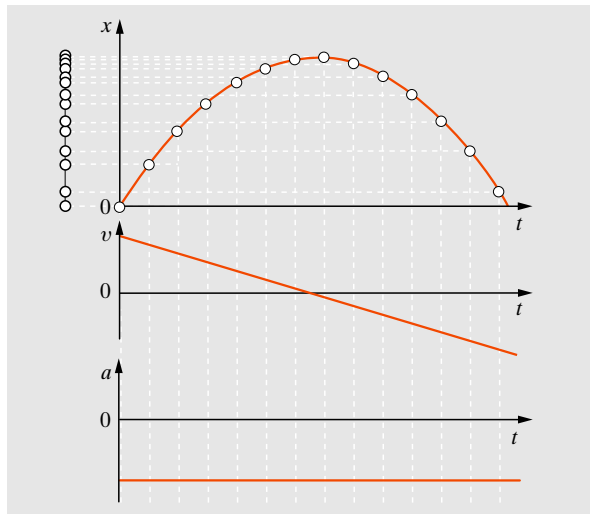
Eine konstante Kraft (bei der sich weder Größe noch Richtung ändert) erzeugt nach Newtons Beschleunigungsgleichung eine konstante Beschleunigung  $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{F}/m$ . Zunächst sei diese Beschleunigung  $\vec{a}$  parallel zu der in einem bestimmten Zeitpunkt herrschenden Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Dann behält die Geschwindigkeit auch stets die Richtung, d. h. die Bahn ist eine Gerade, und man kann hier vom Vektorcharakter von  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{a}$  absehen und die Lage des Körpers durch seinen skalaren Abstand  $x$  von einem zu wählenden Nullpunkt auf dieser Geraden darstellen.

Dass die Beschleunigung  $a$  der Größe nach konstant ist, bedeutet, dass die Geschwindigkeit  $v$  linear mit der Zeit zunimmt. Wenn zur Zeit  $t = 0$  schon eine gewisse Geschwindigkeit  $v_0$  vorhanden war, ist die Geschwindigkeit zur Zeit  $t$

$$v(t) = v_0 + at. \quad (1.8)$$

Den Abstand  $x$  vom Nullpunkt zur Zeit  $t$  erhält man (auch ohne Kenntnisse im Integrieren) folgendermaßen: Bei  $t = 0$  befinde sich der Massenpunkt bei  $x = x_0$  und fliege mit  $v_0$ . Zur Zeit  $t$  fliegt er mit  $v(t)$ . Dazwischen hat er die mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{2}(v_0 + v(t)) = v_0 + \frac{1}{2}at. \quad (1.9)$$



■ **Abbildung 1.11** Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:  $x(t)$ -,  $v(t)$ -,  $a(t)$ -Diagramm. Beispielsweise wird ein in die Höhe geworfenes Objekt genau mit diesem Graphen beschrieben

Man beachte: Diese Mittelung ist nur möglich, weil  $v$  inzwischen linear angewachsen ist. Mit der Geschwindigkeit  $\bar{v}$  würde in der Zeit  $t$  der Weg

$$\Delta x = \bar{v}(t)t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (1.10)$$

zurückgelegt werden. Also befindet sich der Massenpunkt dann bei

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (1.11)$$

Durch Integrieren folgen (1.8) und (1.11) unmittelbar aus der **Bewegungsgleichung** (1.7) und den **Anfangsbedingungen**  $x(0) = x_0$ ,  $v(0) = v_0$ . Wenn speziell  $x_0 = 0$  und  $v_0 = 0$ , vereinfachen sich (1.8) und (1.11) zu

$$v = at, \quad x = \frac{1}{2}at^2. \quad (1.12)$$

In diesen beiden Beziehungen lässt sich jede der vier Größen  $x$ ,  $v$ ,  $a$ ,  $t$  durch zwei andere ausdrücken. Jede dieser Kombinationen gibt interessante Aufschlüsse und ist vielfach praktisch anwendbar. Speziell ist die Geschwindigkeit nach der Beschleunigungsstrecke  $x$

$$v = \sqrt{2ax}. \quad (1.13)$$

Der Fall, dass die Beschleunigung  $\ddot{r}$  unter einem Winkel zu der in einem bestimmten Zeitpunkt herrschenden Geschwindigkeit  $\dot{r}$  steht, bietet für die Vektorrechnung überhaupt keine Schwierigkeit. Man schreibt die Beziehungen (1.8) und (1.11) einfach vektoriell:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad (1.14)$$

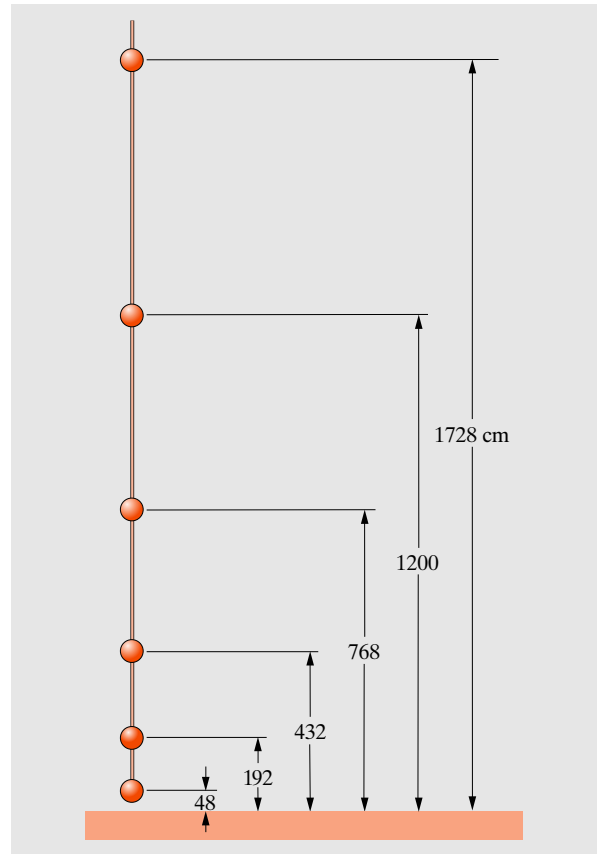
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \quad (1.15)$$

#### BEISPIEL

Aus Komfortgründen wird die Beschleunigung von Zügen auf  $0,2 \text{ m/s}^2$  (1/50 der Erdbeschleunigung) beschränkt. Welchen Weg hat ein Hochgeschwindigkeitszug zurückgelegt, bis er die Reisegeschwindigkeit  $v_{\text{End}} = 300 \text{ km/h}$  erreicht?

Die Beschleunigungszeit beträgt  $t = v_{\text{End}}/a = 83,3/0,2 \frac{\text{m/s}}{\text{m/s}^2} = 417 \text{ s}$ . Nach dieser Zeit hat der Zug bereits die Strecke  $s = at^2/2 = 17,3 \text{ km}$  zurückgelegt.

Alle Richtungsprobleme regeln sich mit Hilfe der Gesetze der Vektoraddition von selbst. Anschaulich kann man

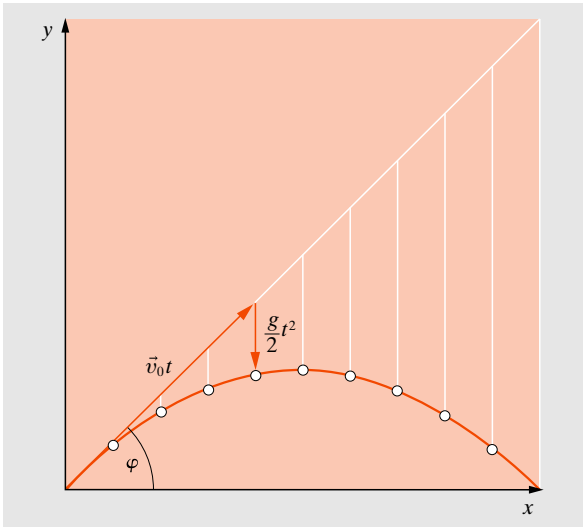


■ **Abbildung 1.12** Fallschnur: Wenn man die Aufhängung ausklinkt, trommeln die Kugeln in gleichmäßigem Rhythmus auf den Fußboden. Wenn die Abstände der Kugeln vom Boden sich wie die Quadratzahlen  $1, 4, 9, \dots$  verhalten, verhalten sich die Fallzeiten wie die Zahlen  $1, 2, 3, \dots$ . Man hört also ein gleichmäßiges Trommeln, im Beispiel mit  $0,10 \text{ s}$  Abstand zwischen zwei Schlägen. Hängt das Seil etwas höher, dann ist die Zunahme der Fallzeit für die kurzen Strecken fühlbarer als für die langen, der Trommelwirbel verlangsamt sich daher gegen das Ende zu

sagen: Jede Bewegung lässt sich beliebig (auch schiefwinklig) in Komponenten aufspalten, die unabhängig voneinander erfolgen. Zum Beispiel lässt sich (1.15) so deuten, dass der Körper von seiner Anfangslage die kräftefreie Bewegung  $\vec{v}_0 t$  und unabhängig davon die gleichmäßig beschleunigte Bewegung  $\frac{1}{2}\vec{a}t^2$  ausgeführt hat.

Ein wichtiger Spezialfall der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist der **freie Fall** unter dem Einfluss der Erdschwerkraft, aber ohne Luftwiderstand. In der Nähe





■ **Abbildung 1.13** Entstehung der Wurfbewegung aus der Überlagerung einer geradlinig gleichförmigen Bewegung und der Fallbewegung

der Erdoberfläche erfährt dabei jeder Körper eine Beschleunigung

$$a = g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (\text{Erdbeschleunigung}) ,$$

die auf den Erdmittelpunkt gerichtet ist (über den Zusammenhang mit dem Gravitationsgesetz vgl. Abschnitt 1.8.1, über Abweichungen Abschn. 1.7.3). Ein Körper der Masse  $m$ , der auf diese Weise beschleunigt wird, muss nach dem Aktionsprinzip unter dem Einfluss einer Kraft vom Betrage  $F = mg$  stehen, die ebenfalls auf den Erdmittelpunkt zeigt. Diese Kraft ist das **Gewicht** des Körpers und ist begrifflich streng von der Masse zu unterscheiden. Masse bestimmt also nicht nur die Trägheit eines Körpers, sondern auch die Schwerkraft. Weil alle Körper gleich schnell fallen, sagt unsere Erfahrung, dass schwere und träge Masse identisch sind. Abschnitt 1.8.3 und 13.10.1 untersuchen die Konsequenzen der **Äquivalenz von schwerer und träger Masse** genauer.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Um diese Unterscheidung zu erleichtern, gab es früher die Einheit kp (**Kilopond**). 1kp ist das Gewicht einer Masse von 1kg. Das Kilopond ist also eine *Krafteinheit*, keine Masseneinheit. Zum N (**Newton**) verhält es sich seiner Definition nach wie folgt:

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} .$$

Galileis Fall- und Wurfgesetze sind Folgerungen aus (1.14) und (1.15), ebenso wie viele Vorschriften der Straßenverkehrsordnung (Aufgaben 1.3.1–1.3e.6).

### BEISPIEL

Wie hängt die Wurfweite für feste Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  vom Winkel  $\varphi$  (Abb. 1.13) ab? Wann wird die maximale Weite erzielt?

Nach (1.15) gilt  $y(t) = v_0 \sin \varphi t - \frac{1}{2}gt^2$ , d.h. bei  $t = 2v_0 \sin \varphi / g$  trifft der Körper wieder bei  $y = 0$  auf. In dieser Zeit hat er die Strecke  $x(t) = v_0 \sin \varphi t = (v_0^2 / g) \sin 2\varphi$  zurückgelegt. Wegen  $\sin 2\pi/4 = 1$  wird die Wurfweite bei  $\varphi = 45^\circ$  maximal.

### 1.3.2 Die gleichförmige Kreisbewegung

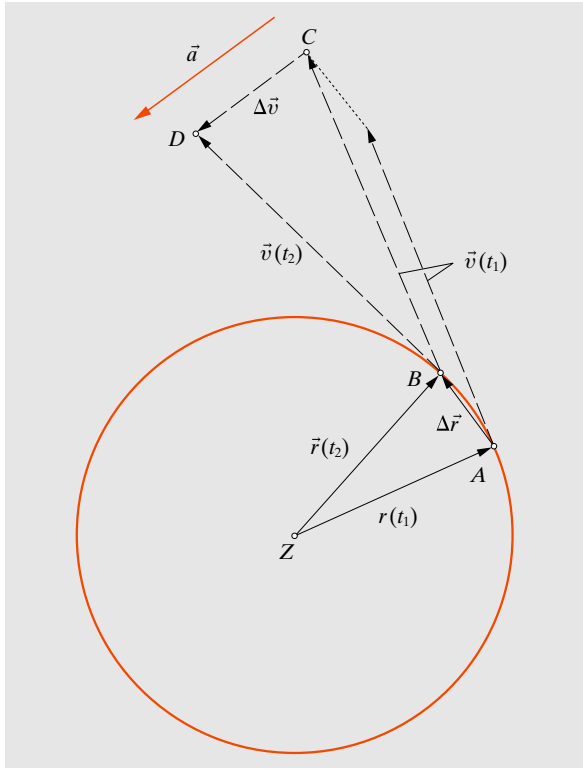
Ein Massenpunkt bewege sich auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius  $r$  um das Zentrum  $Z$  mit einer Geschwindigkeit konstanter Größe  $v$ , wenn auch natürlich veränderlicher Richtung. Der *Betrag*  $v = |\vec{v}|$  der Geschwindigkeit, auch **Bahngeschwindigkeit** genannt, gibt die Bogenlänge des Kreises an, die in der Sekunde durchlaufen wird. Wichtig ist ferner der Begriff der **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$ . Sie gibt den Winkel an, den der Strahl vom Zentrum  $Z$  zum Massenpunkt in einer bestimmten Zeit überstreicht (Abb. 1.14), dividiert durch diese Zeit. Der Winkel ist hierbei im Bogenmaß anzugeben. Aus dieser Definition folgt der Zusammenhang zwischen Bahn- und Winkelgeschwindigkeit:

$$v = \omega r . \quad (1.16)$$

Die **Umlaufzeit**  $T$ , innerhalb derer der Winkel  $2\pi$  überstrichen wird, hängt mit  $\omega$  so zusammen:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (1.17)$$

Ein rotierender starrer Körper, z. B. ein Rad, hat an allen Punkten die gleiche Winkelgeschwindigkeit; die Bahngeschwindigkeit nimmt wegen (1.16) nach außen hin zu. Bei einem Zahnrad- oder Seiltrieb sind die *Bahngeschwindigkeiten* am Umfang der ineinandergreifenden Räder gleich (andernfalls würde ein Rad auf dem anderen rutschen). Hieraus ergeben sich z. B. die Grundbeziehungen der Getriebetechnik.



■ **Abbildung 1.14** Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung

### BEISPIEL

Bei der Rotation eines Stahlteils sollte man eine Umfangsgeschwindigkeit von 100 m/s nicht überschreiten (Grund: Aufgabe 4.1e.4). Wie viele Umdrehungen pro Minute kann man also einem Teil mit dem Durchmesser  $d$  zumuten?

Die Umfangsgeschwindigkeit ist  $v = \omega r = \omega d/2$ , also die zulässige Drehzahl  $f = 1/T = 2\pi/\omega = 32/d \text{ s}^{-1} = 1900/d \text{ U/min}$ , z. B. bei  $d = 1 \text{ cm}$ :  $f = 190000 \text{ U/min}$ , bei  $d = 1 \text{ m}$ :  $f = 1900 \text{ U/min}$ .

Wir ermitteln nun geometrisch die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung. Eine Beschleunigung liegt vor, weil sich die Geschwindigkeit der Richtung (wenn auch nicht der Größe) nach ändert. Sie ist nach dem allgemeinen Verfahren der Kinematik durch Bildung der Geschwindigkeitsdifferenz für zwei genügend eng be-

nachbarte Positionen A und B des Massenpunktes bzw. die entsprechenden Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  zu finden (Abb. 1.14). Der Kreissektor ZAB lässt sich dann mit beliebiger Genauigkeit durch ein Dreieck annähern. Dieses Dreieck ist *ähnlich* dem Dreieck BCD aus den beiden Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}(t_1)$  und  $\vec{v}(t_2)$  (beide an B angetragen) und der Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta\vec{v}$ : Beide Dreiecke sind gleichschenkelig (ZAB, weil es zwei Kreisradien enthält, BCD, weil die Geschwindigkeit dem Betrag nach konstant ist). Sie stehen senkrecht aufeinander, also auch  $\Delta v$  auf  $\Delta r$ . Folglich haben entsprechende Seiten beider Dreiecke das gleiche Verhältnis:

$$\frac{AB}{r} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}, \quad (1.18)$$

wenn  $\Delta r$  die Länge des Kreisbogens ist, der im Grenzfall in die Dreiecksseite übergeht. Division dieser Gleichung durch die Zeitdifferenz  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , die benötigt wird, um den Weg AB zurückzulegen bzw. die Geschwindigkeitsänderung  $\Delta\vec{v}$  herbeizuführen, liefert

$$\frac{\Delta r/\Delta t}{r} = \frac{v}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|/\Delta t}{v} = \frac{a}{v} \quad (1.19)$$

oder

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad (1.20)$$

wenn man für  $\Delta r/\Delta t$  im Grenzfall  $v$  und für  $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$  die Beschleunigung  $a$  setzt.

Die Größe der Beschleunigung ist also konstant. Ihre Richtung ergibt sich aus der Konstruktion (Abb. 1.14) als stets zum Zentrum hin gerichtet (man beachte, dass  $\Delta\vec{v}$  und  $\vec{a}$  eigentlich am derzeitigen Ort A oder B des Körpers anzutragen sind). Es herrscht also eine **Zentripetalbeschleunigung**. Dynamisch betrachtet:

Damit oder wenn ein Körper mit der Masse  $m$  eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, muss auf ihn eine Kraft vom Betrag

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (1.21)$$

wirken, die immer zu einem festen Punkt, dem Zentrum, hinzeigt (Zentripetalkraft).

Im physikalisch realen Fall wird eine Zentripetalkraft ausgeübt, die den Körper P auf die Kreisbahn zwingt. Das kann durch eine starre Verbindung geschehen, mit der ein

Körper um ein Zentrum geschleudert wird, oder durch die Haftkraft, wenn ein Auto eine Kurve fährt. Dann übt umgekehrt  $P$  auf  $Q$  nach dem Reaktionsprinzip eine Gegenkraft aus, deren Betrag ebenfalls durch (1.21) gegeben wird, die aber entgegengesetzte Richtung hat, eine **Zentrifugalkraft**. Eine andere Deutung der Zentrifugalkraft wird sich bei der Diskussion verschiedener Bezugssysteme ergeben (vgl. Abschn. 1.7.3).

### BEISPIEL

Die Zentrifugalkraft infolge der täglichen Rotation der Erde lässt sich leicht direkt messen. Wie äußert sie sich? Ist das für den Jahreslauf der Erde um die Sonne auch so?

Erddrotation:  $a = \omega^2 r = 0,03 \text{ m/s}^2 = (1/300) g$ : Am Äquator ist ein 100 kg-Mensch 0,3 kg leichter als am Pol. Noch einmal so viel bringt die verringerte Anziehung infolge der Erdadplattung.

Jahresumlauf:  $a = v^2/r = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$ . Dies wird durch die Anziehung durch die Sonne genau kompensiert und ist so nicht nachweisbar.

Es ist meistens sinnvoll, das Koordinatensystem dem physikalischen Problem anzupassen. Die Kreisbewegung sollte also in Polar- oder Zylinderkoordinaten beschrieben werden. Die ebenen Koordinatentransformationen  $(x, y) \leftrightarrow (r, \varphi)$  lauten

$$\begin{aligned} r &= (x^2 + y^2)^{1/2} & \varphi &= \arctan(y/x) \\ x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (1.22)$$

In Abb. 1.15 sind das Polarkoordinatensystem, der Ortsvektor  $\vec{r}$  und die zu den Koordinaten gehörigen Einheitsvektoren dargestellt,

$$\vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi). \quad (1.23)$$

Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Kreisbahn, ändern sich auch  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$ , und es gilt z. B.  $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \omega \vec{e}_\varphi$ . Damit lässt sich dann die Geschwindigkeit des Ortsvektors nach  $\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \omega r \vec{e}_\varphi = \vec{v}$  berechnen, wobei wir günstig  $\dot{r} = 0$  verwenden konnten. Entsprechend berechnet man die Zentripetalbeschleunigung nach  $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -r\omega^2 \vec{e}_r$ , in Übereinstimmung mit (1.20).

### 1.3.3 Die harmonische Schwingung

Wenn man eine gleichförmige Kreisbewegung „von der Seite betrachtet“, d. h. sie auf eine Gerade  $x$  projiziert, die

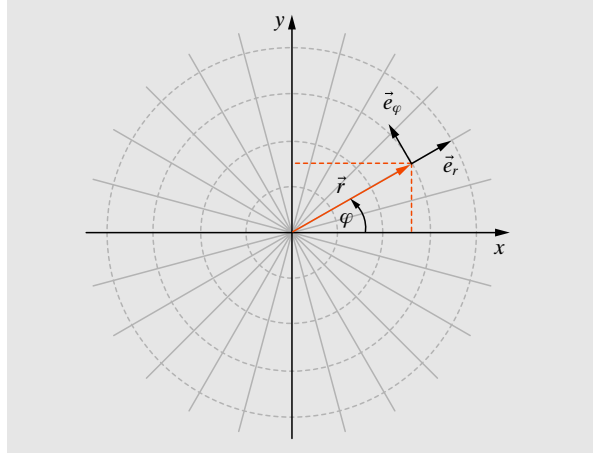


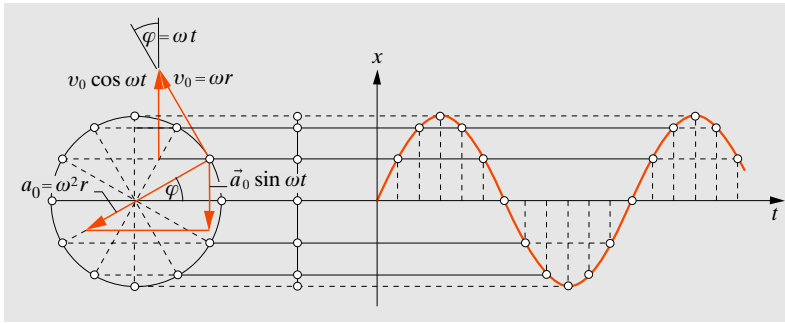
Abbildung 1.15 Polarkoordinatensystem mit Koordinatenlinien und Einheitsvektoren

in der Kreisbahnebene liegt, so erhält man eine **harmonische Schwingung** (Abb. 1.16). Damit ist dieser Bewegungstyp kinematisch vollständig gekennzeichnet, und alle wesentlichen Tatsachen darüber lassen sich ohne Rechnung ablesen. Man übernimmt einfach die Ergebnisse für die gleichförmige Kreisbewegung mit der Bahngeschwindigkeit  $v_0$ , wobei aber natürlich nur die Komponenten von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung zählen, die in Richtung der Projektionsgeraden  $x$  fallen.

Der Radius  $r$  der Kreisbahn spielt hier die Rolle der maximalen Auslenkung oder **Amplitude** der Schwingung. Der Betrag der Geschwindigkeit  $v$  ändert sich zeitlich, weil zu jeder Zeit ein verschiedener Teil der Bahngeschwindigkeit  $v_0$  beim Kreis in die Projektionsrichtung fällt. Nur wenn der Massenpunkt die Mittellage passiert, nimmt  $v$  den vollen Wert  $v_0$  an. Bei maximaler Auslenkung ist  $v = 0$ . Die Beschleunigung, da sie in radialer Richtung zeigt, wird dagegen mit dem vollen Kreisbahnwert  $a = \pm v_0^2/r$  gerade dann auf  $x$  projiziert, wenn der Körper maximal ausgelenkt ist. In der Mittellage sind  $a = 0$ .

Allgemeiner lassen sich alle drei Größen – Auslenkung  $x$  aus der Mittellage, Geschwindigkeit  $v$ , Beschleunigung  $a$  – durch den Winkel  $\varphi$  in der äquivalenten Kreisbewegung (Definition s. Abb. 1.16) ausdrücken. Im Fall der Schwingung nennt man  $\varphi$  die **Phase**. Zählt man die Zeit  $t$  von einem Durchgang durch die Mittellage nach oben an, so ist nach Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\varphi = \omega t \quad (1.24)$$



■ **Abbildung 1.16** Die harmonische Schwingung als „von der Seite gesehene“ gleichförmige Kreisbewegung

und man liest aus Abb. 1.16 sofort ab:

$$x = r \sin \omega t, \quad (1.25)$$

$$v = v_0 \cos \omega t, \quad (1.26)$$

$$a = -a_0 \sin \omega t. \quad (1.27)$$

Vergleich von (1.25) und (1.27) zeigt, dass für jeden Zeitpunkt die Beschleunigung  $a$  proportional zur Auslenkung und dieser entgegengerichtet ist:

$$a = -a_0 \frac{x}{r} = -\omega^2 x \quad (1.28)$$

(vgl. (1.20)).

Damit oder wenn ein Körper der Masse  $m$  eine solche Bewegung ausführt, muss auf ihn also eine Kraft

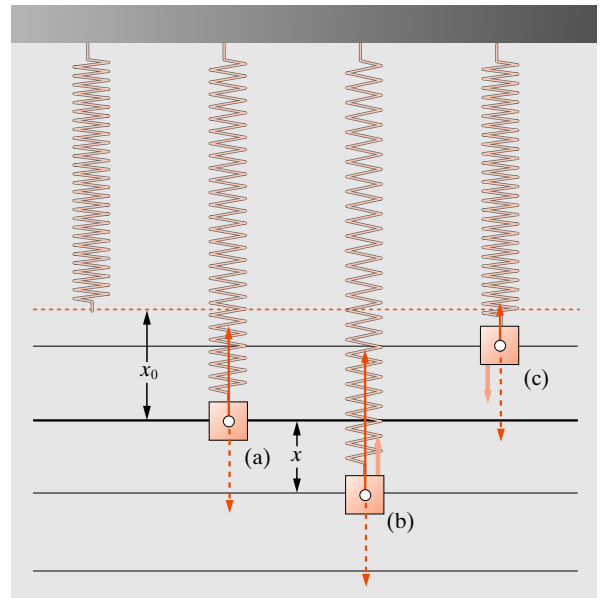
$$F = ma = -m\omega^2 x \quad (1.29)$$

wirken, die proportional zur Auslenkung  $x$  aus der Ruhelage und dieser entgegengerichtet ist (Abb. 1.17). Eine Kraft mit einem solchen Abstandsgesetz nennt man **elastische Kraft**. Wenn man also umgekehrt weiß, dass auf einen Körper bei der Auslenkung aus einer Ruhelage eine rücktreibende Kraft wirksam wird, die proportional zu dieser Auslenkung  $x$  ist:

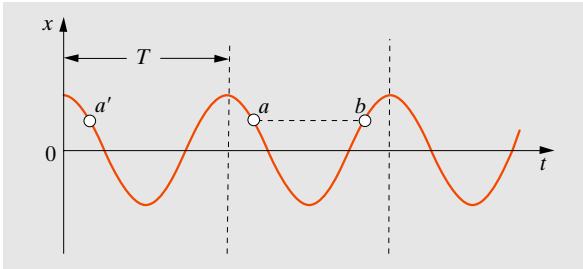
$$F = -Dx, \quad (1.30)$$

so folgt, dass der Massenpunkt eine harmonische Schwingung ausführt.

Es ist kein Wunder, dass harmonische Schwingungen so häufig auftreten, auch außerhalb der Mechanik. Jede Abweichung von einem stabilen Gleichgewichtszustand führt nämlich, solange sie klein ist, zu einem rücktreibenden Einfluss, der proportional zur Größe der Abweichung ist. Speziell wirken jeder mechanischen Deformation eines Körpers rücktreibende Kräfte entgegen, die zunächst proportional zur Deformation sind (**Hookesches Gesetz** (Abb. 1.17), vgl. Abschn. 4.1.1), was in Abwesenheit von Reibung zu harmonischen Schwingungen führt.



■ **Abbildung 1.17a-c** Gewicht des Klotzes, Rückstellkraft der Feder, resultierende Kraft. Die dicke Linie gibt die Gleichgewichtslage der belasteten, die gestrichelte der unbelasteten Feder an



**Abbildung 1.18** Schwingungsdauer  $T$  und Phase einer Schwingung.  $a'$  und  $a$  stimmen in der Phase überein,  $a$  und  $b$  nicht

Die Proportionalitätskonstante  $D$  heißt auch **Federkonstante** oder Direktionskraft, obwohl sie keine Kraft, sondern Kraft/Abstand ist. Vergleich von (1.29) und (1.30) erlaubt Umrechnung der dynamischen in die kinematischen Größen:

$$D = m\omega^2 \quad \text{oder} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.31)$$

Je stärker die Rückstellkraft, desto schneller ist die Schwingung; je größer die zu bewegende Masse, desto langsamer ist sie.

Natürlich ist die harmonische Schwingung periodisch, denn die gleichförmige Kreisbewegung ist es auch. Im Fall der Schwingung ist die **Schwingungsdauer**  $T$  die Zeit zwischen zwei Durchgängen durch den gleichen Punkt, etwa die Ruhelage, in gleicher Richtung. In Analogie mit der Kreisbewegung (vgl. (1.17)) ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}. \quad (1.32)$$

Der Kehrwert von  $T$  heißt **Frequenz** der Schwingung:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.33)$$

Was bei der Kreisbewegung Winkelgeschwindigkeit hieß, heißt bei der Schwingung **Kreisfrequenz**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.34)$$

## 1.4 Impulse und Kraftstöße

### 1.4.1 Impuls

Wir betrachten die Massenpunkte  $P$  und  $Q$ .  $Q$  möge auf  $P$  die Kraft  $\vec{F}$  ausüben, die  $P$  mit  $\ddot{\vec{r}}_P = \vec{F}/m_P$  beschleunigt. Nach dem Reaktionsprinzip erfährt  $Q$  dann gleichzeitig die Kraft  $-\vec{F}$ , die  $Q$  mit  $\ddot{\vec{r}}_Q = -\vec{F}/m_Q$  beschleunigt. Es ist also

$$m_P\ddot{\vec{r}}_P + m_Q\ddot{\vec{r}}_Q = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}. \quad (1.35)$$

Der Ausdruck  $m_P\ddot{\vec{r}}_P + m_Q\ddot{\vec{r}}_Q$ , der demnach verschwindet, ist die zeitliche Ableitung einer Größe

$$\vec{p} = m_P\dot{\vec{r}}_P + m_Q\dot{\vec{r}}_Q = \vec{p}_P + \vec{p}_Q, \quad (1.36)$$

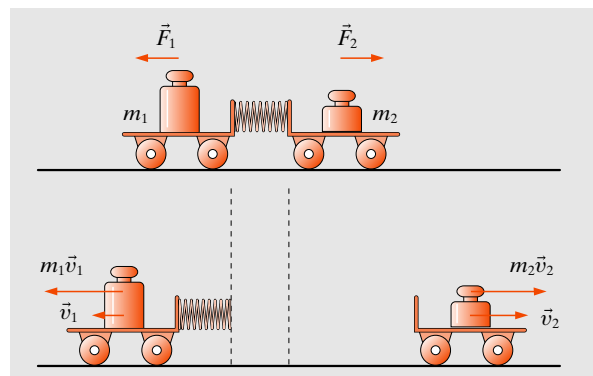
die also bei jeder Wechselwirkung zwischen  $P$  und  $Q$  erhalten bleibt. Dies lässt sich auf Wechselwirkungen zwischen beliebig vielen Massenpunkten erweitern, falls keiner dieser Massenpunkte Kräften ausgesetzt ist, die von einem Körper außerhalb dieses Systems herrühren, also falls es sich um ein **abgeschlossenes System** handelt:

#### Impulssatz

Der **Gesamtimpuls**

$$\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (1.37)$$

eines abgeschlossenen Systems aus den Massenpunkten  $m_1, m_2, \dots$  ist zeitlich konstant.



**Abbildung 1.19** Die beiden Wagen haben auch nach der Trennung noch den Gesamtimpuls 0

Der Gesamtimpuls kann also auf die Impulse der einzelnen Massenpunkte

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (1.38)$$

infolge der gegenseitigen Kraftwirkungen nur verschieden verteilt werden.

Eine wichtige Folgerung aus dem Impulssatz bezieht sich auf den **Schwerpunkt** eines Systems zweier oder mehrerer Massenpunkte. Dies ist der Punkt mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_S$ , gekennzeichnet durch die Bedingung

$$(m_P + m_Q)\vec{r}_S = m_P\vec{r}_P + m_Q\vec{r}_Q. \quad (1.39)$$

Zweimalige zeitliche Differentiation dieser Gleichung liefert

$$(m_P + m_Q)\ddot{\vec{r}}_S = m_P\ddot{\vec{r}}_P + m_Q\ddot{\vec{r}}_Q = \dot{\vec{p}}. \quad (1.40)$$

Die rechte Seite ist die Gesamtimpulsänderung, verschwindet also. Links steht die Beschleunigung des Schwerpunktes, die also auch Null ist:

### Schwerpunktsatz

Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich geradlinig-gleichförmig, unabhängig von den Bewegungen und Wechselwirkungen der Teile des Systems.

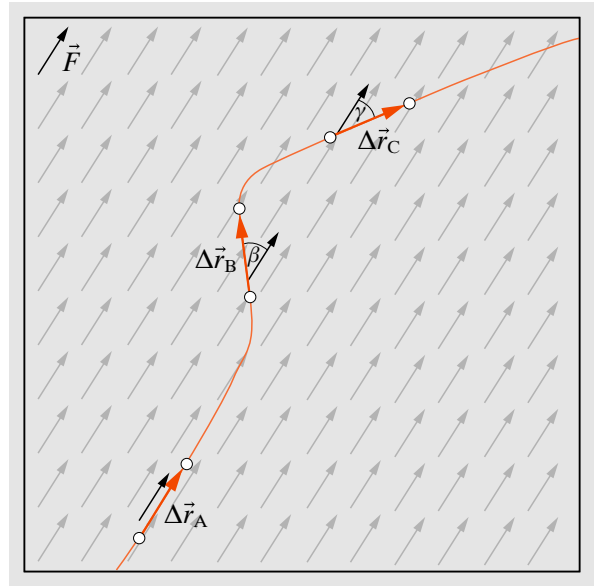
In einem Bezugssystem, das seinen Ursprung im Schwerpunkt hat (Schwerpunktsystem), ist der Gesamtimpuls aller Massen des Systems Null.

## 1.5 Arbeit, Energie, Leistung

Manchmal braucht man den zeitlichen Ablauf der Bewegung nicht zu kennen, um Aussagen über Anfangs- und Endzustand zu machen. Mathematisch entspricht das einer Integration.

### 1.5.1 Arbeit

Der physikalische Arbeitsbegriff entwickelte sich aus dem Studium der Kraftübertragung durch Hebel, Seile und Rollen. Man stellt dabei fest, dass sich durch eine geeignete Übersetzung zwar „Kraft gewinnen“ lässt, d. h. dass man um einen gewissen Faktor weniger Kraft aufzuwenden braucht als schließlich auf die zu bewegende Last wirkt, dass man aber dann mit dem Angriffspunkt dieser Kraft



**Abbildung 1.20** Berechnung der Arbeit in einem homogenen Kraftfeld. Das gerade Wegstück  $\Delta\vec{r}_A$  liegt parallel zur Kraft, dort gilt  $W_A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_A = F \Delta r_A$ . Die Abschnitte  $\Delta\vec{r}_{B,C}$  dagegen bilden einen Winkel. Dann wird die Arbeit mit dem Skalarprodukt  $W_B = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_B = F \Delta r_B \cos \beta$  berechnet

einen um den gleichen Faktor größeren Weg zurückzulegen hat als die Last. Umgekehrt kann man „Weg gewinnen“, muss dann aber an Kraft zusetzen. In jedem Fall gibt es also – abgesehen von Reibungsverlusten – eine Größe, die bei einer derartigen Kraftübertragung erhalten bleibt, nämlich das Produkt Kraft · Weg („Goldene Regel der Mechanik“).

Es ist zweckmäßig, dieser Größe einen Namen beizulegen und zu definieren:

Wenn eine konstante Kraft  $\vec{F}$  den Massenpunkt, auf den sie wirkt, um die Strecke  $\Delta\vec{r}$  in ihrer eigenen Richtung verschiebt, führt sie ihm die **Arbeit**  $W$  zu:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \Delta r. \quad (1.41)$$

Diese Definition kann in zwei Richtungen verallgemeinert werden:

- Berücksichtigung des vektoriellen Charakters von Kraft und Verschiebung: Stimmen die Richtungen von Kraft  $\vec{F}$



und Verschiebung  $\Delta \vec{r}$  nicht überein, so resultiert eine Arbeit nur aus der Komponente von  $\Delta \vec{r}$  in Richtung von  $\vec{F}$ . Negativ ausgedrückt: Eine Kraft leistet keine Arbeit auf einen Massenpunkt, der sich senkrecht zu ihr bewegt (Abb. 1.21). Diese Tatsachen werden genau durch das Skalarprodukt von  $\vec{F}$  und  $\Delta \vec{r}$  ausgedrückt:

$$W = F \Delta r \cos(\vec{F}, \Delta \vec{r}) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} . \quad (1.42)$$

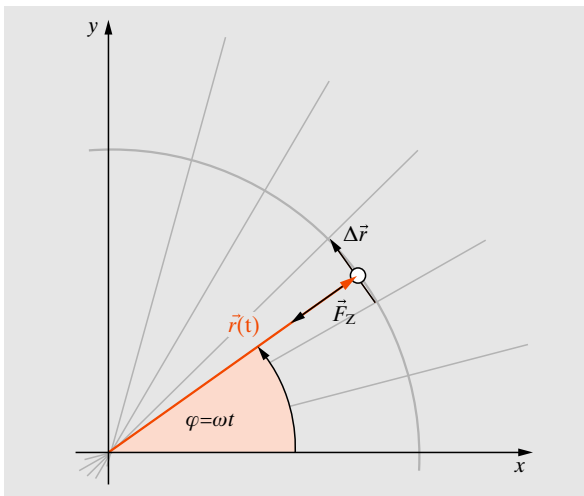
- Ändert sich die Kraft längs des Weges oder ist dieser gekrümmt, so ist die Definition (1.41) nicht mehr direkt anwendbar. Jedenfalls erwartet man ein besseres Resultat, wenn man den Gesamtweg in mehrere Teile zerlegt, die einigermaßen gerade sind und auf denen die Änderung der Kraft unwesentlich ist. Auf jedem solchen Wegelement  $\Delta \vec{r}$  fällt dann der Arbeitsanteil

$$\Delta W \approx \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

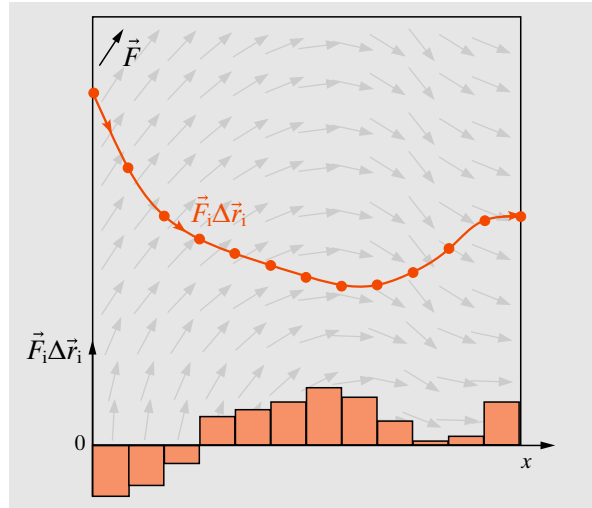
an. Für den Gesamtweg addieren sich diese Anteile:

$$W \approx \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} .$$

Das Verfahren wird i. Allg. umso genauer, je feiner die Unterteilung ist. In fast allen physikalisch wesentlichen Situationen existiert der Grenzwert für unendlich feine Unterteilung, der genau der mathematischen Definition des



■ **Abbildung 1.21** Bei der gleichförmigen Kreisbewegung steht die Zentripetalkraft jederzeit senkrecht auf der Bahn des Körpers: Es wird keine Arbeit geleistet



■ **Abbildung 1.22** Die Arbeit als Wegintegral der Kraft. Hier wurde das Integral durch gerade Stücke zwischen den Stützstellen angenähert

Linienintegrals entlang der Kurve  $C$  entspricht,

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} . \quad (1.43)$$

#### BEISPIEL

Bestimmen Sie Leistung, Arbeit und Kraft bei folgenden Tätigkeiten: Treppensteigen, Kniebeugen, Klimmzug, Loch graben.

Wenn man seine 75 kg in 15 s bis zum 4. Stock (ca. 16 m) hochbringt, hat man  $12\,000 \text{ N m} = 12\,000 \text{ J}$  bzw. 800 W aufgebracht. Kniebeuge in 1/2 s (Hebung um 0,7 m): 1,05 kW. Klimmzug (0,3 m in 1 s): 250 W. Die Erde ( $1 \text{ m}^3$  oder ca. 2000 kg) muss im Durchschnitt mindestens um 1 m gehoben werden. Rein physikalisch ist die Leistung kläglich: 20 000 J in 1 h: 5,6 W!

Für eine Bewegung auf einer Geraden mit veränderlicher Kraft  $F(x)$  lässt sich  $W$  als die Fläche unter der Kurve  $F(x)$  darstellen. Für eine krummlinige Bewegung trägt man als Abszisse die Bogenlänge, als Ordinate die Kraftkomponente in Kurvenrichtung auf.

Die Einheit der Arbeit ergibt sich aus dieser Definition:

$$1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N m} = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} .$$

### 1.5.2 Kinetische Energie

In der obigen Definition haben wir die Aussage zu rechtfertigen, die Arbeit werde dem Massenpunkt zugeführt. Das impliziert, dass sie noch in ihm steckt und sich auch wieder entnehmen lässt. Wenn der Massenpunkt durch die Kraft beschleunigt worden ist, müsste er also die Arbeit in Form von Bewegung mitführen. Zunächst sei angenommen, die Beschleunigung sei von der Ruhe aus über eine Strecke  $x$  gleichmäßig erfolgt, also durch eine konstante Kraft  $F$ , die definitionsgemäß auf der Strecke  $x$  die Arbeit  $W = Fx$  leistet. Nach dieser Beschleunigungsstrecke hat der Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{\frac{2Fx}{m}} = \sqrt{\frac{2W}{m}}$$

erreicht (vgl. (1.13)). Nach  $W$  aufgelöst, ergibt sich

$$W = \frac{m}{2} v^2 = E_{\text{kin}} . \quad (1.44)$$

In dieser Form, als **kinetische Energie**, steckt also die Beschleunigungsarbeit im bewegten Massenpunkt.

Von den Beschränkungen des speziellen Beschleunigungstyps kann man sich freimachen, entweder indem man einfach sagt: Wenn der Arbeitsbegriff überhaupt einen Sinn hat, muss es ganz gleichgültig sein, auf welche Weise – gleichmäßig oder nicht – der Betrag  $W$  zustande gekommen ist; oder, ohne diese Rückversicherung bei der „Goldenen Regel“, mit Hilfe der Vektorrechnung: Für jeden Beschleunigungsvorgang gilt natürlich das Aktionsprinzip  $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ . Diese Gleichung kann man beiderseits mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  skalar multiplizieren:

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} . \quad (1.45)$$

Links steht die in der Zeiteinheit auf den Massenpunkt geleistete Arbeit; der Ausdruck rechts ist nach den Differenzierungsregeln die zeitliche Ableitung des Ausdrucks  $\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} . \quad (1.46)$$

Die geleistete Arbeit findet sich stets als Zunahme von  $\frac{1}{2} m v^2 = E_{\text{kin}}$ , der kinetischen Energie, wieder.

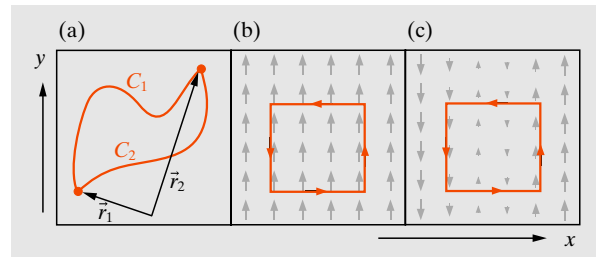
Es bleibt noch nachzuweisen, dass diese kinetische Energie eines Massenpunktes  $P$  als Arbeit verfügbar ist, um als Arbeit wieder abgegeben zu werden. Dafür ist der Begriff der potentiellen Energie hilfreich.

### 1.5.3 Kraftfelder

Wenn die Kraft auf einen Massenpunkt nur von dem Ort  $\vec{r}$  abhängt, wo er sich befindet (und evtl. von der Zeit, nicht aber z. B. direkt von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$ ), also wenn  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , so sagt man, in dem betreffenden Raumgebiet herrsche ein **Kraftfeld**  $\vec{F}(\vec{r})$ . Bei der Verschiebung des Massenpunktes in diesem Kraftfeld von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$  ist die Arbeit

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_{C(\vec{r}_1, \vec{r}_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

zu leisten (vgl. (1.43)). Diese Arbeit hängt i. Allg. nicht nur vom Start- und Zielort der Verschiebung ab, sondern auch von dem Weg, auf dem sie erfolgt. Jedoch tritt diese Komplikation in vielen wichtigen Feldern, wie dem Gravitationsfeld oder elektrostatischen Feld, *nicht* auf, d. h.  $W$  ist dort allein eine Funktion von Start- und Zielort,  $W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Anders ausgedrückt: In einem solchen Feld ist die Gesamtarbeit für jeden abgeschlossenen Weg Null  $\oint_{C_1+C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  (Abb. 1.23). Felder, für die das zutrifft, heißen **Potentialfelder** oder **konservative Felder**. Nur in ihnen gilt der Energieerhaltungssatz. Der Gegensatz zu konservativ ist **dissipativ**.



**Abbildung 1.23** (a) In einem Potentialfeld oder konservativen Kraftfeld hängt das Wegintegral der Arbeit nicht vom konkreten Weg  $1 \rightarrow 2$  ab, das geschlossene Integral muss verschwinden. Das homogene Kraftfeld in (b) ist konservativ, das inhomogene in (c) nicht

### 1.5.4 Potentielle Energie

Hebt man nahe dem Erdboden einen Körper der Masse  $m$  um die Höhe  $h$ , so leistet man gegen die Schwerkraft  $mg$  eine Arbeit. Sie steckt ebenfalls als Energie in dem Körper; man kann sie z. B. jederzeit in ebenso viel kinetische Energie verwandeln, indem man den Körper fallen lässt. Daher heißt  $mgh$  die **potentielle Energie des Körpers im Erdschwerefeld**, bezogen oder normiert auf den Ort, von dem die Hebung begann:

$$E_{\text{pot}} = mgh .$$

Das lässt sich verallgemeinern: Wenn man bei der Ermittlung der Arbeit  $W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  immer vom gleichen Ort  $\vec{r}_1$  ausgeht, aber den Zielort  $\vec{r}_2$  variiert, ist natürlich  $W$  eine Funktion von  $\vec{r}_2$  allein. Man nennt sie die **potentielle Energie**  $E_{\text{pot}}(\vec{r}_2)$ , normiert auf den Ort  $\vec{r}_1$ . Es gibt also so viele verschiedene **Normierungen** der potentiellen Energie, wie es verschiedene Startorte gibt. Zwei solche Normierungen für die Startorte  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}'_1$  unterscheiden sich aber nur um eine konstante additive Größe, nämlich die Arbeit  $W(\vec{r}'_1, \vec{r}_1)$ :

$$\begin{aligned} E_{\text{pot} \vec{r}'_1}(\vec{r}) &= W(\vec{r}'_1, \vec{r}) = W(\vec{r}'_1, \vec{r}_1) + W(\vec{r}_1, \vec{r}) \\ &= E_{\text{pot} \vec{r}_1}(\vec{r}) + W(\vec{r}'_1, \vec{r}_1) . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Man benutzt gelegentlich auch Normierungen, bei denen diese additive Konstante einen willkürlichen, gar keinem möglichen Startort entsprechenden Wert hat, der nur durch die mathematische Zweckmäßigkeit bestimmt ist. Das kann man tun, weil physikalisch letzten Endes nur *Differenzen* zwischen den potentiellen Energien zweier Orte interessieren; bei der Bildung dieser Differenz fällt die additive Konstante fort.

Die potentielle Energie hat den großen formalen Vorteil, dass sie das Kraftfeld genauso erschöpfend beschreibt wie die Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$ , obwohl sie als Skalar sehr viel einfacher ist als der Vektor  $\vec{F}$ . Man kann nämlich, wenn nur das Skalarfeld  $E_{\text{pot}}(\vec{r})$  gegeben ist, die Kraft einfach durch Gradientenbildung gewinnen:

$$\vec{F} = -\text{grad} E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r}) . \quad (1.48)$$

Die **Gradientenoperation** (kurz: Gradient; mathematische Symbole **grad** bzw.  $\vec{\nabla}$ ) ist die Umkehrung des Linienintegrals, das nach (1.43) von  $\vec{F}(\vec{r})$  auf  $W$  oder  $E_{\text{pot}}$  führt.

#### ▼ Mathematischer Hinweis

Der **Nabla-Operator** ermöglicht eine kompakte Schreibweise für Operationen der Vektoranalysis:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \quad (1.49)$$

Anschaulich bedeutet (1.48) Folgendes: An jedem Ort zeigt die Kraft in die Richtung, in der  $E_{\text{pot}}$  am schnellsten *abnimmt* (deswegen auch das Minuszeichen in (1.48)). Die Kraft ist gleich dem Gefälle des  $E_{\text{pot}}$ -Gebirges in dieser Falllinie. In allen anderen Richtungen nimmt  $E_{\text{pot}}$  langsamer ab, und entsprechend kleiner ist die Kraftkomponente in diesen Richtungen. Sie ist Null in jeder der unendlich vielen Richtungen senkrecht zur Falllinie, weil sich  $E_{\text{pot}}$  in einer solchen Richtung nicht ändert. Das alles gilt für sehr kleine Verschiebungen. Allgemein sind sowohl die Falllinien oder **Feldlinien** als auch die Flächen konstanter  $E_{\text{pot}}$ , die **Niveauflächen** des Feldes, gekrümmt. Richtig bleibt, dass die Feldlinien die Niveauflächen senkrecht schneiden, d. h. ihre **Orthogonaltrajektorien** sind.

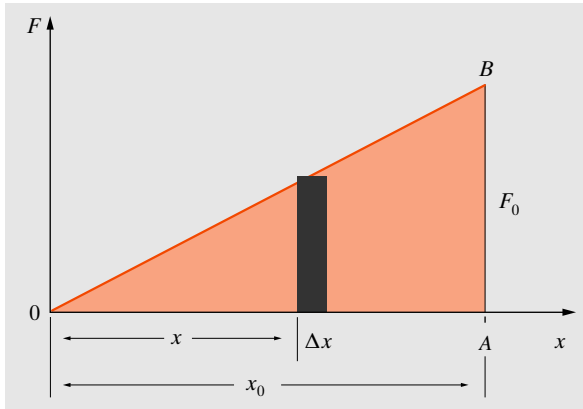
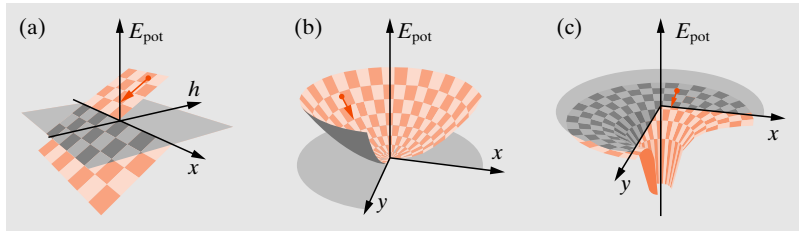
Zur graphischen Darstellung eines Potentialfeldes genügt es, hinreichend viele Niveauflächen zu zeichnen und an jede den dort herrschenden  $E_{\text{pot}}$ -Wert zu schreiben. Andererseits genügt auch die Angabe hinreichend dicht liegender Feldlinien, falls man – z. B. durch die Dichte dieser Feldlinien – die Größe der Kraft angibt.

Besonders wichtig sind Zentralkräfte, bei denen die Kraft nur vom Abstand von einem Zentrum (oder einem zweiten Massenpunkt) abhängt ((b) und (c) in Abb. 1.24).

Wechselwirkungen zwischen zwei Massenpunkten sind fast immer so beschaffen, dass die Kräfte zwischen beiden in Richtung ihrer Verbindungslinie wirken. Dies ist schon aus Symmetriegründen klar: Wenn sich im Raum nur die beiden Massenpunkte befinden, gibt es nur *eine* ausgezeichnete Richtung, die ihrer Verbindungslinie. Alle Richtungen senkrecht dazu z. B. sind völlig gleichberechtigt, und es ist nicht einzusehen, warum die Kraft in eine davon zeigen sollte. Wenn einmal eine seitliche Kraft zwischen zwei Körpern auftritt (z. B. bei Kreiselwirkungen oder magnetischen Ablenkungen durch einen Stromleiter), handelt es sich bestimmt nicht um die Wechselwirkung zweier Massenpunkte, sondern ausgedehnter Körper, und daher kann die Problemstellung noch andere Richtungen auszeichnen.

Die Größe der Kraft  $\vec{F}$  auf den einen der Massenpunkte,  $P$ , darf deswegen noch jede beliebige Abhängigkeit vom

■ **Abbildung 1.24a–c** Wichtige Potentialformen: (a)  $E_{\text{pot}} \sim h$ , homogenes Kraftfeld, z. B. Schwerfeld und Plattenkondensator (Abschn. 7.1.5) (b)  $E_{\text{pot}} \sim r^2 = x^2 + y^2$ , Federpendel, harmonischer Oszillator (c)  $E_{\text{pot}} \sim -1/r$ , Gravitationspotential, Wasserstoffatom (Abschn. 15.2). Die roten Pfeile deuten die Richtung der Kräfte entlang dem Gradienten an



■ **Abbildung 1.25** Zur Berechnung der Dehnungsarbeit einer Feder

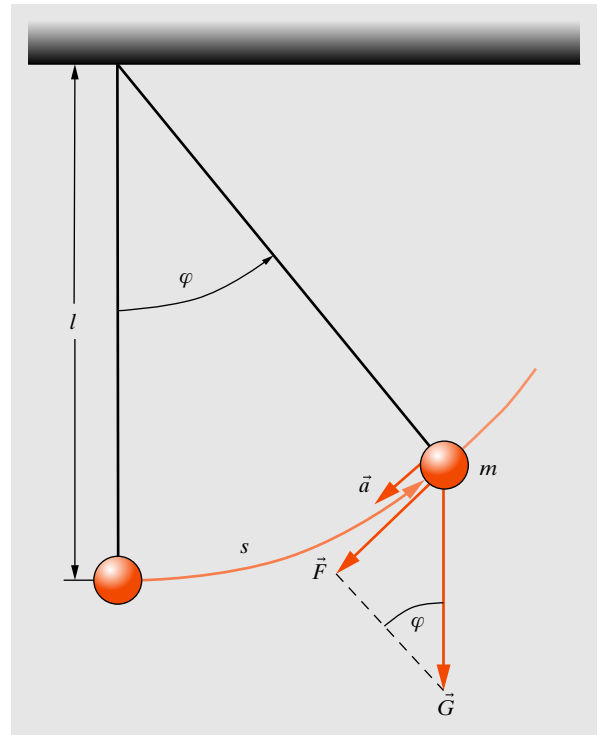
Abstand zwischen  $P$  und  $Q$  haben; sie darf zu  $Q$  hinzeigen (Anziehung) oder von ihm weg (Abstoßung).

Kräfte, die stets auf einen festen Punkt  $Z$  zeigen (gleichgültig, ob sich ein anderer Massenpunkt dort befindet, oder ob  $Z$  der Schwerpunkt des Systems  $P$ – $Q$  ist, usw.), heißen **Zentralkräfte**. Es gilt dann  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$ . Zentralkräfte sind *immer* konservativ, also mit einem Potential verbunden. Dann gilt nämlich  $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = E_{\text{pot}}(r_2) - E_{\text{pot}}(r_1)$ .

**Beispiele für potentielle Energien** (a) Das schon beschriebene Schwerfeld stellt ein konservatives, homogenes Kraftfeld dar und ist über einem kleinen Teil der Erdoberfläche (der noch als eben angesehen werden kann) und in nicht zu großer Höhe homogen wie in Abb. 1.23b. Die Niveaulflächen sind parallel zur Erdoberfläche, Feldlinien sind die Vertikalen. In Wirklichkeit nimmt die Schwerebeschleunigung mit der Höhe ab, und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes  $r$  vom Erdmittelpunkt (vgl. Abschn. 1.8).

(b) **Elastische Energie.** Eine elastische Kraft  $\vec{F} = -D\vec{r}$  ( $\vec{r}$ , die Auslenkung aus der Ruhelage  $\vec{r} = \vec{0}$ , ist hier allgemein vektoriell aufgefasst) ist als Zentralkraft konservativ. Ihre potentielle Energie (auf die Ruhelage normiert) ist

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}_0) = - \int_0^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} D r_0^2. \quad (1.50)$$



■ **Abbildung 1.26** Die rücktreibende Kraft  $\vec{F}$  beim Fadenpendel ist annähernd proportional zur Auslenkung.  $\vec{G}$  bezeichnet die zum Erdboden gerichtete Gewichtskraft

Für Bewegungen auf einer Geraden durch  $\vec{r} = \vec{0}$  ist das ohne Integration ebenso leicht herzuleiten:  $E_{\text{pot}}(x)$  ist die Fläche unter der Kurve  $F(x)$ , ein Dreieck mit der Basis  $x_0$  und der Höhe  $F_0 = Dx_0$ , also  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}Dx_0^2$ . In 3 Dimensionen sind die Niveauflächen Kugeln um  $r = 0$ , die Feldlinien sind deren Radien.

Auch das **Fadenpendel** schwingt näherungsweise wie eine Feder. Es wird auch als **mathematisches Pendel** bezeichnet, weil der Faden bei der Behandlung vernachlässigt wird und das Pendel punktförmig angenommen wird. An einem Faden der Länge  $l$  ist ein Körper der Masse  $m$  aufgehängt. Wenn man ihn um den Winkel  $\varphi$ , d. h. um die Bogenlänge  $s = l\varphi$  auslenkt, hängt er um

$$h = l(1 - \cos \varphi)$$

höher als in Ruhstellung. Solange  $\varphi$  klein ist, kann man  $\cos \varphi$  entwickeln:  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ , also

$$h \approx \frac{l\varphi^2}{2} = \frac{s^2}{2l}.$$

Die potentielle Energie

$$E_{\text{pot}} = mgh \approx mg \frac{s^2}{2l} = \frac{1}{2}Ds^2$$

ist proportional dem Quadrat des Ausschlages, also elastisch. Vergleich mit (1.50) und (1.31) liefert

$$D = \frac{mg}{l}.$$

### 1.5.5 Der Energiesatz

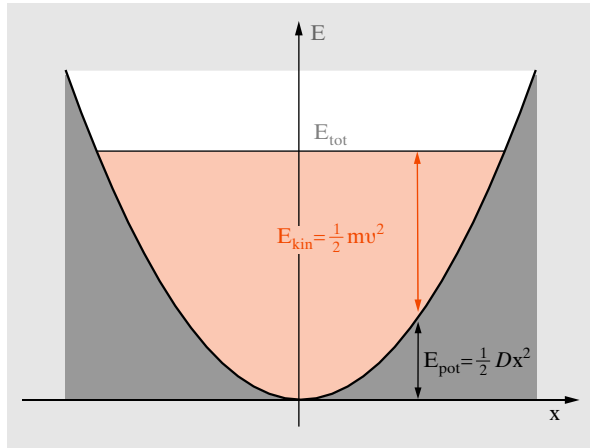
Mit Hilfe des Begriffs der potentiellen Energie schreibt sich (1.45) für die Beschleunigung eines Massenpunktes im konservativen Kraftfeld:

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -\text{grad } E_{\text{pot}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt}.$$

#### Mechanischer Energiesatz

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0. \quad (1.51)$$

Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, genannt mechanische Energie, ist in einem konservativen Kraftfeld konstant.



■ **Abbildung 1.27** Die totale Energie teilt sich auf in potentielle und kinetische Energie

Man beachte die Beschränkung auf konservative Felder. Sie war beim Impulssatz nicht nötig: Er gilt auch für dissipative, d. h. reibungsbehaftete Kräfte. Für den Energiesatz wird diese Beschränkung erst überflüssig, wenn man auch die Wärme in die Energiebilanz einbezieht, die durch die Reibung erzeugt wird. Dies geht über den Rahmen der eigentlichen Mechanik hinaus, obwohl ja auch die Wärme eine Form kinetischer Energie ist, nämlich die der ungeordneten Molekülbewegung. Die Trennung von Mechanik und Wärmelehre hat hauptsächlich rein praktische Gründe: Ein makroskopisches Objekt hat zu viele Moleküle, als dass sie sich mit den eigentlich mechanischen Methoden behandeln lassen; man muss zur statistischen Mechanik übergehen (vgl. Abschn. 3.3, Kap. 20).

Die Fallgesetze können aus dem Energiesatz hergeleitet werden. Da wir diese Gesetze (besonders (1.25) aber schon zur Ableitung des Energieausdrucks benutzt haben, wäre dies rein logisch ein Zirkelschluss. Praktisch bietet aber der Energiesatz für die schnelle Lösung von Fall- und Wurfproblemen große Vorteile.

#### BEISPIEL

Energiesatz und Schwingungen.

Da das Feld  $\vec{F} = -Dr\vec{e}_r$ , als Zentralfeld konservativ ist, bleibt die Gesamtenergie  $E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$  konstant. Allein daraus können wir die Form der Bewegung ohne explizite Be-

nutzung der Bewegungsgleichung herleiten. Für eine radial schwingende Masse mit der Auslenkung  $x$  ist

$$E = \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \text{const.} \quad (1.52)$$

Gesucht ist also eine Funktion  $x(t)$ , deren Ableitung  $\dot{x}$ , quadriert, sich mit  $x^2$  in jedem Moment nach (1.52) zu einer Konstanten ergänzt. Gleichung (1.52) erinnert an den trigonometrischen Pythagoras  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , und  $\cos \alpha$  ist tatsächlich die Ableitung von  $\sin \alpha$ . Der Ansatz  $\alpha = \omega t$  mit  $\omega = \sqrt{D/m}$  befriedigt (1.52) vollkommen:

$$E = \frac{1}{2} Dx_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} m v_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} Dx_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2. \quad (1.53)$$

Für das Fadenpendel können wir durch Vergleich die Schwingungsfrequenz und Periode bestimmen,

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels hängt (für kleinere Ausschläge) nicht von der Amplitude ab, sondern nur von Pendellänge und Erdbeschleunigung. Diskussion für größere Amplituden: Aufgabe 1.3e.16, Abschn. 5.2.1.

### 1.5.6 Leistung

Ein weiterer Begriff ist stillschweigend schon im Zusammenhang mit (1.45) aufgetaucht, nämlich die

**Leistung**, d. h. die Arbeit oder Energieänderung *pro Zeiteinheit*. Man misst sie im SI in der Einheit

$$1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ W} = 1 \text{ Watt}.$$

Aus (1.45) und (1.46) ergibt sich, dass Leistung = Kraft · Geschwindigkeit ist:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.54)$$

### 1.5.7 Drehimpuls und Flächensatz

Für einen Massenpunkt in einem Zentralfeld gilt ein weiterer Erhaltungssatz, der **Flächensatz**. Er verallgemeinert

sich für ein abgeschlossenes System von Massenpunkten zum **Drehimpulssatz** (s. Abschn. 2.3.5).

Der Massenpunkt  $P$  befinde sich in einem Zentralfeld, um dessen Herkunft wir uns zunächst nicht zu kümmern brauchen. Den festen Punkt  $Z$ , auf den die Kraft immer zeigt, erklären wir naturgemäß zum Ursprung. Wir nehmen wieder die Bewegungsgleichung auf (1.6) und multiplizieren sie diesmal *vektoriell* mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{F}} = \vec{r} \times m \ddot{\vec{r}}.$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt, ist  $\vec{F}$  parallel zu  $\vec{r}$ ; das Vektorprodukt paralleler Vektoren verschwindet aber, also

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}.$$

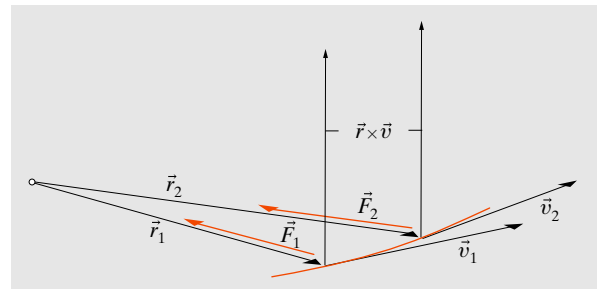
Nun ist  $m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$  identisch mit der zeitlichen Ableitung der Größe  $m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ :

$$\frac{d}{dt} (m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}},$$

denn das Produkt  $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}$  verschwindet als Produkt paralleler Vektoren ebenfalls.

Für die Größe  $\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ , den **Drehimpuls** des Massenpunktes  $P$  in Bezug auf das Zentrum  $Z$ , gilt also: In einem Zentralfeld ist der Drehimpuls eines Massenpunktes konstant (**Flächensatz**).

Der Drehimpuls ist ein Vektor. Die Konstanz seiner Richtung bedeutet, dass die Bahn des Massenpunktes in einer Ebene senkrecht zu dieser Richtung liegt (also z. B. keine Schraubenlinie sein kann). Wegen der Definition eines Vektorprodukts, wie  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ , liegen nämlich sowohl  $\vec{r}$



■ **Abbildung 1.28** Flächensatz: Eine Zentralkraft verändert den Drehimpuls  $m \vec{r} \times \vec{v}$  nicht



als auch  $\dot{\vec{r}}$  immer senkrecht zu ihm, spannen also in jedem Zeitpunkt die gleiche Ebene senkrecht zu  $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  auf. Die Konstanz der Größe des Drehimpulses kann man so deuten:  $|\vec{L}|/m = rv \sin(\dot{\vec{r}}, \vec{r})$  ist genau das Doppelte der Fläche des von  $\vec{r}$  und  $\dot{\vec{r}}$  aufgespannten Dreiecks. Dieses Dreieck ist die in der Zeiteinheit vom Ortsvektor („Radiusvektor“)  $\vec{r}$  überstrichene Fläche. Diese Fläche ist also zeitlich konstant (im Spezialfall der Planetenbewegung im Zentralfeld der Sonne ist dies das 2. Kepler-Gesetz). Je näher also  $P$  an  $Z$  ist, desto größer muss seine Geschwindigkeit (genauer: ihre zu  $\vec{r}$  senkrechte Komponente) sein. Je spitzwinkliger  $\dot{\vec{r}}$  zu  $\vec{r}$  steht, desto größer muss der Betrag  $v$  sein.

### 1.5.8 Anwendungen von Energie- und Impulssatz

**a) Geschoss- oder Treibstrahlgeschwindigkeiten.** Für einen **Sprengstoff** sei die spezifische Explosionsenergie  $\eta$  gegeben, d. h. die auf die Masse  $m_S$  bezogene Energie  $E = \eta m_S$ , die bei der Explosion frei wird. Allein hieraus kann man auf die **Geschosseschwindigkeit** schließen.

Der gesamte Sprengstoff verwandelt sich im Idealfall in expandierende Explosionsgase. Das Geschoss kann nicht schneller sein als diese Gase. Mehr braucht man nicht zu wissen, speziell nichts aus der Wärmelehre. Die kinetische Energie der Gase und des Geschosses stammt aus  $\eta$ , neben zahlreichen Verlusten. Wenn  $m_G$  die Geschossmasse ist, ergibt sich die Maximalgeschwindigkeit von Explosionsgasen und Geschoss

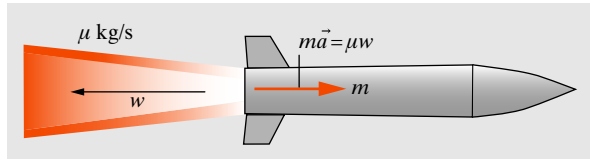
$$v = \sqrt{\frac{2m_S}{m_S + m_G}} \eta.$$

Ein typischer Wert für moderne Sprengstoffe ist  $\eta = 4 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , folglich  $v \lesssim 2 \text{ km/s}$ .

Für einen Brennstoff und die Maximalgeschwindigkeit seiner z. B. zum **Düsenantrieb** verwendeten Verbrennungsgase gilt eine ähnliche Betrachtung, nur ist hier die Masse des Oxidationsmittels (meist  $\text{O}_2$ ) einzubeziehen, da sie in den Verbrennungsgasen mit beschleunigt werden muss.

Man beachte, wie sehr zweckmäßige Maßeinheiten alles vereinfachen. Die Einfachheit der Betrachtung und des Ergebnisses sollte allerdings nicht über die für eine genaue Rechnung notwendigen Präzisierungen hinwegtäuschen.

**b) Raketenphysik.** Eine **Rakete** der Masse  $m$ , die im leeren, kräftefreien Raum fliegt, stoße in der Zeit  $dt$  eine Treibstoffmasse  $dm$  mit der Geschwindigkeit  $w$ , also mit dem



■ **Abbildung 1.29** Raketenantrieb

Impuls  $w dm$  aus. Da der Gesamtimpuls konstant bleibt, muss die Rakete selbst den entgegengesetzt gleichen Impuls aufnehmen, der ihre Geschwindigkeit  $v$  um  $dv$  erhöht:  $w dm = -m dv$ , oder nach Division durch  $dt$

$$-w \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (1.55)$$

Das Minuszeichen stammt nicht aus den Geschwindigkeitsrichtungen, sondern aus  $dm$ , das als Massenänderung der Rakete negativ zu nehmen ist. (1.55) stellt die effektive Kraft auf den Raketenkörper dar, die technisch Schub genannt wird: Der **Schub** ist das Produkt von Ausströmrate  $-dm/dt$  und Ausströmgeschwindigkeit  $w$ .

Bei dem Massenverlust  $dm/dt$  nimmt die Raketenmasse vom Anfangswert  $m_0$  auf  $m$  ab, um die Geschwindigkeit  $v$  zu erreichen. Aus (1.55) folgt bei konstantem  $w$ :

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{w} \frac{dv}{dt},$$

d. h. integriert

$$\ln \frac{m}{m_0} = -\frac{v}{w} \quad \text{oder} \quad m = m_0 e^{-v/w}. \quad (1.56)$$

Nur noch eine Nutzlast  $m = m_0 e^{-v/w}$  fliegt mit  $v$  weiter. Der Rest ist als Treibgas verpufft. Da technisch ein Massenverhältnis  $m_0/m \approx 6$  von voll getankter zu leerer Maschine kaum zu überschreiten ist, ergibt sich für die Brennschlussgeschwindigkeit der Einstufenrakete  $v \approx 2w$ .

Die üblichen Treibstoffgemische (Brennstoff plus Oxidationsmittel) haben spezifische Energien  $\eta$  zwischen  $10^7$  und  $2 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$  ( $\text{O}_2$  ist zu berücksichtigen). Bei verlustfreier Umwandlung in kinetische Energie ergäbe sich  $w = \sqrt{2\eta} \approx 4 \cdot 10^3$  bis  $6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ . Die kinetische Gastheorie (s. Kap. 3, 6) zeigt, dass dies Temperaturen von über  $10\,000^\circ\text{C}$  entspräche, die keine Brennkammer aushielte;  $w$  ist in Wirklichkeit nur etwa halb so groß. Ohne das Stufenprinzip brächte man also nicht einmal Erdsatelliten auf die Bahn.

**c) Propeller- und Düsenantrieb.** Etwas vereinfachend kann man sagen: Beim **Propellerantrieb** wird der Energieinhalt  $\eta$  des Treibstoffs ausgenutzt, beim **Düsenantrieb** sein Impulsinhalt. Warum zieht man für hohe Fluggeschwindigkeiten die Düse, für kleine den Propeller vor?

Wir vergleichen die bei den beiden Antriebsarten durch Verbrennung von  $\mu$  kg Treibstoff pro Sekunde erzielten Beschleunigungen. Beim Propellerantrieb wird ein Bruchteil  $\gamma$  des Energieinhaltes in  $E_{\text{kin}}$  des Flugzeuges umgesetzt. Der Gesamtwirkungsgrad  $\gamma$  ist nicht viel größer als 0,1, denn als Wärmekraftmaschine hat der Motor einen Wirkungsgrad von höchstens 20–30%, und die Verluste an der Luftschraube sind auch erheblich. Die nutzbare Leistung ist, wenn  $m$  und  $v$  Flugzeugmasse und -geschwindigkeit sind:  $P_p = \gamma\eta\mu = Fv = m\dot{v}v$ . Für konstante Beschleunigung muss der Treibstoffeinsatz mit der Geschwindigkeit wachsen,

$$\dot{v}_p = \frac{\gamma\eta}{m} \frac{\mu}{v}.$$

Beim Düsenantrieb wird der maximale Schub, entsprechend dem Ausstoß der Verbrennungsgase mit der maximal möglichen Geschwindigkeit  $w = \sqrt{2\eta}$ , in modernen Triebwerken fast erreicht. Nach dem Impulssatz ist dann

bei Ausstoß von  $\mu$  kg Verbrennungsgas pro Sekunde

$$m\dot{v} = \mu w = \mu\sqrt{2\eta} \quad \text{oder} \quad \dot{v}_D = \sqrt{2\eta} \frac{\mu}{m}.$$

Das Verhältnis der Beschleunigungen (und der Leistungen)

$$\frac{\dot{v}_D}{\dot{v}_p} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\eta}} v$$

ist umso günstiger für die Düse, je schneller das Flugzeug ist. Oberhalb der Geschwindigkeit  $v_{\text{kr}} = \gamma\sqrt{\frac{\eta}{2}}$  ist die Düse ökonomischer, unterhalb der Propeller. Mit vernünftigen Werten erhält man Übergangsgeschwindigkeiten um 1000 km/h.

**d) Durchschlagskraft von Geschossen.** Die folgende Betrachtung stammt von *Newton*: Ein Geschoss mit der Masse  $m$ , der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $A$  schlägt in ein Medium ein und erzeugt darin einen Kanal. Welche Länge  $L$  kann dieser haben?

Das Geschoss hat zwei Arbeiten zu leisten, nämlich Arbeit gegen die Kohäsionskräfte des Mediums und Beschleunigungsarbeit: Die Substanz des Kanals muss ausweichen und dazu auf die Geschwindigkeit des Geschosses selbst gebracht werden. Müsste die ganze Masse im Kanal,  $m_k = AL\rho_m$  ( $\rho_m$  Dichte des Mediums) auf die Geschwindigkeit  $v$  gebracht werden, so wäre ihr die kinetische Energie  $\frac{1}{2}AL\rho_m v^2$  zuzuführen. Diese darf höchstens gleich der Geschossenergie  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Al\rho v^2$  sein ( $\rho$  Dichte des Geschossmaterials), also ergibt sich für die durchschlagene Länge

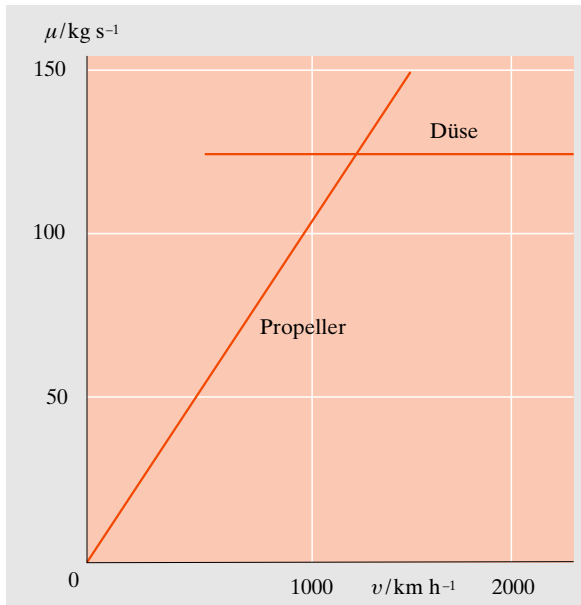
$$L = l \frac{\rho}{\rho_m}. \quad (1.57)$$

Das Geschoss dringt etwa so viele seiner eigenen Längen ein, wie seine Dichte größer ist als die des Mediums.

Die überraschende Unabhängigkeit von seiner Geschwindigkeit gilt allerdings nur für so hohe  $v$ , dass die Kohäsionsenergie gegen die kinetische zu vernachlässigen ist.

### 1.5.9 Stoßgesetze

Ein **Stoß** ist eine sehr kurzzeitige Wechselwirkung zwischen zwei Körpern (nicht Massenpunkten, denn die könnten einander gar nicht finden, da sie definitionsgemäß unendlich klein sein sollen). Vor und nach dem Stoß



**Abbildung 1.30** Propeller- und Düsenantrieb: Treibstoffbedarf für eine Beschleunigung  $a$  in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit. Zahlenwerte für  $a = 1 \text{ m/s}^2$ , Startmasse 120 t

bewegen sich beide, ohne einander zu beeinflussen. Sind sonst keine Kräfte zu berücksichtigen, so fliegen daher beide Körper vor und nach dem Stoß mit den konstanten Geschwindigkeiten

vor dem Stoß:  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}'$ ; nach dem Stoß:  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$ .

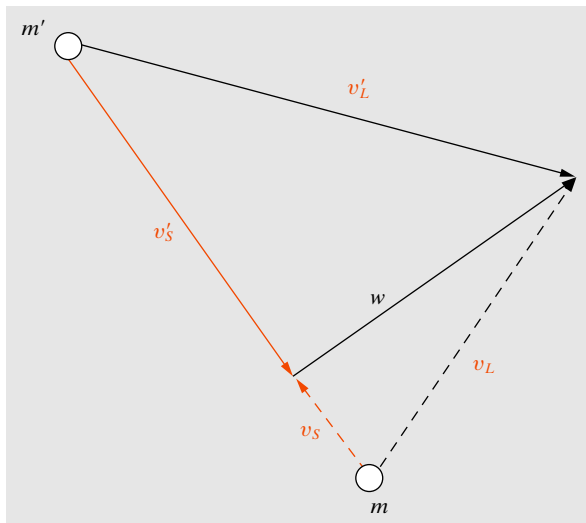
Der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß ist derselbe:

$$\boxed{m\vec{v} + m'\vec{v}' = m\vec{u} + m'\vec{u}'}.$$

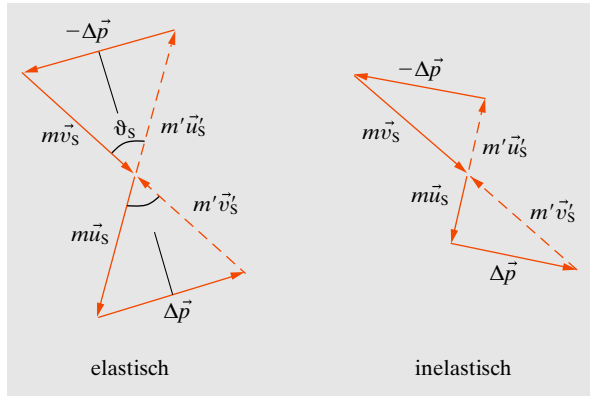
Wenn der Stoßvorgang keine Energie verzehrt, also elastisch ist (das Wort ist hier nicht auf elastische Kräfte im Sinne von  $F = -kx$  beschränkt, sondern umfasst alle konservativen Kräfte), bleibt auch die Energie erhalten:

$$mv^2 + m'v'^2 = mu^2 + m'u'^2.$$

Besonders übersichtlich sind die Verhältnisse im **Schwerpunktsystem** (S-System, Abb. 1.31), d. h. wenn der Ursprung sich ebenso relativ zu dem ruhenden **Laborsystem** (L-System) bewegt wie der Schwerpunkt der beiden Körper. Dann ist und bleibt der Gesamtimpuls Null (Abschn. 1.4.1), also vor dem Stoß:  $m\vec{v}_S = -m'\vec{v}'_S$ , nach dem Stoß:  $m\vec{u}_S = -m'\vec{u}'_S$  (Abb. 1.32). Die Erhaltungssätze sagen noch nichts über den **Streuwinkel**  $\vartheta_S$  zwischen  $\vec{v}_S$  und  $\vec{u}_S$



■ **Abbildung 1.31** Teilchengeschwindigkeiten im Laborsystem (L) und im Schwerpunktsystem (S).  $\vec{w}$  ist die Schwerpunktgeschwindigkeit



■ **Abbildung 1.32** Schwerpunktsystem: Impulse und Impulsüberträge beim elastischen und beim inelastischen Stoß

bzw.  $\vec{v}'_S$  und  $\vec{u}'_S$ . Er wird bestimmt durch die Einzelheiten des Stoßprozesses (Form der Körper, Lage, in der sie sich treffen, usw.). Ebenso erlaubt der **Impulssatz** noch jeden Wert des Verhältnisses  $u_S^2/v_S^2 = u'^2_S/v'^2_S$  der Energien vor und nach dem Stoß, z. B.  $u_S = u'_S = 0$ . Man sieht aber leicht, dass der **Energiesatz** dieses Verhältnis auf 1 bei elastischem Stoß und  $< 1$  bei inelastischem Stoß festsetzt.

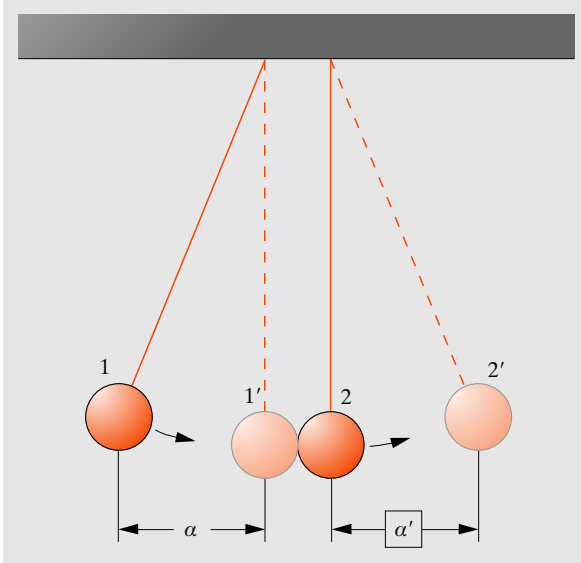
Bei elastischem Stoß sind also im S-System alle vier Impulspeile gleich lang.

Wichtig ist die **Impulsübertragung**  $\Delta\vec{p}_S = m(\vec{v}_S - \vec{u}_S)$  von einem Körper auf den anderen. Aus Abb. 1.32 liest man ihre Abhängigkeit vom Streuwinkel ab:

$$\Delta p_S = m|\vec{v}_S - \vec{u}_S| = 2mv_S \sin \frac{\vartheta_S}{2}. \quad (1.58)$$

Maximale Impulsübertragung tritt ein für  $\vartheta = \pi$  (den **zentralen Stoß**), nämlich  $\Delta p_S = 2mv_S$ . Energie wird im Schwerpunktsystem nicht übertragen, denn aus der Gleichheit der vier Impulsbeträge folgt speziell  $u_S = v_S$ , also  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2$ :  $\Delta W_S = 0$ .

Wir gehen jetzt in ein **Bezugssystem** über, in dem sich der Schwerpunkt bewegt, und zwar mit der Geschwindigkeit  $\vec{w}$ . Die in diesem System gemessenen Geschwindigkeiten gehen aus denen im Schwerpunktsystem einfach durch vektorielle Addition von  $\vec{w}$  hervor. Wir drücken Impuls- und Energieübertragung im neuen System durch die im



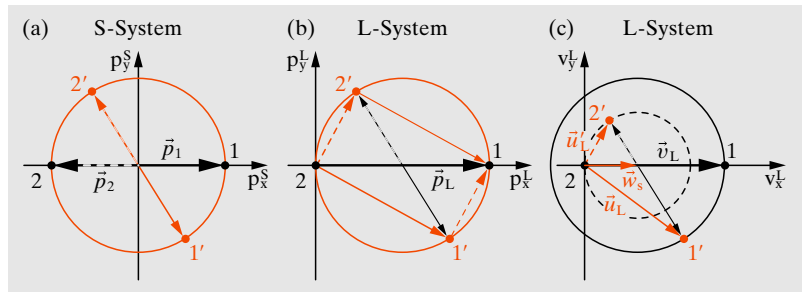
■ **Abbildung 1.33** Newtons Wiege: Elastischer Stoß zwischen zwei Pendelkugeln mit gleicher Masse und gleicher Pendelfadenlänge. Nach (1.60) gilt  $\Delta E = E$  bei  $m = m'$

Schwerpunktsystem (jetzt bezeichnet durch den Index S) aus.

$$\Delta \vec{p} = m(\vec{v}_S + \vec{w} - \vec{u}_S - \vec{w}) = m(\vec{v}_S - \vec{u}_S) = \Delta \vec{p}_S \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{1}{2} m [(\vec{v}_S + \vec{w})^2 - (\vec{u}_S + \vec{w})^2] \\ &= \frac{1}{2} m (v_S^2 - u_S^2 + 2\vec{v}_S \cdot \vec{w} - 2\vec{u}_S \cdot \vec{w} + w^2 - w^2) \\ &= \frac{1}{2} m (v_S^2 - u_S^2) + m(\vec{v}_S - \vec{u}_S) \cdot \vec{w} \\ &= \Delta W_S + \Delta \vec{p}_S \cdot \vec{w} = \Delta \vec{p} \cdot \vec{w} . \end{aligned}$$

■ **Abbildung 1.34a–c** Im Schwerpunktsystem (a) enden alle möglichen Impulsvektoren der Partner nach dem Stoß auf einer Kugel. Diese Kugel verschiebt sich nur um  $m\vec{v}$  im Laborsystem (b), wo ein Partner ruhte. Für die  $\vec{v}$ -Vektoren werden zwei konzentrische Kugeln daraus (c)



Die Impulsübertragung ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems, aber Energieübertragung und Streuwinkel hängen davon ab.

Speziell betrachten wir das Bezugssystem, in dem der Körper mit der Masse  $m'$  anfangs ruhte. Für dieses System ist  $\vec{w} = -\vec{v}'_S = m\vec{v}_S/m'$ . Der Anfangsimpuls des anderen Körpers ist  $\vec{p} = m(\vec{v}_S + \vec{w}) = m(1 + m/m')\vec{v}_S$ . Davon kann maximal  $\Delta \vec{p} = 2m\vec{v}_S$  übertragen werden, also ein Bruchteil  $\Delta p/p = 2m'/(m + m')$ . Seine Anfangsenergie ist

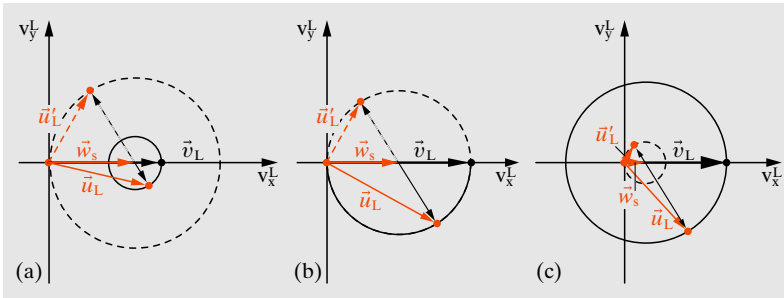
$$E = \frac{1}{2} m (\vec{v}_S + \vec{w})^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2 .$$

Davon kann maximal übertragen werden  $\Delta E = \Delta p w = 2m v_S v'_S = 2m v_S^2 m/m'$ , also ein Bruchteil

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4m/m'}{(1 + m/m')^2} = \frac{4mm'}{(m + m')^2} . \quad (1.60)$$

Man liest daraus ab: Ein leichtes Teilchen ( $m' \ll m$ ) kann einem schweren nur wenig von seinem Impuls entziehen. Die Energieübertragung ist auch im entgegengesetzten Fall  $m' \gg m$  klein. Dann prallt nämlich das leichte Teilchen mit der gleichen Geschwindigkeit, also der gleichen Energie zurück und hat zwar seinen doppelten Impuls, aber keine Energie abgegeben.

Wir bleiben weiter in dem Bezugssystem, wo die Masse  $m'$  ruht. Allgemein auch bei verschiedenen Massen kann man die Geschwindigkeitsvektoren nach dem Stoß folgendermaßen konstruieren (Abb. 1.34): Man zeichne den Vektor  $\vec{v}_L$  der Anfangsgeschwindigkeit des stoßenden Teilchens und zerlege ihn im Verhältnis  $m'/m$  in zwei Abschnitte, also bei der Schwerpunktgeschwindigkeit. Um den Teilpunkt lege man je eine Kugel durch den Anfangs- und den Endpunkt von  $\vec{v}_L$ . Nach Konstruktion sind diese Kugeln konzentrisch. Dann enden alle Vektoren der Endgeschwindigkeit des stoßenden Teilchens auf der Kugel



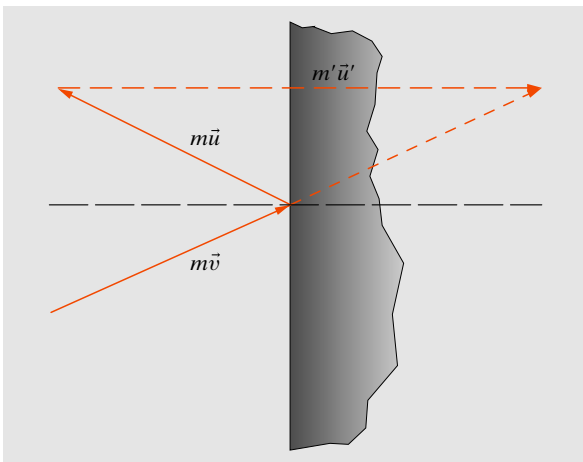
■ **Abbildung 1.35a-c** Grenzfälle elastischer Stöße für (a)  $m \gg m'$ , (b)  $m = m'$  und (c)  $m \ll m'$ . Auf dem gestrichelten Kreis liegen die Endgeschwindigkeiten des anfänglich ruhenden Partners, auf dem durchgezogenen Kreis diejenigen des stoßenden Teilchens

durch den Endpunkt von  $\vec{v}_L$ , die des gestoßenen Teilchens auf der Kugel durch den Anfangspunkt. Welche dieser Vektoren jeweils für einen bestimmten Stoß zusammengehören, entnimmt man daraus, dass  $\vec{u}_L'$  parallel zu  $\vec{v}_L - \vec{u}_L$  sein muss, oder gleichbedeutend: Die Verbindungslinie der Enden von  $\vec{u}_L$  und  $\vec{u}_L'$  muss durch die Mitte der Kugeln gehen.

Der Beweis für alle diese Tatsachen ergibt sich sofort daraus, dass im S-System die Beträge der Geschwindigkeiten durch den Stoß nicht geändert werden, dass in diesem System also bestimmt alle entsprechenden Vektoren auf Kugeln enden, und dass diese Kugeln durch den Übergang zum L-System nur um  $\vec{w}_S = \vec{v}_L m' / (m + m')$  verschoben, aber in ihrer Kugelform nicht verändert werden.

Die Grenzfälle elastischer Stöße sind interessant: Bei  $m \gg m'$  ist die  $m'$ -Kugel, auf der die  $\vec{u}_L$ -Vektoren en-

den, sehr klein (Abb. 1.35a). Man liest dann die maximalen Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens zu  $\varphi \approx m'/m$  ab, die maximale Energieübertragung (bei zentralem Stoß) zu  $\Delta E = E \cdot 4m'/m$ . Bei  $m = m'$  verschmelzen die beiden Kugeln zu einer einzigen. Dann bilden die drei Impulse (stoßendes Teilchen vor und nach dem Stoß, gestoßenes nachher) ein rechtwinkliges Thales-Dreieck (Abb. 1.35b). Bei  $m \ll m'$  wird umgekehrt die Kugel, auf der die Vektoren  $\vec{u}_L'$  enden, sehr klein, dagegen kann  $\vec{u}_L$  nach allen Richtungen zeigen und hat sich beim Stoß betragsmäßig kaum geändert (Abb. 1.35c). Maximal beim zentralen Stoß wird wieder die Energie  $\Delta E = E \cdot 4m/m'$  übertragen. Eine feste Wand (Abb. 1.36) ist als Stoßpartner unendlicher Masse  $m'$  aufzufassen.



■ **Abbildung 1.36** Eine feste Wand wirkt als Stoßpartner unendlich großer Masse

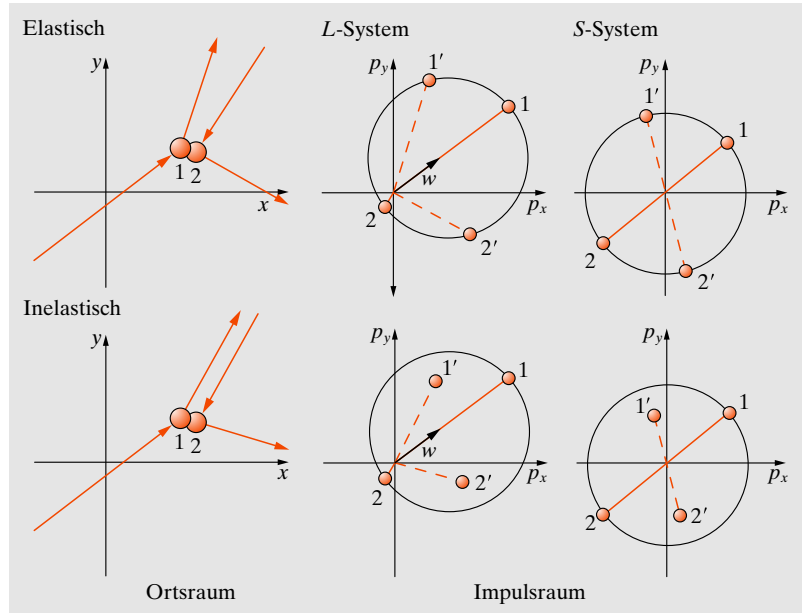
## 1.6 Phasenraum und Erhaltungssätze

### 1.6.1 Impulsraum

Ein bewegtes Objekt wird am anschaulichsten durch seine Lage als Funktion der Zeit gekennzeichnet, d. h. durch den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  oder die drei Ortskoordinaten  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Die graphische Darstellung ergibt direkt die Bahn des Objekts. Fast ebenso viel und manchmal sogar mehr sagt der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$  aus. Wenn man ihn oder seine Komponenten  $v_x(t) = \dot{x}(t)$ ,  $v_y(t) = \dot{y}(t)$ ,  $v_z(t) = \dot{z}(t)$  für alle Zeiten kennt, bleibt zwar unbekannt, wo das Objekt z. B. bei  $t = 0$  war, aber diese Anfangslage  $\vec{r}(0)$  ist für die Dynamik meist zweitrangig. Ist sie gegeben, dann legt  $\vec{v}(t)$  die Bahn genauso gut fest wie  $\vec{r}(t)$ .

Der Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$  ist physikalisch tiefgründiger als die Geschwindigkeit. Multiplikation aller Abstände mit  $m$  macht aus dem  $\vec{v}$ -Raum den **Impulsraum**, die Impulsbahn  $\vec{p}(t)$  hat bei nichtrelativistischen Bewegungen die-

■ **Abbildung 1.37** Elastischer und inelastischer Stoß im Orts- und Impulsraum

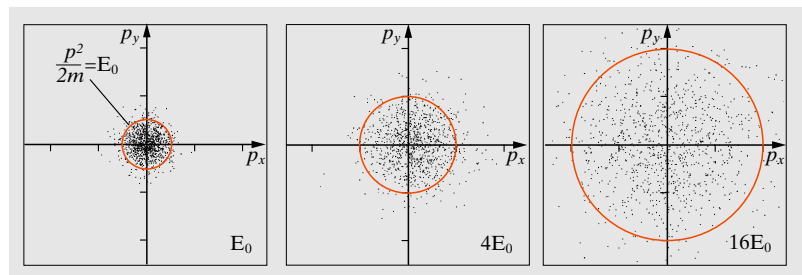


selbe Form wie  $\vec{v}(t)$ . Ein Stoß zweier Teilchen, die vorher kräftefrei flogen, sieht im Impulsraum so aus: Zwei Punkte, die vorher still lagen (geradlinig-gleichförmige Bewegung), aber evtl. ziemlich weit getrennt waren (verschiedene  $\vec{p}$ -Werte), springen plötzlich beide in die neue Lage. Die Schwäche dieses Bildes ist, dass es nicht kausal erkennen lässt, warum die Punkte springen, wie es die Ortsraumdarstellung tut. Seine Stärke liegt darin, dass sich die Bedingung für die neuen Lagen sofort ablesen lässt. Nach dem Impulssatz muss die Summe der beiden  $\vec{p}$ -Vektoren vorher und nachher dieselbe sein. Am einfachsten ist die Übersicht im Schwerpunktsystem. Dort liegen die beiden  $\vec{p}$ -Punkte gleich weit beiderseits des Ursprungs, und das muss auch hinterher so bleiben. Beim

elastischen Stoß bleiben die Abstände erhalten, nur die Richtung kann sich drehen (Abschn. 1.5.9, Abb. 1.32). Die kinetische Energie ist proportional dem Quadrat des Abstands vom Ursprung im Impulsraum:  $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ . Eine Bewegung mit konstantem  $E_{\text{kin}}$ , aber vielleicht variabler Flugrichtung verläuft immer auf der Kugelfläche  $p = \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$ .

Ein Gas wird im Ortsraum durch ein Gewimmel von Punkten dargestellt, das das ganze verfügbare Volumen gleichmäßig erfüllt. Im Impulsraum sieht das Bild ähnlich aus (Abb. 1.38). Obwohl hier keine materiellen Wände vorhanden sind, verdünnt sich die Punktwolke nach außen hin. Die  $N$  Teilchen haben nämlich eine konstante Gesamtenergie  $E$ , und keines weicht allzu sehr nach oben vom

■ **Abbildung 1.38** Ein (ideales) Gas mit 1000 Teilchen im Impulsraum mit von links nach rechts wachsender mittlerer kinetischer Energie





Mittelwert  $p^2/2m = E/N$  ab. Die  $\vec{p}$ -Punktwolke wird also nach außen hin immer dünner, besonders ungefähr von einem Abstand  $p = \sqrt{2mE/N}$  ab.  $E$  ist proportional der absoluten Temperatur  $T$  des Gases. Abbildung 1.38 legt nahe, dass sich Vielteilchensysteme durch ihre Dichten im Orts- und Impulsraum gut beschreiben lassen (vgl. Kap. 6, 20).

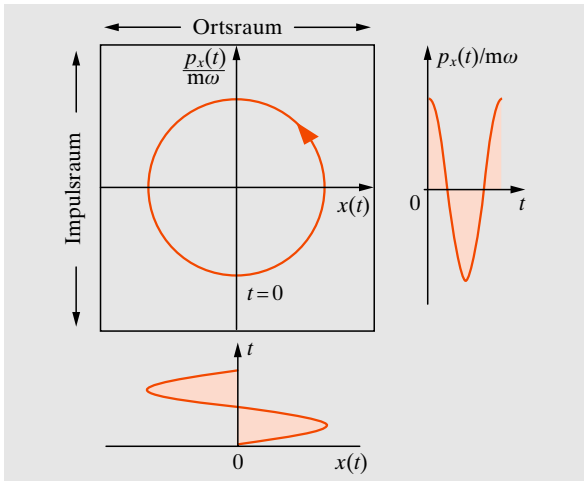
### 1.6.2 Phasenraum M

Als **Phasenraum** bezeichnen wir die Zusammenfassung von Orts- oder Konfigurationsraum und Impulsraum zu einem Raum, der pro Teilchen 6 Dimensionen besitzt. Der Bewegungszustand jedes Teilchens ist in diesem Raum vollständig durch die Phasenbahn bestimmt.

#### BEISPIEL

Phasenraumporträt eines 1-dimensionalen harmonischen Oszillators (Abb. 1.39). Die harmonische Schwingung vollführt die Bewegung  $x(t) = x_0 \sin \omega t$  bzw.  $p_x(t) = m\dot{x}(t) = m\omega x_0 \cos \omega t$ . Wählt man als normierte Koordinaten  $(x(t), p_x(t)/(m\omega))$ , ergibt sich gerade eine Kreisbahn.

Die  $3n$  Zahlen  $r_i$  eines Systems aus  $n$  Massenpunkten kann man sich als Koordinaten eines  $3n$ -dimensionalen Ortsraums denken, in dem die Lage *aller*  $n$  Teilchen durch



■ **Abbildung 1.39** Phasenraumporträt der eindimensionalen Schwingung

einen Punkt beschrieben wird. Ebenso bringt man die  $3n$  Impulse  $p_i$  in einem  $3n$ -dimensionalen Impulsraum unter. Dann ist es nur noch ein Schritt weiter, auch Orts- und Impulsraum zu einem  $6n$ -dimensionalen **Phasenraum** zusammenzufassen, in dem die momentane Lage *und* Bewegung *aller* Teilchen durch *einen* Punkt beschrieben werden können.

### 1.6.3 Hamiltons Mechanik

Wenn wir die Kräfte kennen, die von außen auf die Teilchen wirken und die diese aufeinander ausüben, können wir die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  des Systems berechnen. Sie hängt nur von den Lagen aller Teilchen ab:  $E_{\text{pot}} = f(r_i)$ . Ihre Ableitung nach der Koordinate  $r_i$  liefert die Kraft auf das entsprechende Teilchen in der angegebenen Richtung. Diese Kraft ist gleich der zeitlichen Impulsänderung:  $\partial E / \partial r_i = -F_i = -\dot{p}_i$ . Es schadet nichts, wenn man hier in  $E$  auch die kinetische Energie stehen hat, denn sie hängt nicht von  $r_i$ , sondern nur von  $\dot{r}_i$  bzw.  $p_i$  ab:  $E_{\text{kin}} = g(p_i)$ . Die  $3n$  Beziehungen für die Kräfte lassen sich zu einem  $3n$ -dimensionalen Vektor des Ortsgradienten von  $E$  zusammenfassen:  $\text{grad}_{\vec{r}} E = -\dot{\vec{p}}$ . Auch im Impulsraum kann man den Gradientenvektor von  $E$  bilden. Er hat die  $3n$  Komponenten  $\partial E / \partial p_i$ . Die Ableitung betrifft nur die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum p_i^2 / m_i$ . Es folgt  $\partial E / \partial p_i = p_i / m = \dot{r}_i$ , oder zusammengefasst  $\text{grad}_{\vec{p}} E = \dot{\vec{r}}$ .

Die Gesamtenergie eines Systems  $H(\vec{r}, \vec{p})$  hängt von den Orts- und Impulskoordinaten ab und wird **Hamilton-Funktion** genannt. Die Bewegungsgleichungen des Systems sind die Differentialgleichungen von Hamilton:

$$\boxed{\vec{\nabla}_{\vec{r}} H = -\dot{\vec{p}}, \quad \vec{\nabla}_{\vec{p}} H = \dot{\vec{r}}} \quad (1.61)$$

Wir haben bisher i. Allg. in kartesischen oder Polarkoordinaten gerechnet. Für komplexe mechanische Systeme mit **Bindungen**, z. B. für Teilchen, die nur auf bestimmten Flächen oder Kurven laufen dürfen, oder die durch starre Stangen, Fäden usw. untereinander gekoppelt sind, ist die Beschreibung mit anderen Koordinaten oft einfacher. Wenn man fragt: Wie weit ist das Teilchen auf dieser Kurve schon gerutscht, genügt eine Zahlenangabe, während man in kartesischen Koordinaten immer drei braucht. Natürlich haben die Bewegungsgleichungen in diesen neuen Koordinaten nicht mehr die einfache Newton-Form. *Hamilton, Lagrange* u. A. haben Bewegungsgleichungen gefunden, die unabhängig von der speziellen Wahl des Koordinatensystems sind und die daher oft Vorteile bei der Behandlung

mechanischer Systeme bieten. Die verallgemeinerten Paare von Orts- und Impulskoordinaten nennt man **kanonisch kanonisierte Variable**.

### 1.6.4 Invarianzen und Erhaltungssätze

Die **Hamilton-Funktion** hängt nicht von der Lage des Koordinatensystems ab, in dem man die Teilchen beschreibt. Speziell kann man den Ursprung woanders hinlegen oder das Koordinatensystem um den gegebenen Ursprung drehen oder den Zeitnullpunkt anders wählen, ohne dass sich  $E$  ändert. Diese drei **Invarianzen** sind logisch äquivalent mit den Erhaltungssätzen:

<b>Homogenität der Zeit</b>	Energieerhaltung
<b>Homogenität des Raumes</b>	Impulserhaltung
<b>Isotropie des Raumes</b>	Drehimpulserhaltung

**Homogenität der Zeit.** Die zeitliche Änderung der Hamiltonfunktion berechnet man aus  $\frac{d}{dt}H = \frac{\partial}{\partial t}H + \vec{\nabla}_{\vec{r}}H\vec{\dot{r}} + \vec{\nabla}_{\vec{p}}H\vec{\dot{p}} = \frac{\partial}{\partial t}H$ . Wenn also  $H$  nicht explizit von der Zeit abhängt, ist  $\dot{E} = 0$ , es gilt der Energiesatz.

**Homogenität des Raumes.** Wir verschieben den Ursprung um  $\delta\vec{r}$ , ersetzen die Ortsvektoren  $\vec{r}_i$  der Teilchen durch  $\vec{r}_i - \delta\vec{r}$ . Dabei soll sich  $E$  nicht ändern, soll also nur von der *relativen* Lage der Teilchen abhängen, was vernünftig ist. Die Änderung  $\delta E = \sum_i (\partial E / \partial r_i) \delta r_i$  soll 0 sein. Nach der Hamilton-Gleichung (1.61) heißt das  $\delta E = \sum_i (-\vec{\dot{p}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$ . Wenn dieses Produkt verschwinden soll, gleichgültig wie wir  $\delta\vec{r}$  gewählt haben, muss  $\sum_i \vec{\dot{p}}_i = 0$  sein, also ist der Gesamtimpuls  $\sum_i \vec{p}_i$  zeitlich konstant.

**Isotropie des Raumes:** Bei einer kleinen Drehung um den Winkel  $\delta\alpha$  (Drehachse gegeben durch die Richtung des Vektors  $\delta\vec{\alpha}$ , Drehwinkel gegeben durch seinen Betrag) ändert sich der Ortsvektor  $\vec{r}_i$  um  $\delta\vec{r}_i = \delta\vec{\alpha} \times \vec{r}_i$  (vgl. Abschn. 2.1.2). Aber auch der Impulsvektor ändert sich bei der Drehung (bei der Verschiebung blieb er konstant), er ist ja jetzt, ebenso wie der Ortsvektor  $\vec{r}$ , nach anderen Koordinatenrichtungen aufzuspalten:  $\delta\vec{p}_i = \delta\vec{\alpha} \times \vec{p}_i$ . Die Gesamtenergie muss von der Drehung unberührt bleiben. Der Beitrag eines Teilchens dazu ist  $\delta E_i = \vec{\nabla}_{\vec{r}_i}E \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{\nabla}_{\vec{p}_i}E \cdot \delta\vec{p}_i$ . Wir setzen die Ausdrücke für  $\delta\vec{r}$  und  $\delta\vec{p}$  ein und benutzen die Hamilton-Gleichungen:  $\delta E_i = -\vec{\dot{p}}_i \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{r}_i) + \vec{\dot{r}}_i \cdot (\delta\vec{\alpha} \times \vec{p}_i) = 0$ . Beide Terme sind Spatprodukte. Nach Gleichung (2.1) können wir die Faktoren



■ **Abbildung 1.40** Emmy Noether, geb. 1882 in Erlangen, gest. 1935 in Bryn Mawr

zyklisch permutieren, damit sich  $\delta\vec{\alpha}$  ausklammern lässt:  $\delta E_i = \delta\vec{\alpha} \cdot (-\vec{r}_i \times \vec{\dot{p}}_i + \vec{p}_i \times \vec{\dot{r}}_i) = -\delta\vec{\alpha} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{\dot{p}}_i + \vec{\dot{r}}_i \times \vec{p}_i)$ . In der Klammer steht die Ableitung des Drehimpulses  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ . Also ist die Summe  $\delta E = \sum_i \delta E_i = -\delta\vec{\alpha} \cdot \sum_i \vec{\dot{L}}_i$ . Damit dieses Produkt bei *jeder* beliebigen Wahl der Drehung  $\delta\vec{\alpha}$  verschwindet, muss  $\sum_i \vec{\dot{L}}_i = 0$  sein, d.h. der Drehimpulssatz gelten.

Ganz allgemein kann man zeigen:

Wenn die Energiefunktion invariant gegen eine gewisse Transformation ist, d.h. die Naturgesetze symmetrisch im Hinblick auf eine solche Transformation sind, entspricht das dem Erhaltungssatz für eine bestimmte Größe.

Dieser Satz von *Emmy Noether*, kurz **Noether-Theorem**, spielt in der modernen theoretischen Physik eine grundlegende Rolle.

### 1.6.5 Der Virialsatz M

*Rudolf Clausius*, der auch die Entropie „erfand“, leitete 1870 einen Satz ab, der für subtilere Probleme der Gasdynamik, der Astrophysik, aber auch der Atom- und Molekülphysik sehr nützlich ist. Dieser **Virialsatz** gilt nicht so allgemein

wie Impuls- und Energiesatz, sondern nur für *stabile mechanische Systeme*, d. h. für Systeme von Massenpunkten, deren Bestimmungsstücke, über hinreichend lange Zeit gemittelt, sich zeitlich nicht ändern. Ein solches System bestehe aus den Massen  $m_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die sich an den Orten  $\vec{r}_k$  befinden und die Impulse  $\vec{p}_k$  haben. Alle diese Einzelgrößen ändern sich natürlich zeitlich, aber das Zeitmittel z. B. der Summe  $\sum \vec{p}_k \cdot \vec{r}_k$  für das ganze stabile System ändert sich nicht, d. h.

$$\frac{d}{dt} \sum \vec{p}_k \cdot \vec{r}_k = \sum \dot{\vec{p}}_k \cdot \vec{r}_k + \sum \vec{p}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k = 0. \quad (1.62)$$

$\sum \vec{p}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k$  ist genau die doppelte kinetische Energie. Da  $\dot{\vec{p}}_k = \vec{F}_k$  die auf das  $k$ -te Teilchen wirkende Gesamtkraft ist, kann man die erste Summe schreiben  $\sum \vec{F}_k \cdot \vec{r}_k$ . Sie heißt das **Virial** der wirksamen Kräfte.  $\vec{F}_k$  ist die Summe aller Wechselwirkungen mit anderen Teilchen des Systems:  $\vec{F}_k = \sum \vec{F}_{kj}$  (äußere Kräfte dürfen nicht in das System hineingreifen, sonst wäre es nicht stabil; man kann diese äußeren Kräfte ggf. auch eliminieren, indem man z. B. ein frei fallendes Bezugssystem benutzt). Zu jedem  $\vec{F}_{kj}$  taucht im Virial auch die Gegenkraft  $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$  auf den Wechselwirkungspartner auf. Der Beitrag jedes Paares  $k, j$  lässt sich also zusammenfassen zu  $\vec{F}_{kj}(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$ . Die Kraft folge nun einem Potenzgesetz  $\vec{F}_{kj} = a_{kj}(\vec{r}_k - \vec{r}_j)|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^{-n-1}$  (z. B.  $n = 2$ ,  $a_{kj} = -Gm_k m_j$  für die Gravitation). Der Beitrag des Paares  $k, j$  wird dann  $a_{kj}|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^{-n+1}$ . Andererseits ist sein Beitrag zur potentiellen Energie  $E_{kj} = (n-1)^{-1} a_{kj}|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^{-n+1}$ . Also lautet (1.62), in  $E_{\text{pot}}$  und  $E_{\text{kin}}$  ausgedrückt

$$E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}(n-1)E_{\text{pot}}.$$

$E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$  teilen daher die konstante Gesamtenergie  $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  unter sich auf gemäß

$$E_{\text{kin}} = -\frac{n-1}{3-n}E, \quad E_{\text{pot}} = \frac{2}{3-n}E.$$

Für Gravitation und Coulomb-Anziehung ( $n = 2$ ) folgt  $E_{\text{kin}} = -E$ ,  $E_{\text{pot}} = 2E$ , was wir für den Spezialfall der Kreis- oder Ellipsenbahn eines Teilchens um das andere in Abschn. 1.8.8 und für das Atom in Abschn. 15.1 bestätigen werden, was aber offenbar sehr viel allgemeiner gilt. Dass diese Kräfte  $n = 2$  haben, ist ein „glücklicher Zufall“, denn für  $n < 1$  oder  $n > 3$  ist ein positives  $E_{\text{kin}}$  bei negativer (bindender) Gesamtenergie  $E$  überhaupt nicht mehr möglich, d. h. Kräfte mit solcher Abstandsabhängigkeit können keine stabilen Systeme zusammenhalten. Für einen Stern folgt sofort, dass unabhängig von der inneren Struktur die

gesamte Gravitationsenergie doppelt so groß wie die kinetische (thermische) ist. Daraus ergibt sich die Größenordnung der Temperaturen im Sterninnern, obwohl der exakte Wert von der Massenverteilung abhängt.

## 1.7 Kräfte in bewegten Bezugssystemen

Man kann Bewegungen in beliebig bewegten Bezugssystemen beschreiben (aber wer bewegt sich eigentlich „wirklich“?). Dabei muss man aber meist damit rechnen, dass sich die Körper ziemlich bizarr verhalten, angetrieben durch zunächst rätselhafte Kräfte.

### 1.7.1 Kontaktkräfte und Fernkräfte

Alle Kräfte, die man in der Natur beobachtet, lassen sich zwanglos in mehrere Gruppen einteilen:

1. Kontaktwechselwirkungen treten zwischen Körpern auf durch Druck, Zug, Stoß usw. Beispiel: Die verschiedenen Glieder der Kräfteübertragungskette im Auto vom Druck des explodierenden Treibstoffgas-Luft-Gemisches bis zur Reibung der Reifen an der Straße.
2. Kräfte, bei denen keine direkte Kontaktwechselwirkung nachweisbar ist. Diese Gruppe enthält so verschiedenartige Kräfte wie die Zentrifugalkraft, elektromagnetische Wechselwirkungen und die Gravitation. Sie ordnen sich in zwei Untergruppen:
  - 2a) Kräfte, die dadurch entstehen, dass man den Vorgang in einem bestimmten Bezugssystem beschreibt, und die in anderen Bezugssystemen nicht vorhanden wären: **Trägheitskräfte**.
  - 2b) Kräfte, die durch keine Änderung des Bezugssystems zu beseitigen sind (echte **Fernkräfte**, zu den fundamentalen Kräften der Natur s. Abschn. 19.4.5).

Das einfachste Beispiel für eine Trägheitskraft verspüren die Insassen eines bremsenden Autos. Es ist kein Kontakt mit einem anderen Körper vorhanden, der sie nach vorn drängt. Die Beschleunigungen und Kräfte, die im Bezugssystem des Autos auftreten, verschwinden beim Übergang zu einem System, das sich geradlinig-gleichförmig weiterbewegt; die Insassen tun ja auch nur, was das Trägheitsgesetz verlangt, d. h. sie suchen sich geradlinig-gleichförmig weiterzubewegen. Diese gebräuchliche aber etwas irreführende Einstufung der Kraft als **Scheinkraft** ändert nichts an ihren realen, oft katastrophalen Folgen.

Was die echten Fernkräfte (2b) betrifft, so schien selbst ihre Existenz lange Zeit den Physikern (z. B. *Newton*) fragwürdig, wenn nicht absurd. Es gibt viele Versuche, z. B. die Gravitation auf Nahwirkungskräfte zurückzuführen. Besonders die Elektrodynamik hat uns aber so an die Vorstellung einer Fernkraft gewöhnt, dass durch die Entwicklung der mikroskopischen Physik der Materie der direkte Kontakt fraglich wurde und Nahwirkungen als verkappte Fernwirkungen erschienen. Was die Gravitation betrifft, so hat *Einstein* sie (mit einigen Einschränkungen) endgültig unter die Trägheitskräfte eingeordnet, indem er die allerdings recht raffinierten Transformationen des Bezugssystems fand, die sie zum Verschwinden bringen (vgl. Abschn. 13.10.1).

### 1.7.2 Inertialsysteme

Bewegung eines Körpers wird immer relativ zu anderen Körpern beobachtet. Aus Beobachtungen lässt sich nicht schließen, wer sich (gleichförmig) bewegt oder wer sich in Ruhe (relativ wozu?) befindet. Die Wurfparabel in Abb. 1.41 sieht für Beobachter auf dem vorderen Wagen immer gleich aus, ob nun der hintere Wagen relativ zur Umgebung in Bewegung ist oder er selbst. Der Begriff des **Inertialsystems** (von inertia (lat.), Trägheit) geht auf Galilei zurück. Sein Relativitätsprinzip lautet: Physikalische Gesetze müssen unabhängig vom Bezugssystem gelten, und insbesondere müssen Newtons Axiome gelten (s. Abschn. 1.2.4): In einem Inertialsystem wird der Bewegungszustand eines kräftefreien Körpers nicht geändert.

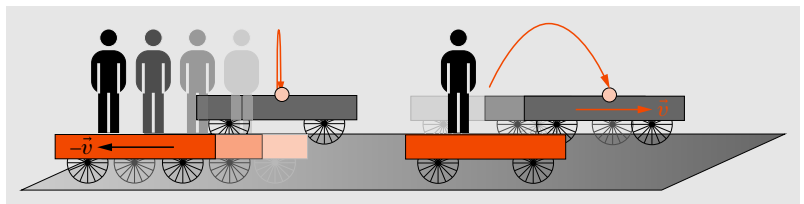
Die Transformation von einem zum anderen Bezugssystem, das sich mit der Relativgeschwindigkeit  $\vec{w}$  bewegt, wird durch die Galilei-Transformation geleistet,

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{w}t \quad \text{und} \quad t' = t. \quad (1.63)$$

Für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes im gestrichenen System gilt dann  $\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) + \vec{w}$ , und insbesondere bleibt Newtons Kraftgesetz unverändert,

$$\vec{F}'/m = \ddot{\vec{r}}'(t) = \dot{\vec{v}}'(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}/m.$$

**Abbildung 1.41** Relativitätsprinzip: Der Beobachter kann nicht unterscheiden, ob er einen bewegten Wagen sieht oder ob er sich selbst bewegt



Inertialsysteme gibt es in unserer unmittelbaren Umgebung nicht, denn Gravitation und Erdrotation wirken immer.

Auch ein antriebslos fliegendes Raumschiff stellt kein Inertialsystem dar, solange es in der Nähe größerer Massen ist: Im Innern der Rakete stellt man zwar keine „rätselhaften“ Beschleunigungen fest (außer den Gezeitenbeschleunigungen), doch wird der unbefangene Beobachter sich wundern, warum z. B. die Erde ihm beschleunigt entgegenkommt.

Eine fast vollkommene Annäherung an ein Inertialsystem wäre erst durch eine antriebslose Rakete im interstellaren Raum fern von allen Massen realisiert, falls sie nicht rotiert. Ein solches „antriebsloses Raumschiff“ ist auch die Sonne (abgesehen von ihrem fast kreisförmigen Umlauf um das Zentrum der Galaxis). Ein mit der Sonne verbundenes Achsenkreuz, dessen Achsen auf bestimmte Fixsterne zeigen, ist ein praktisch ausreichendes Inertialsystem, falls man von den Gravitationswirkungen der Sonne und der Planeten absieht.

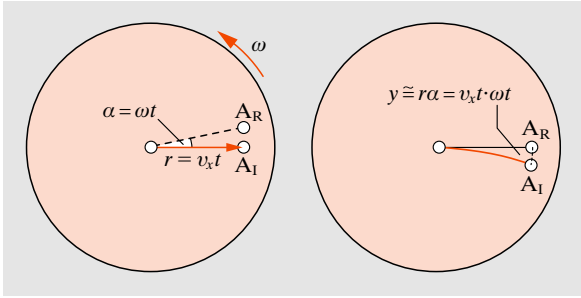
Galilei hat noch selbstverständlich angenommen, dass es eine absolute Zeit gibt. Einstein hat mehr als 250 Jahre später das Relativitätsprinzip ganz im Sinne von Galilei angewandt, dass nämlich physikalische Gesetze unabhängig vom Inertialsystem gelten müssen und dass man durch Messungen keinen absoluten Bewegungszustand ermitteln kann. Seine Forderung, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c = 300\,000\text{ km/s}$  in allen Systemen immer dieselbe sein sollte, steht allerdings im Widerspruch zur Galilei-Transformation und erzwingt die Gleichbehandlung der Orts- und Zeitkoordinaten, s. Abschn. 13.3. Zum Glück ist die Galilei-Transformation für Geschwindigkeiten  $v/c \ll 1$  eine sehr gute Näherung.

### 1.7.3 Rotierende Bezugssysteme

Die Zentrifugalkraft gehört zweifellos zu den Trägheitskräften. Jeder Gegenstand, der an einer Leine herumgeschleudert wird, übt sie aus, und nur die von der Leine erzwungene Zentripetalkraft, die die Zentrifugalkraft ge-







■ **Abbildung 1.43** Physikalische Interpretation der Corioliskraft

Am Beispiel einer flachen Scheibe kann man erkennen, dass das Hinwegdrehen der Scheibe unter einem bewegten Massenpunkt Ursprung der Corioliskraft ist: Eine Kugel werde mit der Geschwindigkeit  $v_x$  aus dem Zentrum in radialer  $x$ -Richtung abgeschossen. Der mitrotierende Beobachter sieht, wie sich die Kugel entfernt und dabei eine Rechtskurve durchläuft (Abb. 1.43). Wenn die Kugel den Abstand  $r = v_x t$  erreicht hat, hat sich natürlich auch die Scheibe um den Winkel  $\alpha = \omega t$  weitergedreht. Für kleine Winkel kann man schreiben  $y \simeq r\alpha = v_x t \omega t = v_x \omega t^2$ . Der Vergleich mit dem Beschleunigungs-Zeit-Gesetz (1.24) ergibt  $a = 2v_x \omega$ , wie erwartet.

Auf der rotierenden Erde hat die Coriolis-Kraft im Allgemeinen eine Horizontal- und eine Vertikalkomponente. Wenn die Bewegung in der Oberfläche erfolgt, wirkt die Coriolis-Kraft am Pol nur horizontal, am Äquator nur radial; im letzteren Fall ist sie gleichgerichtet mit der Zentrifugalkraft. Die bekannteste Wirkung der Corioliskraft ist die Drehung der Schwingungsebene des **Foucaultschen Pendels**, das auch für Laien die Erdrotation sichtbar werden

lässt. Polarkoordinaten (Abschn. 1.3.2) sind hilfreich, um zu bestimmen, wie schnell sich die Pendelebene dreht:  $\vec{v}_R = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi \simeq v_R \vec{e}_r$  wegen  $v_\varphi \ll v_r$ . Für die Beschleunigung gilt dann  $\dot{\vec{v}}_R \simeq \dot{v}_R \vec{e}_r + v_R \dot{\vec{e}}_r = \dot{v}_R \vec{e}_r + v_R \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ . Die radiale Bewegung wird durch die Pendelbeschleunigung angetrieben ( $\dot{v}_R \vec{e}_r + kr \vec{e}_r = 0$ ); die Drehung der Pendelebene wird durch die Horizontalkomponente der Corioliskraft  $(2\vec{\omega} \times \vec{v}_R)_H = 2\omega \sin \theta v_R \vec{e}_\varphi$  verursacht:

$$(v_R + kr) \vec{e}_r + v_R (\dot{\varphi} - \omega \sin \theta) \vec{e}_\varphi = 0.$$

Die Koeffizienten von  $\vec{e}_{r,\varphi}$  müssen separat verschwinden. Danach treibt die Pendelbewegung die Rotation an, aber die Drehung der Schwingungsebene hängt nicht von  $v_R$  selbst ab. Die Pendelebene dreht sich also mit der Rate

$$\Omega = \dot{\varphi} = \omega \sin \theta. \quad (1.67)$$

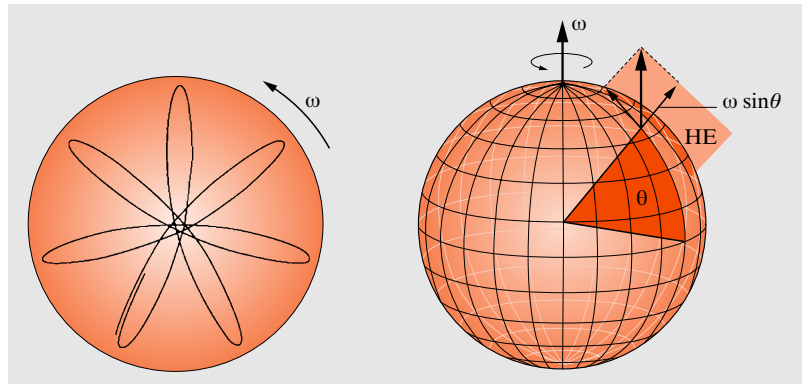
Die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation berechnet man aus

$$\omega = 2\pi \frac{1}{24 \text{ h}} = 2\pi \cdot 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

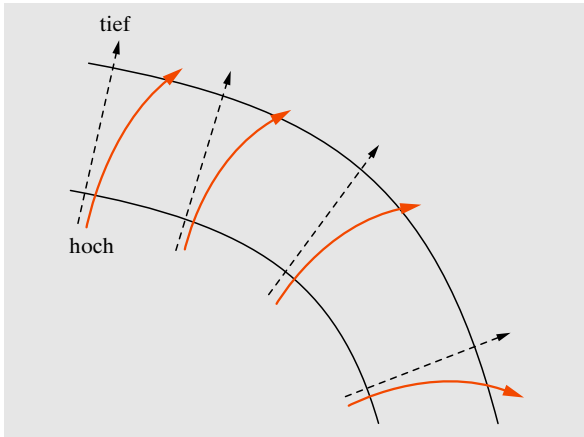
In mitteleuropäischen Breiten ( $\theta = 51^\circ$ ) rückt das Foucault-Pendel pro Stunde um  $\sin \theta \cdot (360^\circ/24) \sim 12^\circ$  vor.

Die Horizontalkomponente bewirkt für alle sich auf der nördlichen Halbkugel bewegenden Körper eine Rechtsabweichung, am Äquator wechselt sie das Vorzeichen ( $\Omega < 0$  in Gl. (1.67)). Dies ist von entscheidender Bedeutung für die Bewegung atmosphärischer Luftmassen. Druckgradienten erzeugen Kräfte, die Luftpakete vom höheren zum niedrigeren Druck transportieren. Die Corioliskraft (auf der nördlichen immer rechts herum, im Süden umgekehrt) ist Ursache der Entstehung von Wirbelstürmen (s. Ab-

■ **Abbildung 1.44** Links: Ein Pendel hinterlässt auf einer Drehscheibe eine Rosetenspur. Rechts: Horizontal- und Vertikal-komponenten der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation in der Horizontalebene (HE)







■ **Abbildung 1.45** Druckgradienten (gestrichelt) erzeugen Winde. Die Corioliskraft lenkt die Winde (rot) in der nördlichen Hemisphäre rechts, in der südlichen links herum ab

sch. 3.4.6). Darin wird die Wirbelbewegung durch das Wechselspiel von Zentrifugal- und Druckkräften aufrecht erhalten.

## 1.8 Gravitation und Himmelsmechanik

### 1.8.1 Aufstieg im Schwerfeld

Die Schwerebeschleunigung, die zu unseren elementarsten Erfahrungen gehört, erleben wir als konstant, so wie wir sie in Abschn. 1.3.1 behandelt haben. In Wirklichkeit nimmt die Schwerebeschleunigung mit der Höhe ab, und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes  $r$  vom Erdmittelpunkt (vgl. Abschn. 1.8.2). Im Abstand  $r$  ist sie also nicht mehr  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , wie im Abstand  $R = 6370 \text{ km}$ , d. h. an der Erdoberfläche, sondern sie ist dort  $a = gR^2/r^2$ . Eine Rakete werde auf die Geschwindigkeit  $v_0$  gebracht und fliege dann, praktisch außerhalb der bremsenden Atmosphäre, antriebsfrei genau senkrecht weiter. Die Schwerkraft erteilt ihr, wenn sie im Abstand  $r$  ist, die Beschleunigung  $\ddot{r} = -gR^2/r^2$ , also die Kraft  $m\ddot{r} = -mgR^2/r^2$ . Auf der kleinen Strecke  $dr$  muss die Rakete die Arbeit  $mgR^2r^{-2} dr$  leisten, beim Aufstieg von  $r = R$  bis zum Abstand  $r_1$  die Arbeit

$$W = \int_R^{r_1} \frac{mgR^2}{r^2} dr = mgR^2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Diese Arbeit stammt aus der kinetischen Energie der Rakete, die anfangs  $\frac{1}{2}mv_0^2$  war, jetzt aber um  $W$  kleiner ist:  $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = mgR^2(1/R - 1/r_1)$ . Die Gesamtenergie der Rakete ist konstant:

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \quad (1.68)$$

und z. B. aus dem Anfangszustand angebbbar. Bei der Normierung  $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$  hat ja die potentielle Energie negatives Vorzeichen.

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen positiver und negativer Gesamtenergie. Bei  $E > 0$ , d. h.  $v_0 > \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ km/s}$ , bleibt auch bei  $r = \infty$ , wo  $E_{\text{pot}} = 0$  ist, noch Geschwindigkeit  $v$  übrig: Die Rakete kann sich vollkommen von der Erde lösen. Der kritische Wert von  $11,2 \text{ km/s}$  heißt auch (parabolische) **Fluchtgeschwindigkeit** oder zweite kosmische Geschwindigkeitsstufe (die erste ist die Kreisbahngeschwindigkeit  $v = \sqrt{gR} = 7,9 \text{ km/s}$ ). Bei  $E < 0$ , d. h.  $v_0 < \sqrt{2gR}$ , gibt es einen Abstand, wo  $v = 0$  wird, nämlich  $r_{\text{max}} = mgR^2/|E|$ . Dort kehrt die Rakete um und fällt wieder zurück.

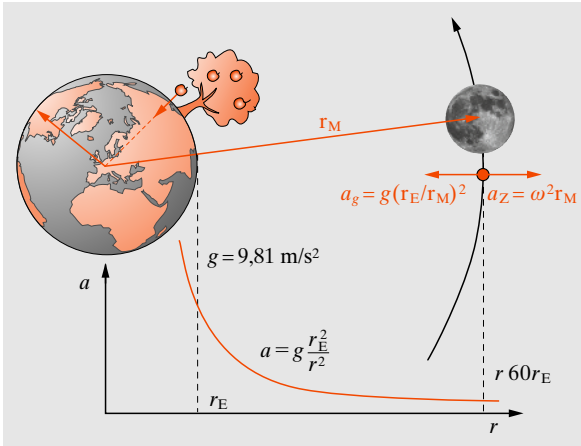
### 1.8.2 Das Gravitationsgesetz

In sehr großen Maßstäben überwiegt die Gravitation alle anderen Kräfte und bestimmt den Aufbau des Weltalls fast allein.

In seinen durch die Londoner Pestepidemie verlängerten Semesterferien 1665–1666 fand *Isaac Newton* außer dem verallgemeinerten binomischen Satz, der Differential- und Integralrechnung, der Spektralzerlegung des weißen Lichts auch das **Gravitationsgesetz**. Die Grundidee ist uns heute so geläufig geworden, dass wir ihre Genialität und Tragweite kaum noch richtig einschätzen können. Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d. h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen. Die Kraft wird von den Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beiden beteiligten Körper, ihrem Abstand und vielleicht auch noch anderen Größen abhängen:

$$F = f(m_1, m_2, r, \dots).$$

Aus dem Reaktionsprinzip folgt gleichzeitig, dass es sich um eine *beiderseitige* Anziehung handeln muss: Die Erde wird vom Apfel mit der gleichen Kraft angezogen wie umgekehrt.  $m_1$  und  $m_2$  müssen also in symmetrischer Weise



■ **Abbildung 1.46** Newtons Apfel und der Mond unterliegen derselben Gravitationskraft. Nicht maßstäblich

in die Funktion  $f$  eingehen. Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:

- Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse  $m_2$  des fallenden Körpers. Die zur Erklärung dieser Beschleunigung zu postulierende *Kraft* muss also proportional  $m_2$  sein.
- Aus dem Reaktionsprinzip folgt dann, dass  $F$  auch proportional zu  $m_1$  sein muss.
- An der Erdoberfläche, also einen Erdradius oder  $r_E = 6370 \text{ km}$  vom Anziehungszentrum (Erdmittelpunkt) entfernt, beträgt die Schwerebeschleunigung  $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Die Beschleunigung in dem Abstand  $r$ , wo sich der Mond befindet ( $r = 60 r_E$ ), ergibt sich sofort aus der Kreisbahnbedingung für den Mond, d.h. der Gleichheit von Schwere- und Zentripetalbeschleunigung (vgl. (1.32),  $T_{\text{Um}} = 27,3 \text{ Tage} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$ ):

$$a = \omega^2 r = \left( \frac{2\pi}{T_{\text{Um}}} \right)^2 \cdot (60 r_E) = 2,73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Die Beschleunigung im Mondabstand ist also  $1/3600 = 60^{-2}$  von der auf der Erdoberfläche wirkenden. Es war kühn, allein hieraus allgemein auf eine Abstandsabhängigkeit wie  $r^{-2}$  zu schließen:

$$F \sim r^{-2}, \quad \text{also} \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.69)$$

aber diese Hypothese bestätigt sich tatsächlich glänzend. Man beachte, dass die Masse des Trabanten in dieser Betrachtung keine Rolle spielt. Schon auf diesem Stadium lassen sich Relativbestimmungen der Massen von Himmelskörpern (ausgedrückt in der noch unbekannten Erdmasse) durchführen, sofern diese einen Satelliten mit bekanntem Abstand vom Zentralkörper und bekannter Umlaufzeit haben.

#### BEISPIEL

Schätzen Sie die Masse der Erde ohne Benutzung der Gravitationskonstante. Was kann man aus der Abweichung vom richtigen Wert schließen?

Man weiß seit *Eratosthenes* (ca. 300 v. Chr.), dass der Erdradius  $R \approx 6400 \text{ km}$  ist. Wenn die Erde ganz aus Stein (Dichte ca.  $2,7 \text{ g/cm}^3$ ) bestünde, erhielte man eine Masse  $M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 = 3 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . Dass die Masse in Wirklichkeit doppelt so groß ist, zeigt, dass schwereres Material in der Tiefe liegt.

- Es wäre denkbar, dass die Kraft zwischen zwei Körpern noch von anderen Größen abhängt. Zwei davon verdienen Erwähnung, nämlich die Geschwindigkeit der Massen, besser ihre Relativgeschwindigkeit und das Material, mit dem evtl. der Raum zwischen den beiden Körpern erfüllt ist. Gibt es Substanzen, die die Gravitation abschirmen, wie das im sonst ziemlich analogen elektrostatischen Feld zutrifft? Einsteins Theorie liefert in der Tat eine winzige Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit und auch vom Rotationszustand der Körper. Für die Existenz von Gravitationsschirmen besteht keinerlei Anhaltspunkt.

#### BEISPIEL

Eigentlich sind doch elektrostatische Kräfte viel größer als die Gravitation (wie viel größer z. B. zwischen Elektron und Proton?). Sie wirken sich im Weltall nur kaum aus, sagt man, weil die Himmelskörper gleich viele Elektronen und Protonen enthalten. Wenn nun aber eines dieser Teilchen eine etwas größere Ladung hätte?

Der Kräftevergleich ergibt  $e^2 / (4\pi\epsilon_0 G m_p m_E) \approx 10^{40}$ . Elektrische Kräfte tendieren zum Ladungsausgleich (nicht unbedingt Anzahlgleichheit), der das elektrische Feld kompen-

siert; beim Gravitationsfeld geht das nicht, weil es keine negativen Massen gibt.

### 1.8.3 Äquivalenz von träger und schwerer Masse

Es fehlt noch die Proportionalitätskonstante  $G$  in der Formel (1.98), d. h. die Größe der Kraft zwischen zwei Einheitsmassen im Einheitsabstand. Und woher wissen wir eigentlich, dass die Massen, die in den Formeln für die Schwerkraft  $\vec{F}_S = m_S \vec{g}$  und für die Trägheitskraft  $\vec{F}_T = m_T \ddot{\vec{r}}$  erscheinen, identisch sind, m. a. W. gilt tatsächlich  $m_S \equiv m_T$ ?

#### Cavendishs Waage

Die Gravitationskonstante  $G$  kann experimentell erst bestimmt werden, wenn die Massen beider wechselwirkenden Körper bekannt sind. Für astronomische Objekte einschließlich der Erde ist die Masse naturgemäß nicht direkt bestimmbar, wenn auch aus Volumen und vermutlicher Dichte Schätzwerte abgeleitet werden können. H. Cavendish (1731–1810) maß als erster die Kraft zwischen zwei Objekten bekannter Masse, nämlich Bleikugeln, mit Hilfe seiner Torsionswaage (Abb. 1.47).

Der Wert der Gravitationskonstanten beträgt

$$G = (6,673 \pm 0,010) \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}. \quad (1.70)$$

Die überraschend große Unsicherheit ist auf die systematischen Fehler zurückzuführen, die bei Gravitationsmessungen besonders schwer zu kontrollieren sind. Lokal kann man die Anziehungskraft viel genauer bestimmen.

Die Bestimmung der Gravitationskonstante ist gleichzeitig eine **Wägung der Erde** und aller übrigen Himmelskörper, für die vorher nur eine Relativbestimmung der Masse (z. B. Vergleich mit der Erdmasse) möglich war.

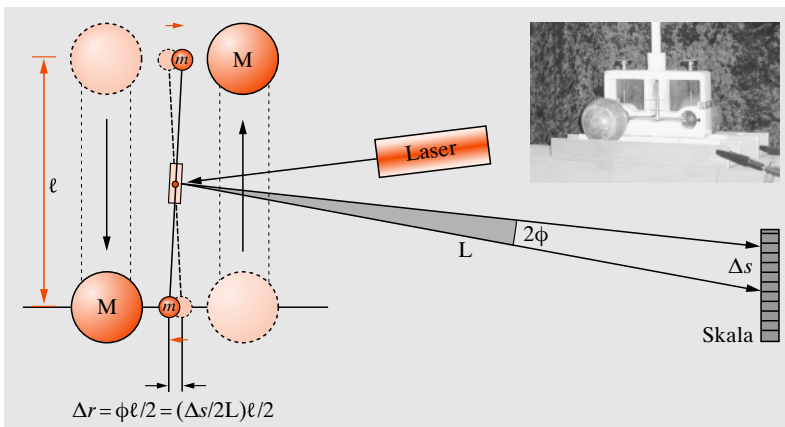
#### Eötvös Experiment

R. von Eötvös (1848–1919) hat die Torsionswaage von Cavendish verwendet, um durch die in Abb. 1.48 gezeigte Anordnung die durch schwere bzw. träge Masse verursachten Kräfte ( $m_S g$  und  $m_T a_Z$ ) durch Kompensation sehr empfindlich miteinander zu vergleichen. Im Prinzip ist dieses Experiment nur eine sehr genaue Untersuchung der Universalität des freien Falls, also ob alle Körper gleich schnell fallen.

Durch die Konstruktion misst die Torsionswaage die Differenz der Zentrifugalbeschleunigung zweier Körper,  $a_Z^1 - a_Z^2 = (m_S^1/m_T^1 - m_S^2/m_T^2)g$ . Man normiert diese Zahl auf den Mittelwert der Beschleunigungen  $(a_Z^1 + a_Z^2)/2$  und erhält

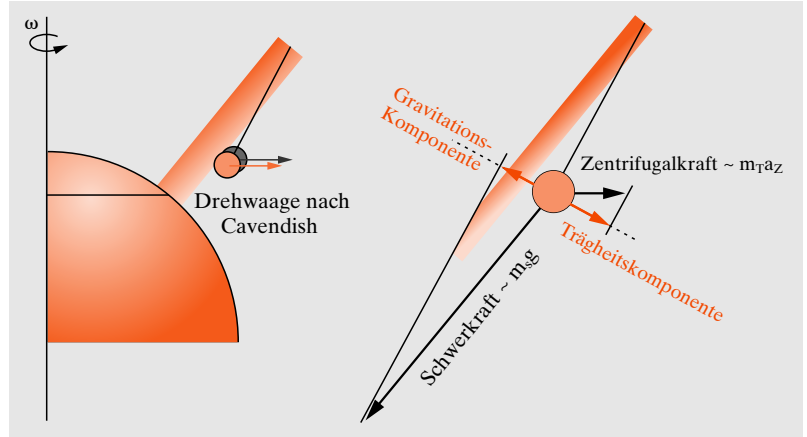
$$\eta = \frac{a_Z^1 - a_Z^2}{(a_Z^1 + a_Z^2)/2}.$$

Der  $\eta$ -Wert gibt an, wie gut die Äquivalenz von schwerer und träger Masse erfüllt ist, im vermuteten Idealfall ist er Null. Er konnte im Prinzip schon von Galilei bestimmt werden ( $\eta < 0,1$ ), bessere Ergebnisse erzielten Bessel mit einer Pendelmethode ( $\eta < 10^{-5}$ ) und dann Eötvös ( $\eta < 10^{-8}$ ). Der gegenwärtig beste Laborwert  $\eta = (-0,2 \pm 2,8) \cdot 10^{-12}$  (Su et al., Phys. Rev. D **50**, 3614 (1994)) ist mit Null verträglich, d. h. die Streuung der Messwerte ist größer als der nahe bei Null liegende Mittelwert. Für Präzisionsexperimente



**Abbildung 1.47** Torsionswaage nach Cavendish. Weil eine sehr kleine Kraft gemessen werden muss, ist der Torsionsfaden, an dem die Probekörper  $m$  hängen, „weich“ und die Bewegung ist langsam. Bei Demonstrationen werden die „Attraktormassen“  $M$  von den gestrichelten an die symmetrischen Endpositionen verschoben. Die Gravitationskraft (bei bekannten Massen und Abständen damit  $G$ ) kann aus der anfänglichen Beschleunigung  $\Delta \ddot{r}$  bestimmt werden. Für genaue Messungen werden Schwingungen um die Gleichgewichtslagen genutzt

■ **Abbildung 1.48** Torsionswaage nach Eötvös. Auf die Testmassen wirkt durch die Erdrotation eine Trägheitskraft, die Zentrifugalkraft. Die Torsionsfaser bildet einen kleinen Winkel mit dem Lot, so dass die Komponente der Zentrifugalkraft senkrecht zum Faden durch die entsprechende Komponente der Gravitationskraft kompensiert wird. Falls schwere und träge Masse identisch sind, ruft die Kompensation für beide Testkörper dieselbe Auslenkung hervor. Andernfalls zeigt die Torsionswaage für unterschiedliche Körper (z. B. Cu und Pb) einen Ausschlag



verwendet man eine Anordnung mit  $2 \times 2$  verschiedenen Massen, die im Quadrat angeordnet sind. Dadurch vermeidet man systematische Fehler, die durch (leicht auftretende) Gradienten der Schwerkraft hervorgerufen werden.

#### 1.8.4 Das Gravitationsfeld

In den Ausdruck (1.69) für die Schwerkraft zwischen zwei Massenpunkten gehen beide Massen in völlig symmetrischer Weise ein. Man kann sich aber auf den Standpunkt stellen, dass der eine Massenpunkt (etwa  $Q$ ) die Quelle eines Kraftfeldes sei, in dem sich der andere Massenpunkt  $P$  bewegt. In dem Ausdruck  $F(r) = -m_P(Gm_Q)/r^2$  oder, wenn man der Richtungseigenschaft Rechnung tragen will,

$$\vec{F} = -m_P \frac{Gm_Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.71)$$

ist dann  $-Gm_Q\vec{r}/r^3$  eine Eigenschaft des Feldes allein, unabhängig von der speziellen „Probemasse“  $m_P$ . Man nennt diese Größe die **Feldstärke**  $\vec{g}$  des **Gravitationsfeldes**. Auch im allgemeinen Fall, nicht nur für das Feld einer Punktmasse, ist die Feldstärke zu definieren durch den Zusammenhang mit der Kraft auf eine Probemasse  $m_P$ :

$$\vec{g} = \frac{1}{m_P} \vec{F}. \quad (1.72)$$

Für das Gravitationsfeld ist  $\vec{g}(\vec{r})$  dasselbe wie die an diesem Ort  $\vec{r}$  gültige **Schwerebeschleunigung**. Diese Zerlegung der Kraft in eine Eigenschaft des Feldes ( $\vec{g}$ ) und eine Eigenschaft des Probekörpers ( $m_P$ ) ist möglich, weil  $\vec{F} \sim$

$m_P$ , m. a. W. wegen der Proportionalität zwischen schwerer (dem Gravitationsfeld unterworfenen) und träger Masse. Für andere Arten von Feldern muss die Zerlegung anders vorgenommen werden, z. B. für das elektrostatische Feld in die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die Ladung  $e$  des Probekörpers.

Das Gravitationsfeld einer Punktmasse ist konservativ, denn es ist kugelsymmetrisch (s. Abschn. 1.5.4). Also existiert eine eindeutig vom Ort, und zwar nur vom Betrag  $r$  des Abstands abhängige potentielle Energie einer Probemasse  $m_P$ . Am einfachsten normiert man sie auf einen unendlich fernen Punkt, wo keine Kraft mehr herrscht.  $E_{\text{pot}}(r)$  ist dann die Arbeit, die nötig ist, die Masse  $m_P$  aus dem Unendlichen in den endlichen Abstand  $r$  zu bringen. Wegen der Wegunabhängigkeit kann man das immer längs eines Radius tun und erhält

$$E_{\text{pot}}(r) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = m_P \int_{\infty}^r Gm_Q \frac{1}{r^2} dr = -m_P \frac{Gm_Q}{r}. \quad (1.73)$$

Das Minuszeichen besagt vernünftigerweise, dass keine Arbeit nötig ist, sondern welche frei wird.

Auch die potentielle Energie lässt sich in einen vom Probekörper abhängigen Anteil  $m_P$  und eine reine Feldeigenschaft, nämlich

$$\varphi = -\frac{Gm_Q}{r}, \quad (1.74)$$

das **Potential** des Feldes, aufspalten. Ganz allgemein (nicht nur für das Feld der Punktmasse) ergeben sich  $\vec{F}$  aus  $E_{\text{pot}}(\vec{r})$  und die Feldstärke  $\vec{g}$  aus dem Potential  $\varphi$  durch Gradienten-

tenbildung:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\vec{r}), \quad \vec{g} = -\text{grad } \varphi(\vec{r}). \quad (1.75)$$

### 1.8.5 Gravitationspotential ausgedehnter Körper

Das Feld einer komplizierten Massenverteilung sieht natürlich ganz anders aus als das der Punktmasse (1.71). Wegen des Superpositionsprinzips lässt sich jede solche Verteilung als Summe oder Integral von Punktmassen darstellen, ergeben sich auch  $\vec{F}$ ,  $\vec{g}$ ,  $E_{\text{pot}}(\vec{r})$  und  $\varphi(\vec{r})$  durch entsprechende Summierung oder Integration der Beiträge der einzelnen Massenelemente. Der wichtigste Fall, die Kugel, verhält sich aber genau wie ein idealisierter Massenpunkt.

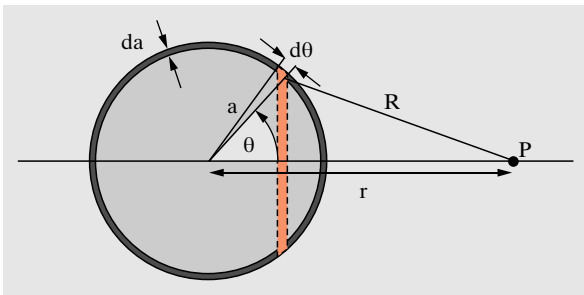
Wir berechnen das Potential einer dünnen Kugelschale mit Radius  $a$ , Wandstärke  $da$ , Massendichte  $\rho$  und der Gesamtmasse  $M_S = \rho 4\pi a^2 da$  (Abb. 1.49).

Der Beitrag des Massenrings  $dM_S(\theta)$  zum Gravitationspotential  $E_{\text{pot}}$  eines Probekörpers  $m$  am Ort  $P$  ist

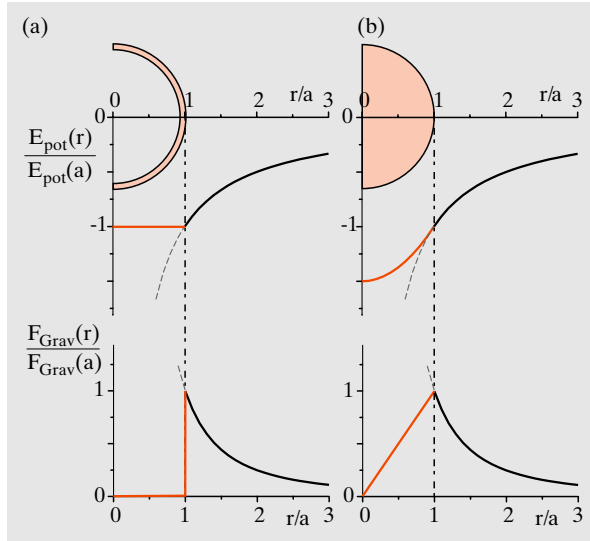
$$dE_{\text{pot}} = -G \frac{m dM_S(\theta)}{R(\theta)}.$$

In einem einzelnen Ring steckt die Masse  $dM_S = \rho 2\pi a \sin \theta d\theta a da = \frac{1}{2} M_S \sin \theta d\theta$ . Ausnutzung des Kosinus-Satzes ( $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$ ) ergibt  $\sin \theta d\theta = R dR/ar$  und  $dE_{\text{pot}} = -GmM_S dR/2ar$ . Das gesamte Potential berechnet man durch Summierung bzw. Integration über alle möglichen Abstände  $r - a \leq R \leq r + a$ , falls  $P$  außerhalb der Kugel liegt,  $a - r \leq R \leq r + a$ , wenn  $P$  innerhalb der Kugel liegt:

$$E_{\text{pot}}(r) = \begin{cases} -G \frac{mM_S}{2ar} \int_{r-a}^{r+a} dR = -G \frac{mM_S}{r} & \text{für } r > a \\ -G \frac{mM_S}{2ar} \int_{a-r}^{r+a} dR = -G \frac{mM_S}{a} & \text{für } r \leq a \end{cases}$$



■ **Abbildung 1.49** Beitrag eines dünnen Massenrings einer Kugelschale zum Gravitationspotential bei  $P$



■ **Abbildung 1.50a,b** Potentielle Energien und Gravitationskräfte für Kugelschale (a) und Vollkugel (b) mit Radius  $r = a$

Außerhalb der Kugel ist das Potential also nicht von einem bei  $r = 0$  konzentrierten Massenpunkt mit der Masse  $M_S$  zu unterscheiden. Das Innere jedoch ist feldfrei, weil das Potential konstant ist! Bei der Vollkugel sieht ein Körper außerhalb wiederum die volle Masse. Innerhalb der Kugel mit Radius  $a$  und Masse  $M_K = (4\pi/3)a^3$  gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= -Gm\rho \left( \int_0^r \frac{4\pi a'^2}{r} da' + \int_r^a 4\pi a' da' \right) \\ &= -G \frac{mM_K}{a} \left( \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right) \end{aligned}$$

Also steigt die Gravitationskraft linear vom Zentrum zu ihrem Wert an der Kugeloberfläche an (Abb. 1.50).

Ganz allgemein kann das Gravitationspotential eines Probekörpers  $m$  im Feld einer Massenverteilung berechnet werden aus

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -Gm \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \quad (1.76)$$

Haben die Körper eine Gestalt, die von der Kugelform abweicht – schon die Erde hat eine etwa 0,16%ige Abplattung – so findet man kein reines Zentralpotential mehr. Der Einfluss solcher Abweichungen wird im Kapitel über Himmelsmechanik untersucht.

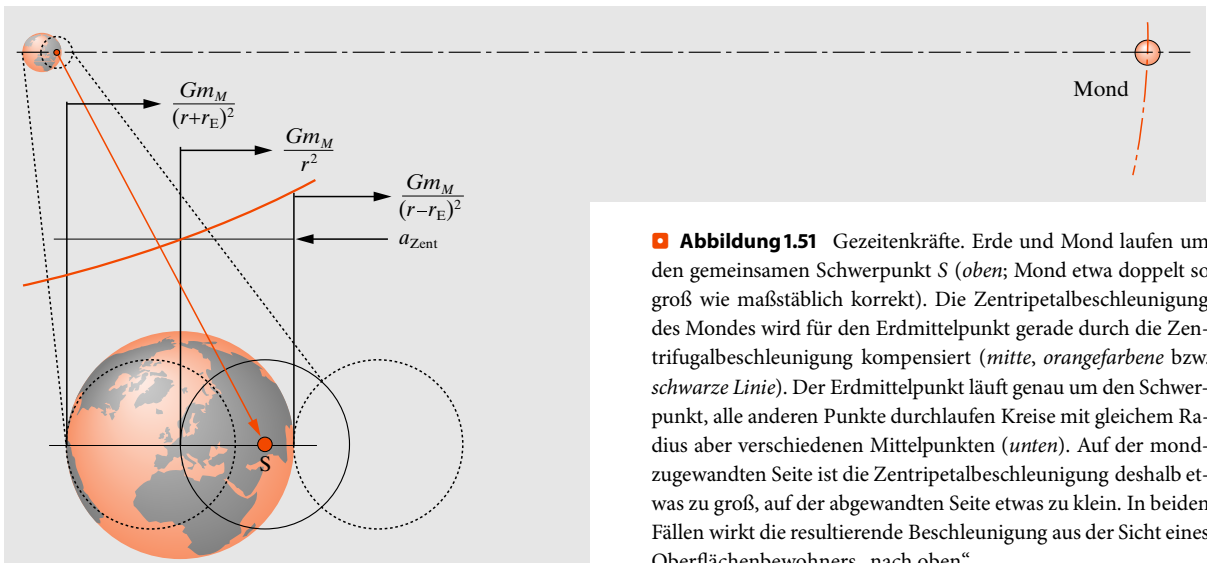
### 1.8.6 Gezeitenkräfte

Es gibt keine vernünftige Massenverteilung, die ein homogenes Gravitationsfeld erzeugt. Höchstens eine gleichmäßig massenerfüllte Scheibe wie die einer Galaxis tut das annähernd in nicht zu großem Abstand. In jedem inhomogenen Feld aber sind die Kräfte, die auf die einzelnen Teile eines ausgedehnten Probekörpers wirken, verschieden. Selbst wenn der Probekörper sich der Gravitation möglichst zu entziehen sucht, indem er „sich fallen lässt“, müssen diese Unterschiede als Spannungen übrig bleiben. Wir betrachten ein Raumschiff, das etwa auf einer Kreisbahn antriebslos um die Erde fliegt. Die Insassen sind „schwerelos“, einfach weil sie ebenso schnell „fallen“ wie die Schiffswände und alle anderen Gegenstände (Proportionalität von träger und schwerer Masse). Sehr genau betrachtet sind aber die Felder und Beschleunigungen auf der erdzugewandten Seite des Schiffes etwas größer (da  $r$  kleiner ist), auf der anderen Seite etwas kleiner als im Schwerpunkt, nach dem sich die Gesamtbewegung der Rakete richtet. Die „oben“ und „unten“ schwebenden Gegenstände würden also sehr langsam an die entsprechenden Schiffswände treiben. Eine lose Vereinigung von Massen würde sich allmählich zerstreuen (jedenfalls, wenn sie dem Zentralkörper näher ist als ein kritischer Abstand, die **Roche-Grenze**).

Die Erde als Ganzes „fällt“ ebenfalls frei im Feld des Mondes. Beide kreisen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, der allerdings der Erde viel näher ist, bei etwa 75% des Erddurchmessers  $r_E$  liegt, also noch innerhalb des Erdkörpers. Der Erdmittelpunkt beschreibt eine Kreisbewegung, (Abb. 1.51 unten), deren Zentrifugalbeschleunigung genau der dort herrschenden Anziehung bzw. Zentripetalbeschleunigung durch den Mond (Masse  $m_M$ , Abstand Erde-Mond  $r$ ) genügen muss:  $a_{Zent} = Gm_M/r^2$ . Alle Punkte des Erdkörpers beschreiben identische Kreise mit dem gleichen Radius, d. h. sie erfahren dieselbe Zentrifugalbeschleunigung (Die Eigenrotation der Erde braucht hierbei nicht beachtet zu werden! Sie ist schon durch die Abplattung niveauflächenmäßig kompensiert.).

Auf der mondzugewandten Erdseite ist die Anziehungskraft des Mondes größer, also suchen alle Gegenstände, zusätzlich zur Kreisbewegung, mit der Differenzbeschleunigung  $Gm_M/(r - r_E)^2 - a_{Zent} = Gm_M/(r - r_E)^2 - Gm_M/r^2$  auf den Mond zu, also nach oben zu „fallen“. Auf der gegenüberliegenden Erdseite ist  $Gm_M/(r + r_E)^2$  etwas kleiner als die Zentripetalbeschleunigung, daher sucht alles nach außen, d. h. wieder nach oben zu fallen. Wenn, wie man meist sagt, einfach der Zug des Mondes den Flutberg auftürmte, müsste auf der anderen Erdseite Ebbe sein und nicht ebenfalls Flut.

Wir wollen die Differenzbeschleunigung  $a_{Gez}$  auf der mondzu- bzw. abgewandten Seite mit der Erdbeschleunigung



**Abbildung 1.51** Gezeitenkräfte. Erde und Mond laufen um den gemeinsamen Schwerpunkt  $S$  (oben; Mond etwa doppelt so groß wie maßstäblich korrekt). Die Zentripetalbeschleunigung des Mondes wird für den Erdmittelpunkt gerade durch die Zentrifugalbeschleunigung kompensiert (mitte, orangefarbene bzw. schwarze Linie). Der Erdmittelpunkt läuft genau um den Schwerpunkt, alle anderen Punkte durchlaufen Kreise mit gleichem Radius aber verschiedenen Mittelpunkten (unten). Auf der mondzugewandten Seite ist die Zentripetalbeschleunigung deshalb etwas zu groß, auf der abgewandten Seite etwas zu klein. In beiden Fällen wirkt die resultierende Beschleunigung aus der Sicht eines Oberflächenbewohners „nach oben“



gung vergleichen und berechnen zunächst näherungsweise

$$a_{\text{Gez}} = Gm_M \left( \frac{1}{(r \pm r_E)^2} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{Gm_M}{r^2} \left( \frac{1}{(1 \pm r_E/r)^2} - 1 \right) \\ \approx \frac{Gm_M}{r^2} (1 \mp 2(r_E/r) - 1) = \mp \frac{2Gm_M r_E}{r^3} \quad (1.77)$$

Vergleich mit der Schwerebeschleunigung durch die Erde liefert

$$\frac{a_{\text{Gez}}}{g} = \frac{2Gm_M r_E r^{-3}}{Gm_E r_E^{-2}} = 2 \frac{m_M}{m_E} \frac{r_E^3}{r^3}, \quad \text{also} \quad a_{\text{Gez}} \approx 10^{-7} g.$$

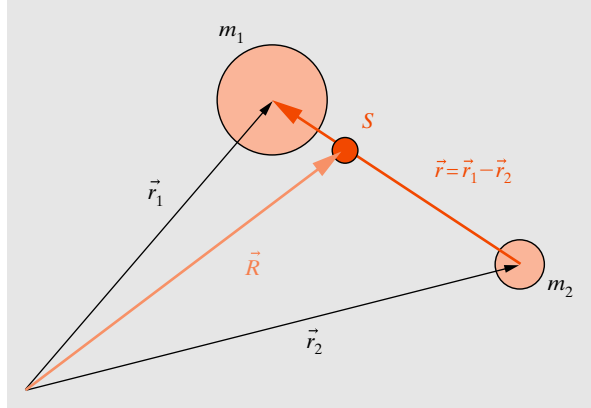
Der feste Erdkörper zieht sich unter der Wirkung der **Gezeitenkräfte** etwas in die Länge, aber die Einstellzeit dieser Deformation, die ja eine zwölfstündige Periode hat, ist zu groß, als dass es zu einer vollen Anpassung an die verzerrten Niveaulächen käme (sonst gäbe es gar keine Meeresgezeiten). Das Wasser folgt mit geringerer Verzögerung. Eine gewisse Verzögerung muss vorhanden sein, solange Kräfte die notwendige Verschiebung der Wassermassen hemmen. Solche Kräfte sind: Die innere Reibung der Wassermassen, die Reibung am Meeresboden, der Anprall an die Kontinentalränder mit Eindringen in Meerengen und Buchten. Diese verzögernden Kräfte führen zu einer Phasenverschiebung zwischen Mondhöchststand und Flut und zu einer Bremsung der Erdrotation. Der Erde wird so ständig Drehimpuls entzogen, der nach dem Drehimpulssatz irgendwo im System wieder auftauchen muss, und zwar im Mond als Hauptverantwortlichem. Dies führt schließlich zu einer sehr langsamen Zunahme des Abstands Erde–Mond. Aufhören kann dieser Prozess offenbar erst, wenn Tag und Monat gleich lang geworden sind.

Genau wie der Mond verursacht auch die unterschiedliche Anziehungskraft der Sonne auf der zu- bzw. abgewandten Seite der Erde eine Gezeitenbeschleunigung, die etwa 1/3 der Wirkung des Mondes ausmacht.

### 1.8.7 Zwei-Körper-Probleme

Die geschlossene Lösung des **Zwei-Körper-Problems** gehört zu den Eckfeilern der erfolgreichen physikalischen Beschreibung der Materie, erlaubt es doch die Behandlung von so verschiedenen Objekten wie dem Planetensystem oder einfachen Atomen. Schon beim Drei-Körper-Problem wird es allerdings schwierig, s. Abschn. 1.8.9.

Nach Newtons Reaktionsprinzip üben Körper Kräfte immer paarweise und in Richtung des Vektors  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$  aufeinander aus,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , Erde und Mond, Sonne und



■ **Abbildung 1.52** Schwerpunkt- und Relativkoordinaten. Zwei Körper, die sich anziehen, drehen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt S

Erde, aber auch Proton und Elektron im Wasserstoffatom. Kräfte verursachen Impulsüberträge, und wir hatten bei den Stoßgesetzen in Abschn. 1.5.9 schon gesehen, dass sich das Schwerpunktsystem besonders gut eignet, um die Dynamik zu beschreiben. Gehorchen zwei Körper im Laborsystem den Bewegungsgleichungen  $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12}$  bzw.  $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21}$  so liegt es nahe, **Relativkoordinaten**  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  und **Schwerpunktkoordinaten**  $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$  einzuführen. Wegen  $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12}/m_1 - \vec{F}_{21}/m_2 = (m_1^{-1} + m_2^{-1})\vec{F}_{12}(\vec{r})$  führt man die **reduzierte Masse**  $\mu$  ein,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (1.78)$$

Dann erhält man mit der Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  die neuen Bewegungsgleichungen

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0, \quad (1.79) \\ \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(\vec{r}).$$

Danach bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig, die innere Dynamik kann jetzt als die Bewegung eines Teilchens mit der Masse  $\mu$  im Kraftfeld eines unendlich schweren Zentrums behandelt werden – eine enorme Vereinfachung des Problems! Wenn einer der Körper sehr viel schwerer ist,  $m_2/m_1 \rightarrow 0$ , dann gilt  $\mu = m_2(1 + (m_2/m_1)) \simeq m_2$ , dann bewegt sich  $m_2$  wie im Feld eines unendlich schweren Körpers. Im Sonnensystem hat auch der größte Planet Jupiter nur  $m_J \sim 1/1000$  Sonnenmasse  $M_\odot$ . Für das Plane-



tensystem können wir also in guter Näherung schreiben

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G}{\mu} \frac{mM_{\odot}}{r^3} \vec{r} = -G \frac{m+M_{\odot}}{r^3} \vec{r} \simeq -G \frac{M_{\odot}}{r^3} \vec{r}. \quad (1.80)$$

### BEISPIEL

Jupiter schleudert die Sonne herum! Sonne und Jupiter drehen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Der Abstand der Sonne zum Schwerpunkt beträgt  $r_{\odot} = rm_j/(m_j + M_{\odot}) \simeq rm_j/M_{\odot}$ . Einsetzen der Zahlenwerte (s. Tabelle 1.1) ergibt den Wert  $r_{\odot} \sim 0,744 \cdot 10^6$  km. Dieser Radius ist größer als der Sonnenradius  $0,696 \cdot 10^6$  km, Jupiter schleudert also die Sonne – sehr langsam – um mehr als ihren Durchmesser herum. Im Prinzip könnte ein außerirdischer Beobachter aus der periodischen Bewegung der Sonne auf die Existenz von Jupiter schließen.

## 1.8.8 Planetenbahnen

Der wichtigste Teil von Johannes Keplers (1571–1630) Lebenswerk bestand darin, aus einem ungeheuren astronomischen Beobachtungsmaterial (völlig mit bloßem Auge von Tycho Brahe gewonnen und entsprechend ungenau) seine drei Gesetze zu kondensieren:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Der Radiusvektor (der Fahrstrahl Sonne–Planet) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.

Das zweite dieser Kepler-Gesetze folgt für die moderne Dynamik sofort als Sonderfall des Drehimpuls- oder Flächensatzes (Abschn. 1.5.7); seine Voraussetzung, nämlich dass das Kraftfeld der Sonne ein Zentralfeld sei, ist ja kaum zu bezweifeln (Kepler selbst dachte allerdings an tangential zur Bahn wirkende Kräfte, die die Planeten, ganz aristotelisch gedacht, in Gang halten sollen): Der Drehimpuls  $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}$  des Planeten ist also konstant. Auch hier muss die reduzierte Masse eingesetzt werden, in sehr guter Näherung gilt aber für die Planeten wieder  $\mu \simeq m_2$ . Das erste und das dritte Gesetz ergeben sich erst, wenn man eine bestimmte Form dieses Kraftfeldes, und zwar

$\vec{F}_{12} = \vec{F} = -\alpha \vec{r}/r^3$ , annimmt. Wir stellen zuvor eine Größe vor, die sich nicht auf den ersten Blick erschließt, aber die Behandlung anschließend ungemein erleichtert: Der **Runge-Lenz-Vektor**  $\vec{e}$  ist wie Energie und Drehimpuls eine weitere Konstante der Bewegung,

$$\alpha \vec{e} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r} = \text{const.} \quad (1.80a)$$

Zum Beweis rechnet man mit  $\ddot{\vec{r}} = -\alpha \vec{r}/(mr^3)$  (wir verwenden  $\mu \simeq m$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \alpha \vec{e} &= \left( \ddot{\vec{r}} \times \vec{L} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{L}} \right) - \alpha \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r} \dot{r}}{r^2} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{r^3} \left( \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) + r^2 \dot{\vec{r}} - r \dot{r} \vec{r} \right) = 0, \end{aligned}$$

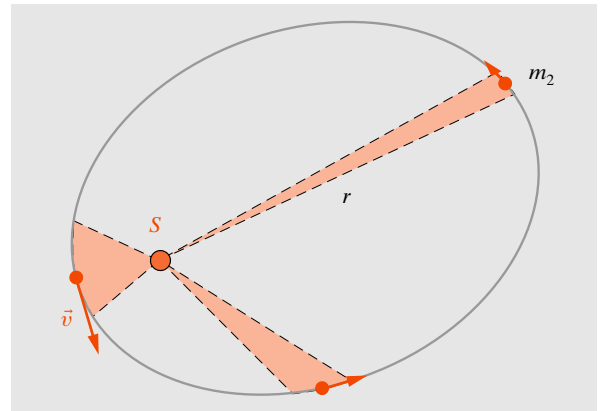
wobei man im letzten Schritt die Theoreme der Vektormultiplikation und  $\dot{r} = d/dt \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = r^{-1} \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$  verwendet. Wir gehen noch einen Schritt weiter, berechnen

$$\begin{aligned} \alpha \vec{r} \cdot \vec{e} &= \alpha r \epsilon \cos \varphi = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) - \alpha \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} \\ &= (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{L} - \alpha r = \alpha \left( \frac{L^2}{m\alpha} - r \right) \end{aligned}$$

mit  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L}/m$  und finden damit das endgültige Resultat

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \epsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (1.81)$$

Der Aufwand hat sich gelohnt, denn aus dieser Gleichung ist nicht nur sofort abzulesen, dass es sich (für  $0 < \epsilon < 1$ )



■ **Abbildung 1.53** Keplers zweites Gesetz: Der Fahrstrahl Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

Energie $E$ Drehimpuls $L$	Exzentrizität $\epsilon$ Parameter $p$	Halbachsen $\{a, b\}$
	$\epsilon = (1 + 2EL^2/m\alpha^2)^{1/2}$ $p = L^2/m\alpha$	$a = -\alpha/2E$ $b = L/(-2mE)^{1/2}$
$L = (m\alpha p)^{1/2}$ $E = -\alpha(1 - \epsilon^2)/2p$		$a = p(1 - \epsilon^2)^{-1}$ $b = p(1 - \epsilon^2)^{-1/2}$
$L = b(m\alpha/a)^{1/2}$ $E = -\alpha/2a$	$\epsilon = (1 - (b/a)^2)^{1/2}$ $p = b^2/a$	
$\alpha = Gm_1m_2$		

■ **Tabelle 1.1** Parameter von Kepler-Ellipsen

1) um eine Ellipse mit der **Exzentrizität**  $\epsilon = |\vec{e}|$  handelt, auch der Runge-Lenz-Vektor lässt sich jetzt interpretieren: Er liegt wegen  $\vec{e} \cdot \vec{L} = 0$  in der Bahnebene, und für  $\varphi = 0$  ( $\vec{e} \parallel \vec{r}$ ) wird  $r$  minimal, also zeigt er vom Brennpunkt der Ellipse in Richtung der Periaapsis (bei der Sonne: Perihel). Generell werden durch Gl. (1.81)) die Kegelschnitte Kreis ( $\epsilon = 0$ ), Ellipse ( $0 < \epsilon < 1$ ), Parabel ( $\epsilon = 1$ ) und Hyperbel ( $\epsilon > 1$ ) dargestellt. Eine alternative Behandlung ist im elektronischen Material auf dem Extra-Server (1.8e.1) vorgestellt.

Ellipsen und als Spezialfall der Kreis sind besonders interessant, weil es sich dabei um die gebundene Bewegung handelt. Hyperbeln spielen eine wichtige Rolle für das Rutherford'sche Streuexperiment und werden in Abschn. 14.5 behandelt. Die Transformation auf die Normalform der Ellipse ( $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ ) überlassen wir zur Übung und geben nur die Koeffizienten in Tabelle 1.1 an. Wichtiger ist hier, die zugehörige mechanische Energie zu bestimmen. Dazu betrachten wir den Energiesatz (1.61) in Polarkoordinaten,

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - \frac{\alpha}{r}.$$

Der Drehimpuls ist konstant,  $\vec{L} = m\vec{r} \times (\dot{\vec{r}}) = m\vec{r} \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$  und  $L^2 = m^2(r^2\dot{\varphi})^2$ , er wirkt als **Zentrifugalpotential** ( $m/2)(r\dot{\varphi})^2 = L^2/(2mr^2)$ :

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + E_{\text{pot}}^{\text{eff}}(r).$$

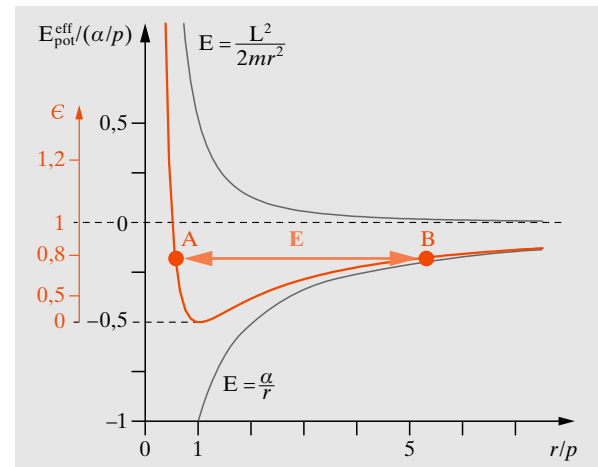
Das ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem 1-dimensionalen Potential  $E_{\text{pot}}^{\text{eff}}(r)$  (Abb. 1.54). Der Körper pendelt in diesem Bild zwischen den sogenannten **klassischen Umkehrpunkten**  $\{A, B\}$  hin und her:

Dort befinden sich die beiden Extrema der Ellipse, wenn die Energie  $E < 0$  bleibt. An den Umkehrpunkten gilt  $\dot{r} = 0$ , deshalb findet man mit  $r_{A,B} = p/(1 \pm \epsilon)$  und  $E = (L^2/2mp^2)(1 \pm \epsilon)^2 - (\alpha/p)(1 \pm \epsilon)$  das Ergebnis

$$\epsilon = (1 + 2EL^2/m\alpha^2)^{1/2}. \quad (1.82)$$

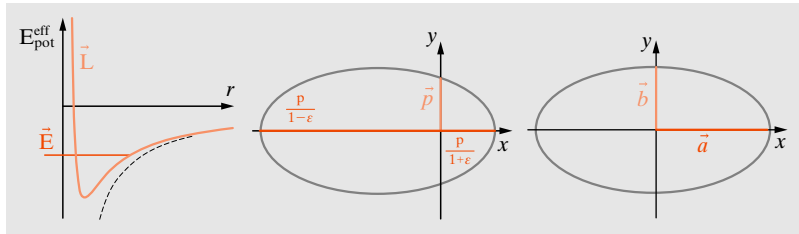
Für  $-L^2/2m\alpha \leq E < 0$  folgt die Bewegung einer Ellipse, für  $E \geq 0$  ist die Bewegung ungebunden und hat Hyperbelform.

Das dritte Keplersgesetz ergibt sich so: Nach dem Flächensatz wird in der Zeit  $\Delta t$  die Fläche  $A = (L/2m)\Delta t$



■ **Abbildung 1.54** Das effektive Potential setzt sich aus dem Gravitationspotential und dem Zentrifugalpotential zusammen. Der Massenpunkt pendelt zwischen den klassischen Umkehrpunkten A und B hin und her. Die Exzentrizität  $\epsilon$  wächst bei festem Drehimpuls mit der Gesamtenergie  $E$  (1.82)

■ **Abbildung 1.55** Die Eigenschaften der Planetenbahnen werden durch die Bahnebene, die Orientierung der Ellipse durch den Runge-Lenz-Vektor sowie zwei weitere Konstanten der Bewegung festgelegt



überstrichen. Insbesondere wird dann während der Umlaufzeit  $T$  die Fläche der Ellipse  $A = \pi ab = \pi a^{3/2} L (m\alpha)^{-1/2}$  überstrichen, was direkt liefert

$$T = 2mA/L = 2\pi a^{3/2} (m/\alpha)^{1/2} \simeq \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM_\odot)^{1/2}}. \quad (1.83)$$

Das Kepler-Problem enthält insgesamt 5 Parameter, um die Planetenbahnen zu beschreiben: Die Richtung des Drehimpulses legt die Ebene fest, z. B. mit zwei Winkeln in einem fest gewählten Bezugssystem, Drehimpulsbetrag und Energie (oder alternativ  $(p, \epsilon)$  bzw.  $(a, b)$ , s. Tabelle 1.1) fixieren zwei weitere Größen, und schließlich legt der Runge-Lenz-Vektor die Richtung der Periapsis in der Bahnebene fest. Der Runge-Lenz-Vektor ist also eine weitere Erhaltungsgröße, zusätzlich zu den 3 Drehimpuls-Koordinaten und der Energie. Die zugrunde liegende Symmetrie äußert sich im Auftreten geschlossener Bahnen – nur so gibt es einen festen Zusammenhang  $r(\varphi)$ !

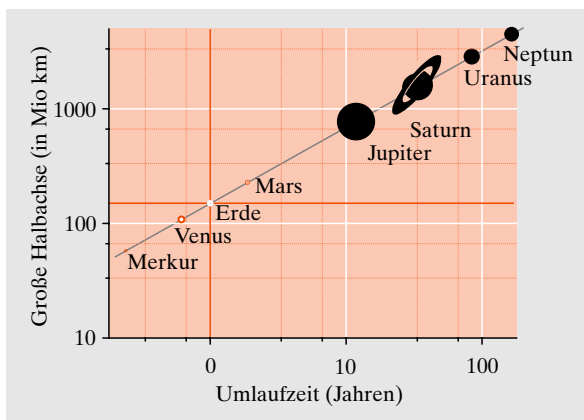
Von den sechs Freiheitsgraden eines Körpers ist noch einer übrig: Zu welchem Zeitpunkt befindet sich der Körper wo auf der Bahn? Das können wir im Prinzip mit Hilfe des Drehimpulses beantworten, wegen  $L = mr^2\dot{\varphi}$  gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} = \frac{m\alpha^2}{L^3} (1 + \epsilon \cos \varphi)^2. \quad (1.84)$$

Kennt man  $\varphi(t)$ , so auch  $r(t)$  wegen (1.81). Allerdings ist diese Gleichung nur numerisch, nicht analytisch lösbar. Kepler hat eine Transformation auf eine etwas einfacher zu lösende, aber immer noch transzendente Gleichung angegeben, deren Details wir im elektronischen Material auf dem Extra-Server (1.8e.2) zeigen: Wenn  $t_0$  die Durchgangszeit an der Periapsis ist, dann gehorcht der neue eingeführte Winkel  $E$ , der mit dem Radius verknüpft ist durch  $r = a(1 - \epsilon \cos E)$ , der **Kepler-Gleichung**

$$\frac{2\pi}{T} (t - t_0) = E - \epsilon \sin E. \quad (1.85)$$

Zur Lösung des Bahnproblems berechnet man also zuerst mit (1.85) ein Wertepaar  $(t, E)$ , bestimmt daraus  $r(E)$  und dann mit Hilfe von (1.81) den zugehörigen Winkel  $\varphi(t)$ .



■ **Abbildung 1.56** Keplers drittes Gesetz für die Planetenbewegung. Die Größenverhältnisse der Planeten entsprechen ihren wahren Größen

## BEISPIEL

Welche der Daten aus Tabelle 1.2 können Sie nachrechnen?

$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$  verknüpft Masse, Dichte und Radius. Sidrische Umlaufzeit in Jahren:  $a^{3/2}$  (Bahnradius  $a$  in AE). Für Monde  $T = a^{3/2} (M/M_\odot)^{-1/2}$  (Sonnenmasse  $M_\odot = 1,989 \cdot 10^{-30}$  kg).

### 1.8e.1 Kepler-Problem II

### 1.8e.2 Zur Lösung der Kepler-Gleichung

■ **Tabelle 1.2** Mechanische Eigenschaften: Planeten, Zwergplaneten, Monde, Sonne

Planeten, Zwergplaneten und Monde								
	Monde	$M/M_E$	$R/R_E$	$\rho$ g/cm <sup>3</sup>	$a$ AE	$\epsilon$	$T$ y	$T_{\text{rot}}$ d
Merkur		0,055	0,38	5,43	0,387	0,206	0,241	56,65
Venus		0,816	0,95	5,24	0,723	0,007	0,615	−243,0
Erde		1	1	5,52	1	0,017	1	0,9973
	Mond	0,012	0,27	3,34	0,0023	0,0549		27,3
Mars		0,107	0,27	3,93	1,52	0,093	1,881	1,03
	Ceres	0,0002	0,08	2,05	2,55	0,08	4,61	0,38
Jupiter		317,8	11,21	1,33	5,205	0,048	11,87	0,4135
	Io	0,015	0,285	3,56	0,0028	0,0041		1,77
	Ganymed	0,025	0,41	1,93	0,0072	0,0013		7,16
Saturn		95,16	9,45	0,70	9,576	0,055	29,45	0,4375
Uranus		14,50	4,01	1,30	19,28	0,047	84,02	−0,65
Neptun		17,20	3,88	1,76	30,14	0,010	164,79	0,768
	Pluto	0,002	0,18	2,00	39,88	0,248	247,92	−6,387
$M_E = 5,9742 \cdot 10^{24}$ kg; $R_E = 6378,14$ km; $1 \text{ AE} = 149,60 \cdot 10^6$ km;								
Sonne								
$M_\odot = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg; $R_\odot = 0,696 \cdot 10^6$ km; $\rho_\odot = 1408$ kg/cm <sup>3</sup> ; $T_{\text{rot}} = 24,8$ d (am Äquator)								

1.8.9 Himmelsmechanik

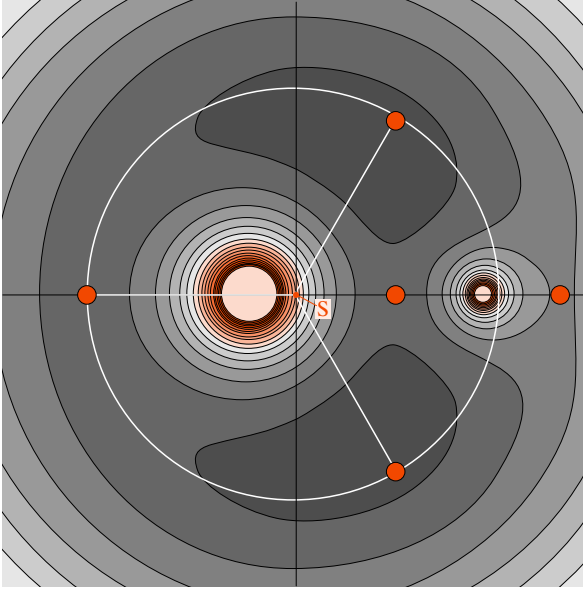


Wenn wir die Gesetze der Natur und den Anfangszustand exakt kennen würden, so könnten wir den Zustand des Universums zu jedem weiteren Zeitpunkt vorhersagen. Aber selbst wenn die Naturgesetze keine Geheimnisse mehr vor uns hätten, so könnten wir die Anfangsbedingungen doch nur genähert bestimmen. Wenn uns dies erlaubt, die folgenden Zustände mit der gleichen Näherung anzugeben, so sagen wir, dass das Verhalten vorhergesagt wurde, dass es Gesetzmäßigkeiten folgt. Aber das ist nicht immer der Fall: Es kann vorkommen, dass kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große im Endergebnis zur Folge haben (...) Vorhersage wird unmöglich und wir haben ein zufälliges Phänomen.  
H. Poincaré, Wissenschaft und Methode (1912)

**Integrale der Bewegung** Die keplersche Beschreibung der Planetenbewegung verdankt ihren bahnbrechenden Erfolg der Existenz der Konstanten der Bewegung – Drehimpuls, Energie, Runge-Lenz-Vektor im Fall des  $1/r$ -Potentials. Nach der Keplerschen Theorie findet die einmal eingeschlagene Bewegungsform im idealisierten Zwei-Körper-Problem auch für alle Zeiten statt. In dynamischen physikalischen Systemen muss aber die Frage gestellt werden,

wie stabil die gefundenen Lösungen gegen äußere Störungen sind. Dieser Frage sind Mathematiker und Physiker schon lange nachgegangen. Henri Poincaré (1854–1912) hat mathematisch bewiesen, dass das 3- und Mehr-Körper-Problem i. Allg. analytisch nicht lösbar ist, nicht integrel, wie man sagt. Numerisch sind auch die Bewegungsgleichungen von  $n$ -Körper-Problemen zugänglich, aber die Komplexität wächst sehr schnell, schon für drei Körper sind  $3 \times 6$  gekoppelte Differentialgleichungen zu lösen, die nur 10 Einschränkungen (6 für die Bewegung des Schwerpunkts, 3 Drehimpuls, 1 Energie) unterliegen. Welche Aussagen dann noch möglich sind, wird im Kap. 5 über nichtlineare Dynamik näher untersucht.

**Eingeschränktes Drei-Körper-Problem** Nicht einmal wenn eine Masse sehr klein ist gegenüber den beiden anderen,  $m \ll m_1, m_2$ , kann das Drei-Körper-Problem vereinfacht werden. Nur das sogenannte kreisförmig eingeschränkte Drei-Körper-Problem – dabei bewegen sich die beiden großen Massen auf einer Kreisbahn umeinander – erlaubt weitere Vereinfachungen. Wir verdeutlichen die komplexe Problematik mit einer Betrachtung der Energieerhaltung. Dazu begeben wir uns in ein Bezugssystem, das mit den beiden schweren Körpern rotiert – sie sind also im Ab-



■ **Abbildung 1.57** Eingeschränktes Drei-Körper-Problem: Höhenliniendarstellung des effektiven Potentials, das zu den hellen Farbtönen hin abfällt. Das Bezugssystem rotiert mit den beiden massereichen Körpern (hier:  $0,8M$  und  $0,2M$  der Gesamtmasse  $M$ , weiße Scheiben) um den Schwerpunkt  $S$ . Die fünf roten Punkte werden Lagrange-Punkte genannt, drei formen ein gleichseitiges Dreieck. Dort werden auf die Körper im rotierenden Bezugssystem keine Kräfte ausgeübt

stand  $r_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  an gegenüberliegenden Punkten fixiert zu finden. Das System rotiert mit  $\omega^2 = G(m_1 + m_2)/r_{12}^3$ , deshalb gilt für den 3. Körper bei  $\vec{r}$ :

$$E = \frac{m}{2} v^2 - \frac{m}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - G \frac{mm_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - G \frac{mm_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}. \quad (1.86)$$

Das Zentrifugalpotential  $-m\omega^2(x^2 + y^2)/2 = -m(\vec{\omega} \times \vec{r})^2/2$  tritt hier als *negatives* effektives Potential auf, denn die Kraft  $\vec{F}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  ist immer nach außen gerichtet. Das effektive Potential zeigt Abb. 1.57. Für tiefe Bindungsenergien erwartet man Bewegung nur in der Nähe der massereichen Körper, ähnlich der Kepler-Bewegung. Ist die Energie genügend groß, kann Bewegung von einem zum anderen Körper stattfinden und das System offensichtlich auch verlassen werden. An fünf Punkten, den sogenannten **Lagrange-Punkten**, treten Kräftegleichgewichte auf, die allerdings statisch instabil sind. Das eingeschränkte Drei-Körper-Problem ist von praktischem

Nutzen, weil es z. B. die Bewegung von Raumsonden im Erde-Mond-System beschreibt.

### 1.8.10 Bahnstörungen

M

Existenz und Position des Neptun wurden zuerst von Le-verrier und Adams aus den Bahnstörungen des Uranus berechnet, von Galle 1846 gefunden. Dasselbe leisteten Lowell und Pickering für Pluto, der 1930 von Tombaugh entdeckt, 2006 zum Zwergplaneten „herabgestuft“ wurde. Wenn die Körper stark an ihren Zentralkörper gebunden sind, verursachen dritte Körper – z. B. die anderen Planeten – oder Abweichungen des Körpers von der idealen Kugelgestalt nur kleine Störungen des idealisierten Zwei-Körper-Problems. Diese können mit der **Störungsrechnung** behandelt werden.

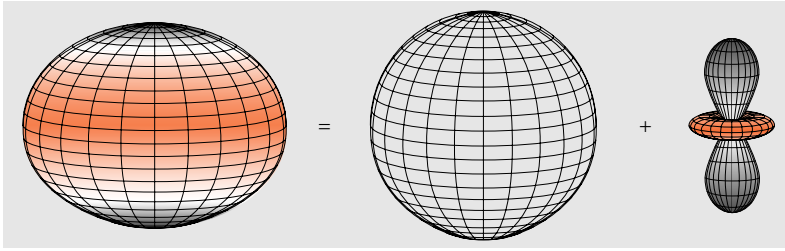
Wir werden die Störungsrechnung aufs äußerste vereinfachen und die Bewegung von Planeten im Potential  $U = -\alpha/r + \beta/r^n$  ( $n \neq 1$ ) mit einem kleinen Störbeitrag betrachten. Ganz allgemein kann man das Feld einer Massen- oder Ladungsverteilung, die wenigstens zylindersymmetrisch ist, in den Koordinaten  $r$  und  $\theta$  (Winkel von der Symmetrieachse aus) als Summe von Kugelfunktionen darstellen:

$$U = -\frac{\alpha}{r} \left( 1 + B \frac{r_{\oplus}}{r} \cos \theta + C \left( \frac{r_{\oplus}}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right), \quad (1.87)$$

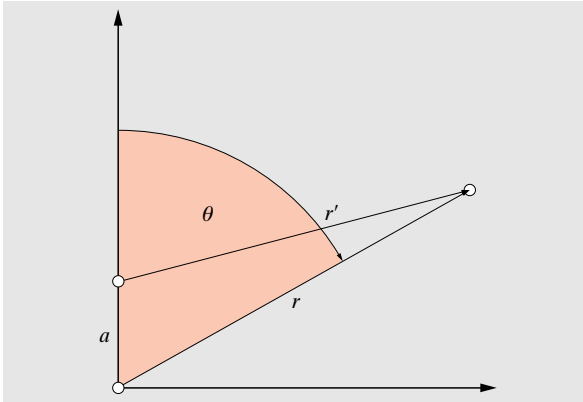
wobei  $B, C, \dots$  kleine, dimensionslose Größen sind und  $r_{\oplus}$  einen charakteristischen Radius bezeichnet, z. B. den Erdradius.

Man findet diese Reihe am einfachsten, wenn man einen Massenpunkt nicht in den Koordinatenursprung, sondern im Abstand  $a$  auf die Symmetrieachse setzt. Ein Punkt  $(r, \theta)$  hat dann nach dem Cosinussatz von diesem Massenpunkt den Abstand  $r' = (r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta)^{1/2}$  (Abb. 1.59). Für das Potential kommt es auf  $1/r'$  an. Wir entwickeln dies für  $x = a/r \ll 1$  gemäß  $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + 3x^2/8 + \dots$ ,

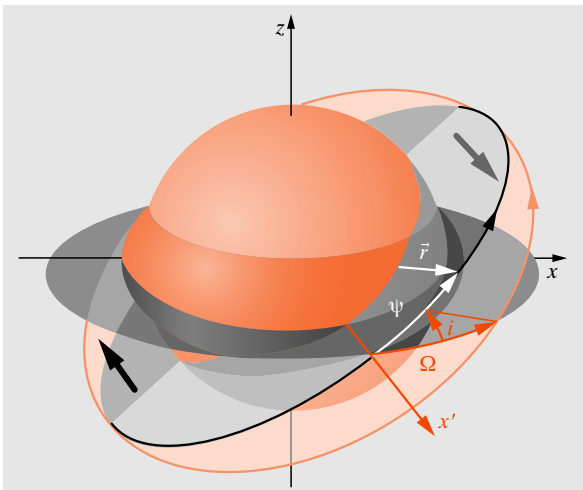
$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2r} \left( \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) + \frac{3}{8r} \left( \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^2 - \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \theta + \frac{a^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.88)$$



■ **Abbildung 1.58** Eine abgeplattete Kugel kann als Summe einer idealen Kugel und einer quadrupolaren Massenverteilung aufgefasst werden. Rot eingefärbte Bereiche haben zusätzliche Massen, grau eingefärbten Bereichen fehlt Masse. Anders als die elektrische kennt die Gravitationskraft nur eine Ladung; die negativen Anteile sind deshalb fehlende Massenbeiträge. Im Beispiel beträgt der Quadrupolanteil 20%. Das Geoid der Erde hat einen Anteil von ca.  $10^{-3}$



■ **Abbildung 1.59** Taylorentwicklung für das Potential eines Massenpunktes bei  $a$  um den Ursprung



■ **Abbildung 1.60** Die Abplattung der Erde, hier vergrößert dargestellt als ein Massengürtel am Äquator, übt Kräfte aus, die durch die Pfeile symbolisiert werden. Die Kräfte erzeugen ein Drehmoment, das die so genannten Knoten der Satellitenbahnen (die Durchstoßpunkte in der Äquatorebene) mit der Säkularfrequenz  $\Omega$  um den Äquator herum wandern lässt

#### BEISPIEL

Die Abplattung der Erde verursacht die Präzession von Satellitenbahnen. Bestimmen Sie die Kreisfrequenz der Drehung der Rotationsebene der kreisförmigen Satellitenbahn (Radius  $r$ ) mit Inklinationswinkel  $i$  um die Erdachse. Der Massen-Quadrupolkoeffizient der Erde beträgt an der Erdoberfläche  $C = 10^{-3}$  (Gl. (1.87)).

Wir verteilen die Masse auf die Umlaufbahn, (Abb. 1.61),  $dM = (M/2\pi)d\varphi$ , das Massenelement besitzt mit  $\cos \theta = \sin \varphi \sin i$  und  $K = (GMm/4\pi r)C(r_{\oplus}/r)^2$  nach Gl. (1.87) die potentielle Energie  $dU' = -Kd\varphi(3 \sin^2 i \sin^2 \varphi - 1)$ . Die beiden durch die Knotenlinie  $x'$  in Abb. 1.60 getrennten Halbringe besitzen jeweils die potentielle Energie  $\int_0^\pi dU'(\varphi) = U' = -(\pi K/2)(3 \sin^2 i - 2)$ . Daraus resultieren entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta$ , von denen sich die  $F_r$ -Anteile kompensieren, die Komponenten  $F_\theta = -r^{-1}(\partial/\partial i)U' = 3\pi K r^{-1} \cos i \sin i$  den Ring in die Äquatorialebene drehen. Während die Gesamtkraft verschwindet, erfährt der Drehimpuls ein Drehmoment. Die Kräfte auf die beiden Halbringe greifen jeweils im Schwerpunkt mit Abstand  $r' = 2r/\pi$  vom Ursprung an, das Dreh-

moment beträgt also  $\tau = 2(2r/\pi)F_\theta = 12K \cos i \sin i$ . Es liegt parallel zur Äquatorialebene, kann also nur die  $L_\perp = L \sin i$ -Komponente des Drehimpulses ändern. Weil das Drehmoment auch auf dem Drehimpuls selbst senkrecht steht, muss sich  $\vec{L}$  auf einem Kegelmantel um die Erdachse herum bewegen. Für die Kreisfrequenz gilt dann  $\Omega = \dot{L}_\perp/L_\perp = \tau/L_\perp$ . Mit  $GmM/r = m\omega^2 r^2$  und  $L = m\omega r^2$  findet man dann

$$\Omega = -\omega \frac{3C}{\pi} \left( \frac{r_\oplus}{r} \right)^2 \cos i .$$

Äquatornahe Satellitenbahnen werden bei jedem Umlauf um den Winkel  $\Delta\Omega \approx 0,36^\circ (r_\oplus/r)^2$  verschoben.

### 1.8.11 Bahnstörungen von Planeten



Aus den Bahnstörungen von Planeten ist die Existenz weiterer Planeten vorhergesagt worden, besondere Berühmtheit hat aber die Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) von Einstein (s. Kap. 13) über einen Zusatzbeitrag von  $43''$ /Jahrhundert zur Periheldrehung des Merkur erlangt. Der größte Teil der Periheldrehungen wird aber durch andere Planeten verursacht, die man sich für die sehr langen betrachteten Zeiträume als Ringe über ihre Bahnen verschmiert denken kann. Einsteins Beitrag macht nur ca. 10% der gesamten Störung aus.

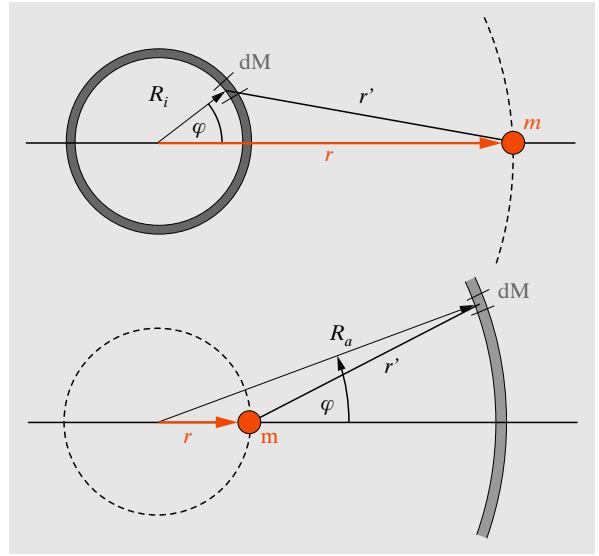
Die Lage des Perihels  $\Phi$  wird durch den Runge-Lenz-Vektor  $\vec{e} = \epsilon \vec{e}_e$  (Gl. (1.80a)) gegeben, seine Änderung beschreibt also dessen Änderung – vorausgesetzt, die Ex-

■ **Tabelle 1.3** Beiträge zur Perihelverschiebung des Merkur

	$\Delta\Phi_{100y}^{(1)}$	$\Delta\Phi_{100y}^{(2)}$	Ref.*
	in Bogensekunden/Jahrhundert		
Venus	152	270	277
Erde	70	93	90
Mars	2,1	2,3	2,5
Jupiter	158	159	154
Saturn	7,6	7,6	7,3
gesamt		532	532
ART <sup>†</sup>	–	–	43
beobachtet			575

\*: M.G. Stewart, Am. J. Phys. 73, 730 (2005)

<sup>†</sup> ART: Allgemeine Relativitätstheorie



■ **Abbildung 1.61** Zur Berechnung von Bahnstörungen

zentrität  $\epsilon$  bleibt selbst erhalten. Die Gesamtkraft ist  $\vec{F} = m\vec{\ddot{r}} = -\alpha/r^2(1 + f(r))\vec{e}_r$ , und mit  $\alpha = GmM_\odot$ ,  $\vec{e} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L}/\alpha - \vec{e}_r$  zeigt man nach kurzer Rechnung

$$\dot{\vec{e}} = f(r)\dot{\phi}\vec{e}_\phi .$$

Multiplikation mit  $\vec{e}$  ergibt mit  $\vec{L} = mr^2\dot{\phi}\vec{e}_z$  und  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\phi}\vec{e}_\phi$ :  $d/dt(\epsilon^2/2) = \dot{\phi}f(r)\vec{e}_\phi\vec{e} = -\dot{r}f(r)L^2/\alpha mr^2 = -d/dt(\int_{r_1}^{r_2} f(r)(L^2/\alpha mr^2)dr)$ . Pendelt der Körper periodisch zwischen den Umkehrpunkten  $r_{1,2}$ , dann ist das Integral über diese Periode immer konstant und die Exzentrität erhalten.

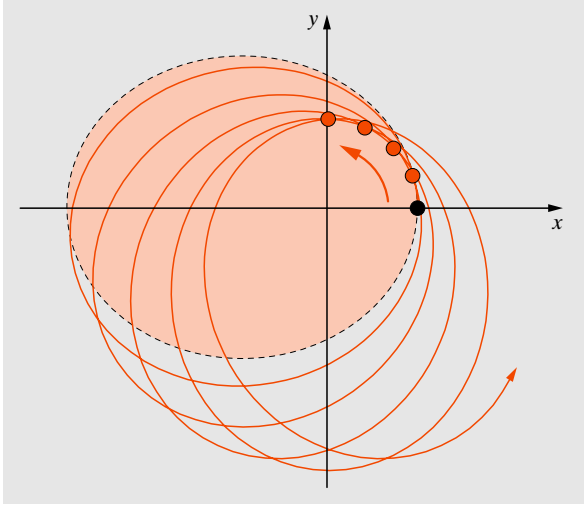
Die Rotationsfrequenz des Runge-Lenz-Vektors ergibt sich aus  $\vec{e} \times \dot{\vec{e}} = \epsilon^2 \dot{\Phi} \vec{e}_z$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \dot{\Phi} \vec{e}_z &= \left( \frac{1}{\alpha} \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \vec{e}_r \right) \times (f(r)\dot{\phi}\vec{e}_\phi) \\ &= f(r)\dot{\phi} \left( \frac{L}{\alpha} r\dot{\phi} - 1 \right) \vec{e}_z . \end{aligned}$$

Wir berechnen die Winkelverschiebung des Perihels  $\Delta\Phi$ , indem wir die ungestörte Lösung  $r\dot{\phi} = (\alpha/L)(1 + \epsilon \cos \varphi)$  (Gln. (1.81), (1.84)) und  $\dot{\phi}dt = d\varphi$  einsetzen und über einen Umlauf integrieren,

$$\Delta\Phi_T = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{2\pi} f(r) \cos \varphi d\varphi . \quad (1.89)$$





■ **Abbildung 1.62** Störungen des  $1/r$ -Potentials durch effektive Zentralkräfte: Die Perihelbewegung ist gleichläufig mit der Planetenbewegung

Es reicht also aus, die Störkraft  $F' = -\alpha f(r)/r^2$  zu kennen, um die Störungen der Keplerbahnen zu berechnen. Wir betrachten als Beispiel die Störung des Merkur (Masse  $m$ , Position  $\vec{r}_M$ ), der sich im (stationären) Sonne-Jupiter-Schwerpunktsystem (Massen  $M_\odot, M_J$ ; Positionen  $\vec{r}_\odot, \vec{r}_J$ ) bewegt:

$$\ddot{\vec{r}}_M = -\frac{GM_\odot}{|\vec{r}_M - \vec{r}_\odot|^3}(\vec{r}_M - \vec{r}_\odot) - \frac{GM_J}{|\vec{r}_M - \vec{r}_J|^3}(\vec{r}_M - \vec{r}_J).$$

Bei der Umrechnung auf heliozentrische Koordinaten ( $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_\odot$ ,  $\vec{R} = \vec{r}_J - \vec{r}_\odot$ ,  $\vec{r}_\odot = -(M_J/M_\odot)\vec{r}_J = -M_J\vec{R}/(M_\odot + M_J)$ ) verwenden wir  $\ddot{\vec{r}}_M = \ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{r}}_\odot = \ddot{\vec{r}} - \omega_J^2 \vec{r}_\odot = \ddot{\vec{r}} + GM_J\vec{R}/R^3$ ,

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_\odot}{r^3}\vec{r} - \frac{GM_J}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}(\vec{r} - \vec{R}) - \frac{GM_J}{R^3}\vec{R}.$$

Wir entwickeln  $1/|\vec{r} - \vec{R}|^3 = (R^2 + r^2 - 2rR \cos \gamma)^{-3/2} \simeq R^{-3}(1 + 3r \cos \gamma/R + \dots)$  und erhalten die neue Gleichung

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha/m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} - \frac{M_J}{M_\odot}\frac{\alpha/m}{R^3}\left(\left(1 + \frac{3r}{R}\cos\gamma\right)\vec{r} - \frac{3r}{R}\cos\gamma\vec{R}\right).$$

Mit  $\vec{R} = R \cos \gamma \vec{e}_r - R \sin \gamma \vec{e}_\gamma$  bestimmen wir die über einen Umlauf ( $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ ) gemittelte Kraft ( $\langle \cos \gamma \rangle = 0$ ,  $\langle \cos^2 \gamma \rangle = 1/2$ ,  $\langle \sin \gamma \cos \gamma \rangle = 0$ ),

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\left(1 - \frac{M_J}{2M_\odot}\left(\frac{r}{R}\right)^3\right).$$

Jupiter verursacht also in der Merkur-Bewegung die mittlere radiale Störkraft  $F'_r = (\alpha/r^2)(M_J/2M_\odot)(r/R)^3 = -(\alpha/r^2)f_J^{(1)}(r)$ . Damit berechnet man die Perihelverschiebung nach Gl. (1.89) und mit  $r = p/(1 + \epsilon \cos \varphi)$ :

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_T &= -\frac{1}{\epsilon}\frac{M}{2M_\odot}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^3\cos\varphi\,d\varphi \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\frac{M}{2M_\odot}\left(\frac{p}{R}\right)^3\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{(1 + \epsilon\cos\varphi)^3}\,d\varphi.\end{aligned}$$

Das Integral werten wir für kleine  $\epsilon$  aus nach

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{(1 + \epsilon\cos\varphi)^3}\,d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}(1 - 3\epsilon\cos\varphi + \mathcal{O}(\epsilon^2))\cos\varphi\,d\varphi \approx -3\pi\epsilon\end{aligned}$$

und finden mit  $p \approx r$  in führender 1. Ordnung in  $r/R$ , gemessen in Grad

$$\Delta\Phi_T^{(1)} \approx 360^\circ \frac{M}{M_\odot} \frac{3}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^3. \quad (1.90)$$

Üblicherweise wird die Perihelverschiebung pro Jahrhundert angegeben, also  $\Delta\Phi_{100y} = \Delta\Phi_T \cdot 100/T$  ( $T$ : Umlaufzeit des gestörten Planeten). Mit dieser groben Näherung erhalten wir die Werte aus Tabelle 1.3 (2. Spalte) für die Störung des Merkur durch die übrigen Planeten. Verwendet man eine verbesserte Störkraft  $f_J^{(2)}(r) = (M/2M_\odot)(r/R)^3/(1 - (r/R)^2)$  (M.P. Price and W.F. Rush, Am. J. Phys. **47**, 531 (1979)), erhält man durch Entwicklung nach  $(r/R)$  bzw.  $\epsilon$  den Korrekturfaktor  $(1 - (r/R)^3/3)/(1 - (r/R)^2)^2$  und die schon auf wenige % genauen Werte der 3. Spalte. Es ist nicht verwunderlich, dass die gröbere Näherung umso besser ist, je weiter die Planeten entfernt sind.

Zum Schluss berechnen wir die Verschiebung, die von der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART, s. Abschn. 13.10) vorhergesagt wird. Der relativistische Einfluss wird näherungsweise durch das effektive Potential bzw. die Kraft

$$U_{\text{ART}} = -\frac{\alpha}{r^3}\frac{L^2}{m^2c^2} \quad \text{und} \quad \vec{F}_{\text{ART}} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{3L^2}{m^2c^2r^2}\vec{e}_r$$

beschrieben. Auswertung nach Gl. (1.89) ergibt mit  $p = a(1 - \epsilon^2)$

$$\begin{aligned}\Phi_{100y}^{\text{ART}} &= \frac{6GM_\odot}{\epsilon c^2 a(1 - \epsilon^2)}\int_0^{2\pi}(1 + \epsilon\cos\varphi)^2\cos\varphi\,d\varphi \\ &= 2\pi\frac{3GM_\odot}{c^2 a(1 - \epsilon^2)}\end{aligned}$$

mit dem bekannten numerischen Ergebnis  $\Phi_{100y}^{\text{ART}} = 43''$ .

## 1.9 Reibung

Reibung verwandelt kinetische Energie, also geordnete Bewegung, in Wärme, also ungeordnete Bewegung der Teilchen. Sie durchbricht somit die Energieerhaltung nur scheinbar, nämlich was die mechanische Energie betrifft. Dem Impulssatz kann sie nichts anhaben.

### 1.9.1 Reibungsmechanismen

Bisher haben wir Bewegungen betrachtet, für die der rein mechanische Energiesatz gilt, bei denen also die Summe von kinetischer und potentieller Energie konstant ist und nur Umwandlungen zwischen diesen beiden Energieformen erfolgen. Jede reale Bewegung, zumindest auf der Erde, sei es auf einer festen Unterlage, sei es in einem Medium, wie Wasser oder Luft, ist aber mit einem Energieverlust verbunden, genauer mit der Umwandlung von kinetischer in Wärmeenergie. Für diesen Energieverlust sind **Reibungskräfte** verantwortlich. Wir greifen aus den zahlreichen Reibungsmechanismen die drei wichtigsten heraus.

a) Die **Coulomb-Reibung** oder **trockene Reibung** erfolgt, wenn sich ein Körper ohne Schmiermittel auf fester Unterlage bewegt.

Diese Reibungskraft ist annähernd unabhängig von der Geschwindigkeit. Sie ist allein bestimmt durch die **Normalkraft**  $F_N$  ( $m \cdot g$  bei ebener Unterlage), die den Körper auf die Unterlage drückt, und proportional zu dieser:

$$F_R = \mu F_N . \quad (1.91)$$

$\mu$  heißt **Reibungskoeffizient**. Er hängt von der Art und der Oberflächenbeschaffenheit der beiden Materialien ab. Wenn der Körper noch ruht, verhindert eine Kraft  $F_R'$ , dass er sich in Bewegung setzt, es sei denn, die Antriebskraft ist größer als  $F_R'$ . Diese **Haftreibung**  $F_R'$  ist immer größer als die **Gleitreibung**  $F_R$  und ebenfalls proportional zu  $F_N$ , mit einem anderen Reibungskoeffizienten  $\mu'$ , der offenbar größer ist als  $\mu$ . Wenn die Antriebskraft also einen Körper einmal in Bewegung gesetzt hat, bewegt sie ihn beschleunigend weiter.

### BEISPIEL

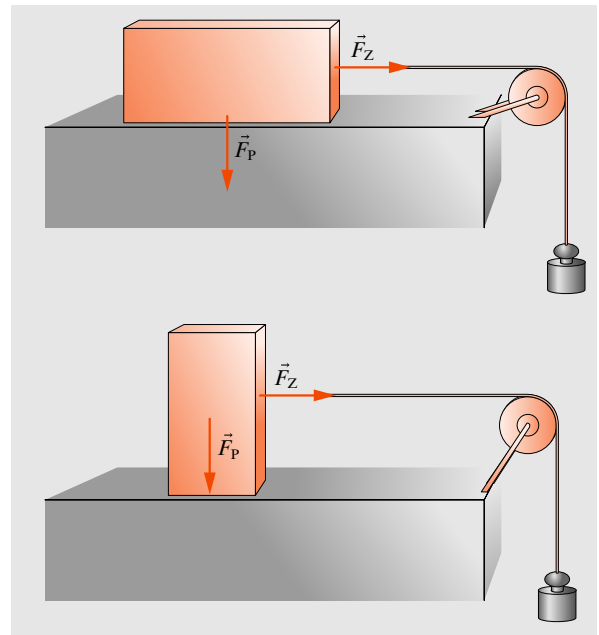
Für Stahl auf Stahl ist der Reibungskoeffizient aus der Ruhe 0,15, im Gleiten um 0,05. Welche Bremsstrecken und -zeiten treten bei der Eisenbahn auf?

Bremszeit  $v/(\mu_0 g)$  und Bremsweg  $v^2/(2\mu_0 g)$  sind etwa fünfmal länger als auf der Straße, aus 120 km/h etwa 400 m, 22 s. Bei zu starkem Bremsen verdreifachen sich diese Werte.

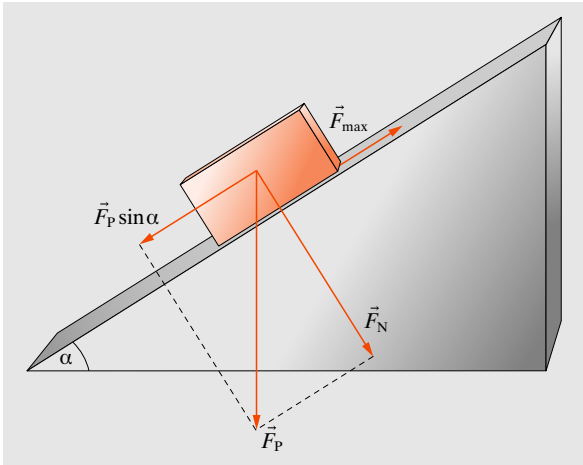
Am einfachsten bestimmt man einen Reibungskoeffizienten aus dem Winkel  $\alpha$  einer schiefen Ebene, bei dem ein Körper gerade zu rutschen anfängt (Haftreibung), oder bei dem er sich langsam gleichförmig weiterbewegt (Gleitreibung). Es gilt

$$\mu = \tan \alpha . \quad (1.92)$$

Das ergibt sich aus Abb. 1.63: Vom Gewicht  $mg$  wirkt nur die Komponente  $mg \cos \alpha$  als Normalkraft. Die Reibung ist also  $\mu mg \cos \alpha$ . Wenn sie größer ist als der Hangab-



■ **Abbildung 1.63** Der Klotz erfährt hochkant die gleiche Reibung wie breitseits, zu deren Überwindung die gleiche Zugkraft  $F_Z$  nötig ist, denn es kommt nur auf die Normalkraft an, und die ist beide Male gleich dem Gewicht  $F_P$



■ **Abbildung 1.64** Der Klotz beginnt zu rutschen, wenn  $\tan \alpha$  gleich dem Reibungskoeffizienten  $\mu$  wird

trieb  $mg \sin \alpha$ , d.h. wenn  $\tan \alpha < \mu$ , rutscht der Körper nicht.

Warum ist die Coulomb-Reibung geschwindigkeitsunabhängig? Bei einer Verschiebung des Körpers um  $dx$  muss eine Anzahl mikroskopischer Vorsprünge überwunden oder abgeschliffen werden. Diese Anzahl ist proportional zu  $dx$ , die zur Verschiebung erforderliche Energie  $dW$  daher ebenfalls. Der Proportionalitätsfaktor zwischen  $dW$  und  $dx$  ist die Reibungskraft, die also nicht von der Verschiebung oder ihrer Geschwindigkeit abhängt. Die Haftreibung ist größer als die gleitende, weil ein ruhender Körper tiefer in die Vertiefungen der Unterlage einrasten kann als ein bewegter. Daraus sieht man, dass die Unabhängigkeit von  $v$  nicht exakt sein kann: Bei sehr kleinem  $v$  muss sich der Körper erst in die Gleitstellung heben, also nimmt  $\mu$  erst allmählich auf seinen Gleitwert ab.

b) **Stokes-Reibung** oder **viskose Reibung**: Nicht zu große Körper, die sich nicht zu schnell durch ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) bewegen, erfahren eine Bremskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist.

Wie in Abschn. 3.5.2c gezeigt wird, ist diese Kraft für eine Kugel vom Radius  $r$

$$F_R = 6\pi\eta r v, \quad (1.93)$$

wo  $\eta$  eine Eigenschaft des Fluids, seine **Viskosität** ausdrückt.

c) **Newton-Reibung**: Der schnellen Bewegung größerer Körper durch ein Fluid wirkt eine Kraft entgegen, die proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist:

$$F_R = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2. \quad (1.94)$$

$A$  ist der Querschnitt des Körpers, in Bewegungsrichtung gesehen,  $\rho$  die Dichte des Fluids,  $c_w$  ein Widerstandskoeffizient, der von der Form des Körpers bestimmt wird. Bei Stromlinienform oder Zuspitzung ist  $c_w < 1$ , bei hydrodynamisch ungünstiger Form  $c_w > 1$ . Wir leiten die Newton-Reibung nach dem Gedankengang von Abschn. 1.5.8a her. Will ein Körper mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein Fluid der Dichte  $\rho$  dringen, muss er es zur Seite drängen und es dabei auf eine Geschwindigkeit  $v_f$  beschleunigen, die etwa gleich seiner eigenen  $v$  ist (günstige Formgebung verringert allerdings das Verhältnis  $v_f/v$  erheblich). In der Zeit  $dt$  muss dies geschehen für eine Säule von der Länge  $v dt$  und vom Querschnitt  $A$ . Sie hat das Volumen  $Av dt$  und die Masse  $m_f = \rho Av dt$ . Um diese Masse auf die Geschwindigkeit  $v$  zu bringen, muss man ihr die Energie  $\frac{1}{2} m_f v^2 = \frac{1}{2} \rho A v^3 dt$  zuführen, natürlich auf Kosten des bewegten Körpers.  $\frac{1}{2} \rho A v^3$  ist die zuzuführende Leistung. Da Leistung = Kraft · Geschwindigkeit, vgl. (1.54), ergibt sich für die Reibungskraft (1.94).

Ob eine Bewegung durch ein Fluid durch Stokes- oder Newton-Reibung beherrscht wird, entscheidet man mit der **Reynolds-Zahl** (Abschn. 3.5.2). Es gibt noch viele andere Reibungsmechanismen mit anderen  $F_R(v)$ -Gesetzen. Die Reibung zwischen geölten und geschmierten Flächen folgt z. B. einem  $v^{1/2}$ -Gesetz (Material auf dem Extra-Server 3.9e.1). Bei sehr hohen Geschwindigkeiten gilt in einem Fluid ein höherer  $v$ -Exponent als 2, besonders bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit.

■ **Tabelle 1.4**  $c_w$ -Werte

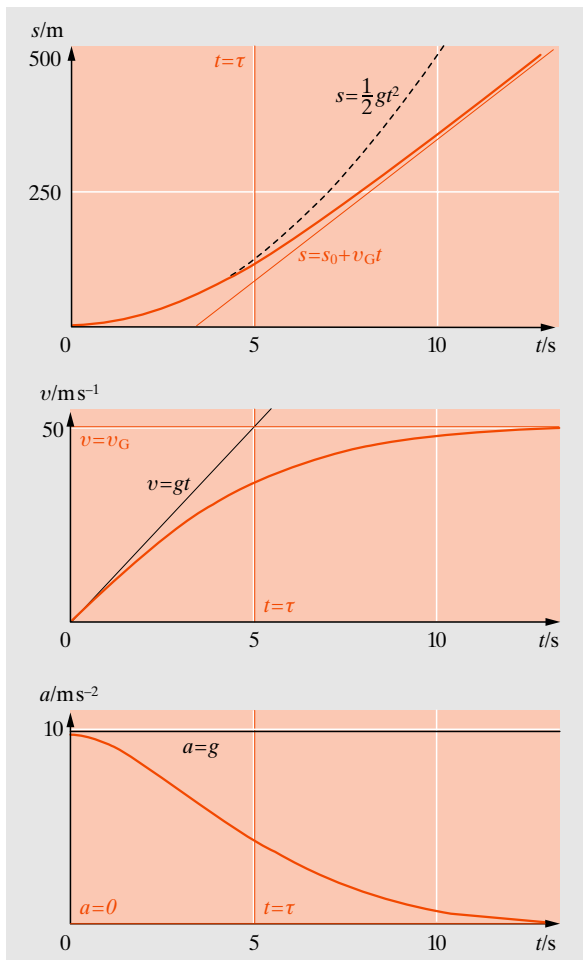
Scheibe	1,1
Kugel	0,45
typ. PKW	0,3
Tropfenform	0,05

### 1.9.2 Bewegung unter Reibungseinfluss

Wie sieht nun die durch solche Kräfte beeinflusste Bewegung aus? Wir betrachten das Beispiel einer konstanten Kraft, modifiziert durch eine Reibung  $\sim v^2$ , z. B. den Fall eines Körpers im Erdschwerefeld mit Luftwiderstand. Die Bewegungsgleichung ergibt sich durch Zusammenfassung der wirkenden Kräfte:

$$ma = -mg + kv^2 \quad (k = \frac{1}{2}c_W \varrho A) . \quad (1.95)$$

Auch ohne exakte Behandlung der Gleichung (1.95) (die etwas umständlich ist) lässt sich das Wesen der Lösung



■ **Abbildung 1.65** Bewegung in einem Medium mit einer Reibungskraft  $F \sim v^2$ . Zahlenwerte entsprechen dem Fall eines menschlichen Körpers durch die Luft in Bodennähe

leicht erkennen: Der Körper sei zunächst in Ruhe und werde unter dem Einfluss von  $mg$  allmählich beschleunigt. Ganz zuerst spielt dann die Reibung noch keine Rolle, da  $v$  und erst recht  $v^2$  noch klein sind: Die Bewegung verläuft fast wie beim freien Fall, speziell nimmt  $v$  zu wie  $gt$ . Unbeschränkt lange kann  $v$  aber nicht so anwachsen: Spätestens dann, wenn  $kv^2$  auf diese Weise die Konstante  $mg$  eingeholt hat, muss die Beschleunigung wesentlich abgenommen haben, bei der Grenzggeschwindigkeit

$$v_Q = \sqrt{mg/k} \quad (1.96)$$

verschwindet sie ganz,  $ma = 0$ . Die typische Zeit  $\tau$ , in der die Grenzggeschwindigkeit (nahezu) erreicht wird, kann man aus der Anfangsbeschleunigung  $a = g$  abschätzen, also  $-g\tau = v_G$  oder

$$\tau = v_Q = \sqrt{m/kg} . \quad (1.97)$$

Diese Beziehungen bleiben sogar richtig, wenn sich die Konstante  $k$  langsam ändert. Da  $k$  nach (1.95) die Dichte des Mediums enthält, entspricht dies z. B. dem Fall aus großer Höhe. Bedingung für die Anwendbarkeit von (1.96) ist nur, dass sich während der Einstellzeit  $\tau$  die Dichte, d. h.  $k$  nur wenig ändert.

Diese quasistationäre Betrachtungsweise ist immer dann sehr nützlich, wenn in einem aus mehreren Summanden bestehenden Ausdruck zuerst der eine, dann ein anderer dominiert. Dies trifft für viele Formen von Reibung, Dämpfungs- und Relaxationsmechanismen zu.

Die Bewegung unter konstanter Antriebskraft  $F$ , aber mit einer Reibung  $F_R \sim v$  lässt sich analog behandeln:

$$ma = F - cv . \quad (1.98)$$

Die Bewegung wird quasistationär für Zeiten wesentlich größer als  $\tau = m/c$  und hat dann die Geschwindigkeit  $v_G = F/c$ .

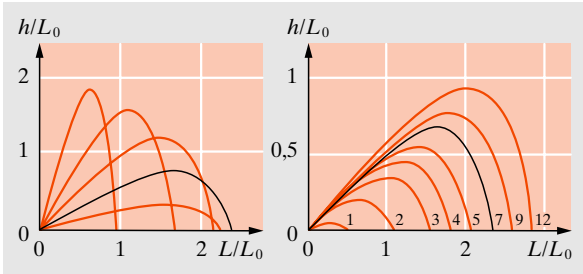
Die exakte Lösung für  $v(t=0) = v_0$  ist wegen der Linearität von (1.98) auch leicht zu finden:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} + v_G (1 - e^{-t/\tau}) .$$

Sie zeigt genau das mittels der Quasistationaritätsbetrachtung gefolgerte Verhalten.

### 1.9.3 Flug von Geschossen

Nur für sehr kleine Anfangsgeschwindigkeiten  $v_0 \ll v_G$  ist die Wurfparabel in Luft (Dichte  $\rho_L$ ) eine ausreichende



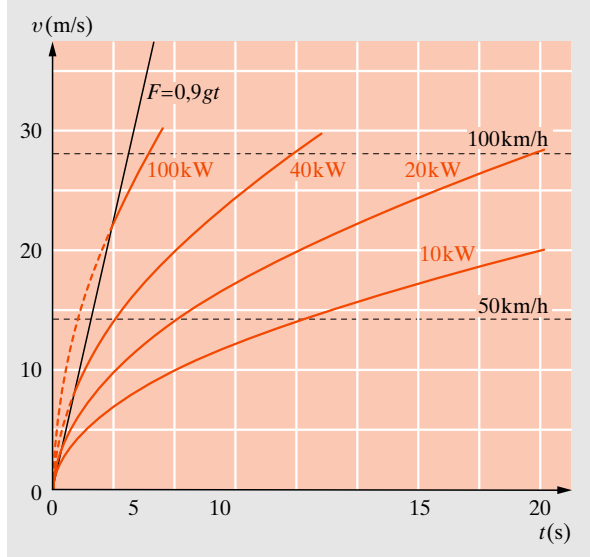
■ **Abbildung 1.66** Ballistische Kurven: Numerische Lösungen für den Wurf in Luft, Widerstand  $\sim v^2$ . Links:  $v_0/v_G = 7$ , Abschußwinkel in Schritten von  $15^\circ$ . Rechts: Abschußwinkel  $30^\circ$ , Parameter  $v_0/v_G$

Näherung. Auch hier zeigt die Abschätzung von Newton (Abschn. 1.5.8d), wie weit das Geschoss (Länge  $\ell$ , Querschnitt  $A$ , Dichte  $\rho_G$ , Masse  $m \simeq \ell A \rho$ ) „eindringt“:  $L_0 = \ell \rho_G / \rho_L \simeq 2m / A \rho_L = m/k$ . Bleikugeln fliegen also ca. das  $\rho_{Pb} / \rho_L \approx 10\,000$ -fache ihres Durchmessers, Fußbälle wegen  $\rho_{eff} / \rho_L \approx 10^2$  viel kürzer. Damit diese Weiten überhaupt erreicht werden, muss schon die reibungsfreie Wurfweite genügend groß sein, d. h. bei  $45^\circ$  Abschußwinkel  $v_0^2/g = L_0 > m/k$ : Es muss also  $v_0 > v_G = \sqrt{mg/k}$  (1.96) gelten.

Numerische Auswertungen der Bewegungsgleichung (1.94) für den Wurf sind in Abb. 1.66 gezeigt. Im Gegensatz zum reibungsfreien Fall treten maximale Weiten bei ca.  $30^\circ$  auf. Ferner sieht man, dass die Reichweite durch Erhöhung der Anfangsgeschwindigkeit kaum gesteigert werden kann. Das lässt sich auch mit folgender Überlegung einsehen: Bei Vernachlässigung der Beschleunigung gilt nach (1.94)  $\dot{v} = -(k/m)v^2$  bzw.  $v = -L_0 \dot{v}/v$ . Dann kann man die zurückgelegte Strecke nach  $s(t) = \int_0^t v \, dt = -L_0 \int_0^t \dot{v} \, dt/v = -L_0 \int_{v(t=0)}^{v(t)} dv/v$  berechnen. Wir kennen  $v(t)$  nicht, wissen aber, dass sie klein ist gegen  $v_G$ , z. B.  $0,1 \cdot v_G$ . Das Ergebnis  $s = L_0 (\ln(v_0/v_G) + \ln 10)$  bestätigt, dass die Wurfweite nur sehr langsam, logarithmisch, mit  $v_0$  wächst.

### 1.9.4 Die technische Bedeutung der Reibung

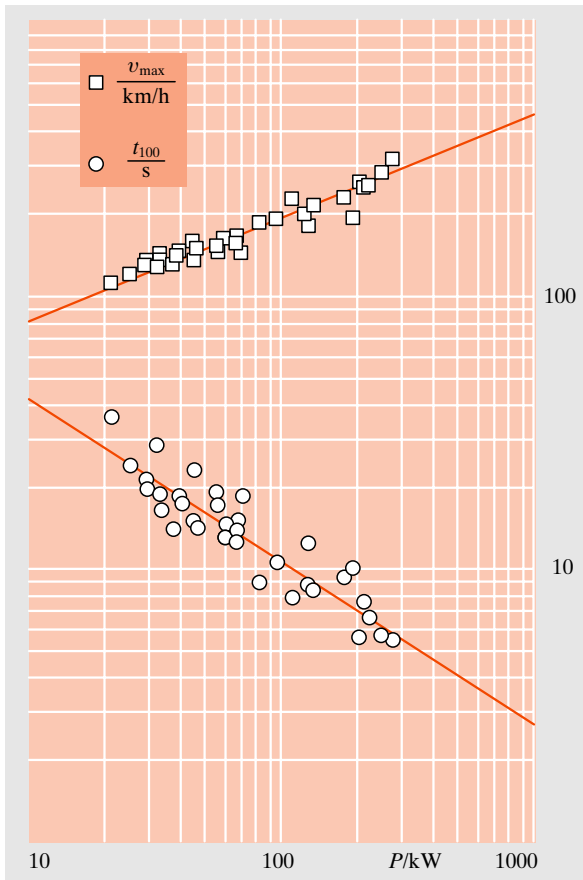
Jedes Glatteis zeigt die positive Rolle der Reibung für die Fortbewegung von Mensch, Tier und Fahrzeug. Auf einer mit Spiritus polierten, mit Nähmaschinenöl dünn eingeriebenen Spiegelglasplatte sind fast alle Tiere völlig hilflos, die meisten fallen sogar um; nur Laubfröschen und Stubenfliegen mit ihren Saugnapf-Füßen macht das nichts aus,



■ **Abbildung 1.67** Idealisierte Anfahrkurven für ein Auto mit  $m = 10^3$  kg für verschiedene Motorleistungen

ebenso wenig den Schnecken. Abgesehen davon könnte man sich bei Wegfall der Reibung nur auf den Raketenantrieb verlassen. Andererseits schätzt man, dass alle Eisenbahnen jährlich etwa 1 Mill. Tonnen Stahl zu feinem Pulver zermahlen, besonders beim Bremsen (vor Bahnhöfen und auf Gefällstrecken sind Schotter und Schwellen rot vom Abrieb). Mindestens ebenso viel Gummistaub verteilen die Autos in der Landschaft, und Fußgänger sind in dieser Hinsicht nicht viel besser. Bei Landfahrzeugen beherrscht die Reibung, abgesehen von Bremsen, Kupplung und vom Kurvenfahren, den **Anfahrvorgang**, aber auch die Höchstgeschwindigkeit.

Wir untersuchen das Anfahren. Könnte das Fahrzeug seine volle Antriebsleistung  $P$  ausnutzen, ergäbe sich aus  $E = Pt = \frac{1}{2}mv^2$  sofort  $v = \sqrt{2Pt/m}$ , ein Anstieg in Form einer liegenden Parabel. In Wirklichkeit liegt der Anfangsteil von  $v(t)$  tiefer, denn die beschleunigende Kraft kann höchstens gleich der Reibung sein, die Straße oder Schiene aufnehmen:  $F = m\dot{v} \leq F_r = \mu F_n = \mu mg$ , also bestenfalls  $\dot{v} = \mu g$  und  $v = \mu gt$ . Wegen  $P = Fv$  kann man erst bei der **Reibungsgeschwindigkeit**  $v_r = P/F_r = P/(\mu mg)$  die volle Motorleistung auf die Straße bringen ( $\mu \approx 0,9$  auf trockenem Asphalt). Bei  $v < v_r$  quietscht es, wenn man es doch versucht. Bei der Eisenbahn ist  $\mu$  viel kleiner, also  $v_r$  größer.

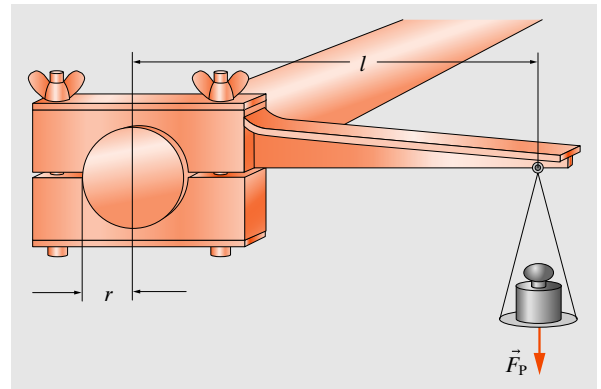


■ **Abbildung 1.68** Leistungen  $P$ , Höchstgeschwindigkeiten  $v_{\max}$  und Beschleunigungszeiten  $t_{100}$  von 0 auf 100 km/h für einige Autotypen (einschließlich eines chinesischen „Volkswagens“ mit 10 kW). Die doppellogarithmische Auftragung zeigt durch ihre Steigung die Abhängigkeiten  $v_{\max} \sim P^{1/3}$  und  $t_{100} \sim P^{-1}$

Die Höchstgeschwindigkeit  $v_m$  wird überwiegend durch den Luftwiderstand bestimmt, weil seine Leistung mit  $v^3$  steigt, die der trockenen Reibung nur mit  $v$ , die der **Schmiermittelreibung** mit  $v^{3/2}$ . Aus  $P = \frac{1}{2} c_w \rho A v_m^3$  ergibt sich, dass  $v_m$  mit  $P$  nur wie  $P^{1/3}$  steigt (Abb. 1.68), abgesehen von Maßnahmen zur Verringerung von  $A$  und  $c_w$ . In diesem Bereich spart man pro Zeiteinheit den halben Treibstoff, wenn man auf nur 21% der Geschwindigkeit verzichtet. Viel stärker wirken sich Leistung (und Preis) des Autos auf die Beschleunigungszeit aus. Wenn man den

Luftwiderstand unterhalb 100 km/h vernachlässigt, ebenso die Einbuße im reibungsbeherrschten Bereich  $v < v_r$ , erreicht man  $v_1 = 100$  km/h in  $t_{100} = mv_1^2 / (2P)$ .

**Leistungsmessung an einem Motor.** Motorleistung ist Kreisfrequenz  $\omega$  mal Drehmoment  $T$ . Die Kreisfrequenz wird mit der Drehzahl-Messuhr bestimmt, deren Achse wieder durch Reibung mitgenommen wird; heutzutage misst man meist stroboskopisch oder elektronisch. Das Drehmoment bestimmt man oft mit dem **Prony-Zaum**. Ein Riemen oder zwei Schraubbacken (Abb. 1.69) werden an die rotierende Motorwelle gepresst, bis Gleichgewicht besteht, d.h. der durch  $F_P$  belastete Arm sich weder hebt noch senkt. Dann ist das Drehmoment  $T = F_P l$  betragsgleich dem Moment, das der Motor gegen die Reibung an den Backen ausübt, und die Leistung ergibt sich aus  $P = T\omega$ .



■ **Abbildung 1.69** Prony-Zaum zur Leistungsmessung an einer Motorwelle

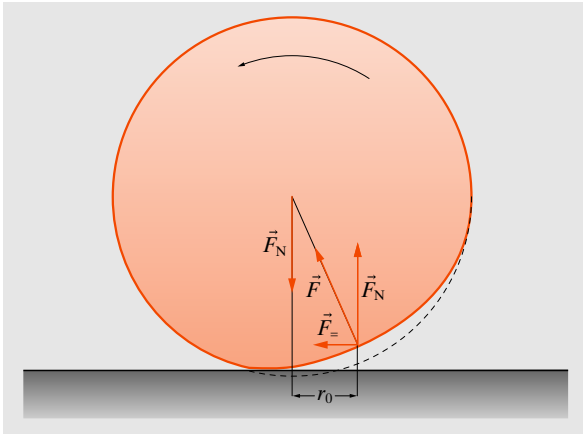
#### BEISPIEL

Wie viel Treibstoff spart man pro *Wegeinheit*, wenn man 120 km/h statt 160 km/h fährt?

44%, wenn es nur um den Luftwiderstand geht.

**Rollreibung.** Räder vermindern die Reibung verglichen mit dem Schleifen; die verbleibende Gleitreibung in den Achslagern wird durch Wälzlager (Kugel- oder Zylinderlager) noch erheblich reduziert. Ideal harte Rollen auf ideal





■ **Abbildung 1.70** Die Rollreibung beruht auf der anelastischen Deformation von Rollkörper und Unterlage. Was ist gegen diese Erklärung der Rollreibung einzuwenden, besonders was die Geschwindigkeitsabhängigkeit betrifft? Wenn die Rollreibung allein eine Folge der elastischen Relaxation wäre, nämlich der Tatsache, dass die Deformation hinter der Belastung nachhinkt, müsste sie von der Geschwindigkeit abhängen, denn der Winkel zwischen  $\vec{F}_N$  und  $\vec{F}$  in Abb. 1.47 ist umso größer, je schneller das Rad rollt. Tatsächlich ist die Rollreibung geschwindigkeitsabhängig, aber schwächer als proportional. Der Effekt ist also komplizierter als dargestellt

harter, ebener Unterlage erführen überhaupt keinen Widerstand. Ebenso wäre es bei ideal elastischer Deformation, denn sie läge immer symmetrisch zum Auflagepunkt, und die Reaktionskraft der Unterlage wäre in jedem Augenblick entgegengesetzt zur Normalkraft  $F_N$ , es bliebe keine Komponente in Bewegungsrichtung. In Wirklichkeit hat die Deformation immer einen anelastischen Anteil (Abschn. 4.1.4), d. h. sie hinkt etwas nach, wie in Abb. 1.70 für eine völlig harte Unterlage angedeutet ist. Die Reaktionskraft  $\vec{F}$ , die der Hauptteil des Rollkörpers erfährt, wird ihm durch seine deformierten Teile vermittelt. Ihr Angriffspunkt ist gegen den Punkt, auf den  $\vec{F}_N$  zielt, etwas nach hinten verschoben (um die Strecke  $r_0$ ). Die Normal-komponente der Reaktionskraft kompensiert genau  $\vec{F}_N$ ; es bleibt aber eine Tangentialkomponente  $F_{\perp} = r_0 F_N / r$  entgegen der Rollrichtung, die durch eine Zugkraft von gleichem Betrage kompensiert werden muss, wenn der Körper mit konstanter Geschwindigkeit rollen soll. Bei technischen Rollkörpern (Rädern, Kugellagern) liegt  $r_0$  im Bereich  $10^{-2}$  mm bis 1 mm.

## 1.10 Offene Fragen und Grenzen

Seit mehr als 400 Jahren erforschen und nutzen wir die Mechanik nach den Gesetzen, die G. Galilei und I. Newton aufgestellt haben. Im Alltag sind die Vorhersagen der zugrunde gelegten Theorie so zuverlässig, dass große Teile unserer industrialisierten Umwelt und insbesondere unserer Transportmittel ohne sie gar nicht auskommen. Das berühmte Beispiel, nach dem der Apfel, der vom Baum fällt, denselben Gesetzen gehorcht wie die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, veranlasst uns darüberhinaus, noch weitergehende, globale, universelle Gültigkeit dieser Gesetze zu erwarten, auch außerhalb unseres direkten Erfahrungs- und Beobachtungshorizonts.

Physiker müssen diesen Erwartungen – Extrapolationen – immer mit der Skepsis des Naturwissenschaftlers entgegen treten. Wir können die Gesetze Newtons nur unter den Bedingungen testen, die unserer Beobachtung zugänglich sind. Verlassen wir diesen Bereich, z. B. zu mikroskopischen oder makroskopischen Längenskalen hin, bilden auch Newtons Gesetze zunächst nicht mehr als eine Hypothese. Genauso wichtig ist die Forderung, dass unsere physikalischen Theorien, etwa Newtonsche Mechanik und Maxwellsche Elektrodynamik (Kap. 8) miteinander vereinbar sein sollen. In der Vergangenheit haben derartige Widersprüche Anlass gegeben, ganz neue Felder der Physik zu eröffnen:

- Schon mit drei Körpern, die aufeinander Kräfte z. B. nach dem  $r^{-2}$ -Gesetz ausüben, wird die Mechanik nur in Spezialfällen fertig. Newton meinte, vielleicht müsse der Schöpfer von Zeit zu Zeit eingreifen, um das Sonnensystem in Ordnung zu halten, Laplace glaubte, ohne diese Hypothese die Stabilität dieses Systems nachweisen zu können, aber seit Poincaré ist man nicht mehr so sicher. Die nichtlineare Dynamik (Kap. 5) hat hier einiges geklärt, aber gleichzeitig die Hoffnung auf eine durchgehende Beschreibung des ganzen Weltlaufs zunichte gemacht.
- Mit sehr vielen Teilchen kann die Mechanik höchstens umgehen, wenn zwischen ihnen feste Lagebeziehungen bestehen wie im starren Körper (Kap. 2) oder wenigstens annähernd feste (Kap. 3, 4). Wenn diese Teilchen aber alle wild durcheinander schwirren wie im Gas oder vielfach in strömenden Flüssigkeiten, kann und will kein Mensch jedes einzelne verfolgen, nicht nur, weil die Quantenmechanik (Kap. 14) das auch prinzipiell gar nicht zuließe. Für die wenigen handhabbaren Größen haben Boltzmann, Maxwell und andere statis-

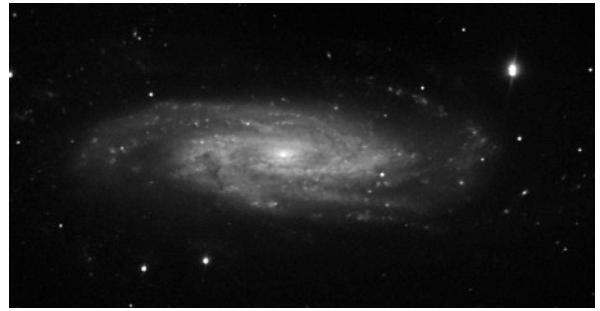


tische Gesetze formuliert, die Aussagen über relevante Mittelwerte und mittlere Abweichungen davon ermöglichen (Kap. 6, 20).

- Einstein bemerkte, dass die klassische Elektrodynamik eine Modifikation der Newtonschen Mechanik notwendig machte – bei hohen Geschwindigkeiten konnte die Zeit nicht mehr als eine absolute, von den Raumkoordinaten unabhängige Größe begriffen werden. Die **spezielle Relativitätstheorie** (Kap. 13) wurde ersonnen, um dieses Problem zu überwinden.
- Das an die makroskopische Planetenbewegung angelehnte Rutherfordsche Atommodell aus geladenen schweren Kernen und leichten Elektronen sagt nach der klassischen Physik den Kollaps der Materie voraus. Die **Quantenmechanik** (Kap. 14) löste dieses Problem.

Die beobachtende Astronomie konfrontiert uns seit einigen Jahrzehnten mit dem ungelösten Problem der Sternbewegung in Galaxien: **Rotationskurven** geben die Rotationsgeschwindigkeit der Sterne und des Gases in Galaxien als Funktion des Abstands vom Zentrum der Galaxie an. Die Rotationsgeschwindigkeit, die aus der Dopplerverschiebung (s. Abschn. 13.5) charakteristischer Linien im Spektrum der beobachteten Sterne und Gase bestimmt werden kann, fällt mit dem Abstand vom galaktischen Zentrum nicht wie nach der Newtonschen Mechanik erwartet mit  $r^{-1/2}$  ab, sondern bleibt bei den meisten Galaxien konstant, steigt manchmal sogar noch einmal an. In Abb. 1.72 sind als Beispiel die Beobachtungen an der Spiral-Galaxie NGC 3198 (NGC: *New General Catalogue of Galaxies*) vorgestellt.

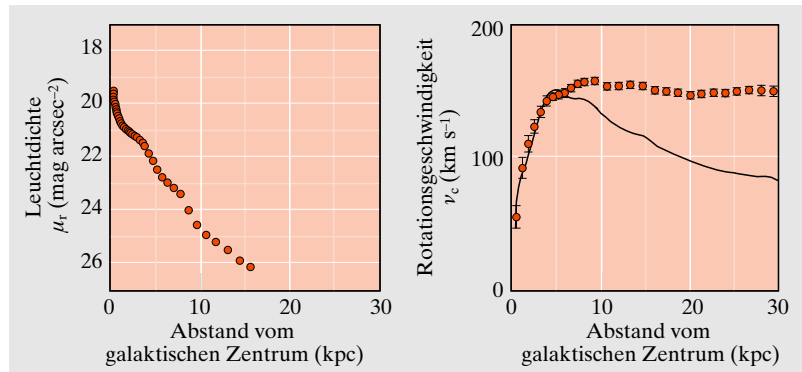
Höhere Rotationsgeschwindigkeiten können nur dann auftreten, wenn deren Fliehkräfte durch entsprechend höhere Gravitationskräfte ausgeglichen werden. Eine mögli-



■ **Abbildung 1.71** Spiralgalaxie NGC 3198 im Sternbild des Großen Bären. Die Newtonsche Mechanik kann die Sternbewegung in den Galaxienarmen bisher nicht erklären (Abb. 1.72). Aufnahme des Kitt Peak Teleskops. Mit freundlicher Erlaubnis von John Vickery und Jim Matthes / Adam Block, NOAO/AURA/NSF

che Erklärung für die beobachtete Abflachung der Rotationskurven für große Abstände ist die sogenannte **dunkle Materie**: Führt man den Verlauf der Rotationskurve allein auf die Massenverteilung zurück, dann muss es bei großen Radien bis zu zehnmal mehr Masse geben als in Form von Sternen und Gas direkt sichtbar ist. Schon der Name „dunkle Materie“ drückt aus, dass wir bisher nicht wissen, welche Materieform hinter diesen Beobachtungen steckt. Nicht einmal ihre Existenz ist bisher bewiesen, deshalb wird an großen Teilchenbeschleunigern wie dem LHC (*Large Hadron Collider*) in Genf intensiv nach weiteren Indizien für die Eigenschaften dunkler Materie gesucht. Alternativ lassen sich z. B. Modifikationen der Newtonschen Theorie erwägen, die für das Weltbild der Physik aber nicht einfacher zu verarbeiten wären.

■ **Abbildung 1.72** Rotationskurve der Spiralgalaxie NGC 3198. *Links*: Logarithmische Auftragung der Leuchtdichte als Funktion des Abstands vom galaktischen Zentrum. *Rechts*: Beobachtete Rotationsgeschwindigkeit; die *durchgezogene Linie* kennzeichnet die Rotationskurve, die aus der beobachteten, d. h. leuchtenden Massenverteilung (Sterne und Gas) berechnet wurde. Nach K. Begeman: „H I rotation curves of spiral galaxies. I – NGC 3198“, *Astronomy & Astrophysics*, **223**, 47 (1989)





## Aufgaben ...

### 1.1 Kinematik

#### 1.1.1 Wie schnell ist der Mensch? +

Berechnen Sie aus den Weltrekordzeiten für einige Laufstrecken (Leichtathletik, Eisschnellauf usw.) die mittleren Geschwindigkeiten. Treten während des Laufs irgendwann höhere Geschwindigkeiten auf?



■ **Abbildung 1.73** Olympische Spiele 1936 in Berlin. Jesse Owens (1913–1980) beim Start zu seinem Rekordlauf über 200 m

#### 1.1.2 Michelson im Fluss ++

Ein Fluss hat überall die Strömungsgeschwindigkeit  $w$ . Ein Schwimmer überquert den Fluss zum genau gegenüberliegenden Punkt und kehrt zum Ausgangspunkt zurück. Ein anderer schwimmt genau die Flussbreite stromab und wieder zurück. Welcher der beiden gleich guten Schwimmer gewinnt?

### 1.2 Dynamik

#### 1.2.1 Hier irrte Aristoteles +

*Aristoteles* behauptete, ein schwerer Körper falle schneller als ein leichter (auch abgesehen vom Luftwiderstand). *Galilei* schlug vor, man solle sich einen schweren und einen leichten Körper durch einen Faden verbunden denken und diesen immer dünner bzw. dicker machen. Was beweist das?

#### 1.2.2 Da kann man sich sehr täuschen +++

Ein Stein wird genau senkrecht hochgeworfen. Trifft er genau an der gleichen Stelle wieder auf? Man lässt einen Stein von einem Turm fallen. Kommt er genau senkrecht unter der Abwurfstelle an? (Beide Male Windstille.)

### 1.3 Einfache Bewegungen

#### 1.3.1 Tachoregel +

Was halten Sie von der Kraftfahrregel: Um den Bremsweg (in m) zu erhalten, teile man die Geschwindigkeit (in km/h) durch 10 und quadriere? Welcher Bremsverzögerung entspricht das (Vergleich mit der TÜV-Forderung von  $6 \text{ m/s}^2$ )? Welchen Winkel gegen die Vertikale muss ein stehender Fahrgast in einem gebremsten Fahrzeug einnehmen, wenn er ohne Halt nicht umfallen will? Wie lauten die Werte von Beschleunigung und Einstellwinkel für einen PKW, der in 12 s auf 100 km/h beschleunigt?

#### 1.3.2 Wurfweite +

Wie groß sind die fehlenden Werte (Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , Wurfweite  $w$ , Scheitelhöhe  $h$ ) bei folgenden Problemen (Voraussetzung: kein Luftwiderstand, Wurfwinkel so, dass  $w$  maximal): Weitsprung (Absprung als reine Umlenkung auffassen!); Speerwerfer wirft 90 m. Wie schnell bewegt er die Wurfhand relativ zum Körper? Ferngeschütz schießt 100 km weit (warum so großes Kaliber?); Rakete fliegt 280 km weit. Satelliten-Rakete (letzte Stufe):  $v_0 = 8 \text{ km/s}$ . Sind die Formeln des schiefen Wurfs in allen Fällen anwendbar?

### 1.5 Arbeit, Energie, Leistung

#### 1.5.1 Bogenschießen ++

Warum ist ein guter Bogen an den Enden dünner als in der Mitte, im Gegensatz zum „Flitzbogen“ aus einem Ast einheitlicher Dicke?

#### 1.5.2 Kann Messner mehr? ++

Messen Sie Ihre körperliche Dauerleistung, z. B. beim **Bergsteigen**. Das Blut enthält 15,5% **Hämoglobin**. Ein Hb-Molekül (rel. Molekülmasse 65 000) kann vier Moleküle  $\text{O}_2$  reversibel binden. Herzfrequenz bei Anstrengung bis  $150 \text{ min}^{-1}$ , Pumpvolumen  $1 \text{ cm}^3/\text{kg}$  Körpergewicht. Zucker, Grundeinheit  $\text{CH}_2\text{O}$ , wird zu  $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$  abgebaut; 1 g Zucker liefert 17 kJ. Wirkungsgrad der Muskeln ca. 25%. Wird Ihre Dauerleistung durch die Zirkulation begrenzt?

## 1.7 Bezugssysteme

### 1.7.1 Der brave Mann +

Ein Mann beobachtet von einer Brücke aus, wie einem stromauf fahrenden Paddler gerade unter der Brücke eine fast volle Kognakflasche ins Wasser fällt und abwärts treibt. Da der Paddler auf Rufen nicht reagiert, rennt der Mann ihm nach und erreicht ihn nach  $\frac{1}{2}$  h. Der Paddler kehrt auf die Nachricht sofort um und holt die Flasche. Der Paddler fährt 6.5 km/h relativ zum Wasser, das mit 3 km/h strömt. Wie lange war die Flasche im Wasser? Benutzen Sie das Bezugssystem des Ufers und das des Wassers. Was ist einfacher?

### 1.7.2 Foucault-Pendel ++

Eine sehr große Masse, aufgehängt an einem sehr langen Draht, die mehrere Tage fast ungedämpft schwingt, behält ihre Schwingungsebene nicht bei, sondern beschreibt eine Rosette (Abb. 1.62). Wie kommt das? Wie lange dauert ein vollständiger Umlauf um die Rosette? Wie hängt die Dauer von der geographischen Breite ab? Zur Behandlung benutzen Sie Abb. 1.63.

## 1.8 Gravitation und Himmelsmechanik

### 1.8.1 Geostationärer Satellit +

Der Syncom-Nachrichtensatellit soll antriebslos immer über demselben Punkt der Erdoberfläche stehen. Wie groß muss sein Abstand von der Erdoberfläche sein? Könnte er z. B. ständig über

München stehen? Wie viele solcher Satelliten braucht man, um jeden Punkt am Äquator zu erreichen? (Ultrakurzwellen breiten sich geradlinig aus.) Welches ist der nördlichste Punkt, der gerade noch erreicht wird?

### 1.8.2 Springflut ++

Wer erzeugt höhere Gezeiten: Sonne oder Mond? Erklären Sie Spring- und Nipptiden.

## 1.9 Reibung

### 1.9.1 Bremsweg +

Einige Reibungskoeffizienten gegen Autoreifen: Gute trockene Straße 0,8, feuchte Straße 0,3, Schnee um 0,1, Glatteis  $< 0,1$ . Abgenutzte Reifen haben kaum mehr als die Hälfte (alle Werte ohne Gewähr). Diskutieren Sie Bremswege, zulässige Geschwindigkeiten in Kurven usw.

### 1.9.2 Kartentrick ++

Auf einem Bierglas liegt eine Spielkarte, mitten darauf eine Münze. Wie schnell muss man die Karte wegziehen oder -schnipsen, damit die Münze ins Glas fällt? Geht es besser mit einem weiten oder einem engen Glas? Wie geht es mit einem weichen Radiergummi statt der Münze? – Wie schnell muss man die Tischdecke unter dem Geschirr wegreißen, ohne dass es Scherben gibt? Fällt ein hohes oder ein niedriges Glas dabei leichter um?

Gerthsen Physik

Meschede, D.

2015, XVI, 1052 S. 1330 Abb., 1000 Abb. in Farbe. Mit

Online-Extras., Hardcover

ISBN: 978-3-662-45976-8