2

Stochastische Folgen

Wir kommen nun zum eigentlichen Gegenstand dieses Buches und definieren stochastische Folgen als Folgen, deren Glieder positiv sind und sich zu Eins summieren (Abschnitt 2.1). Jede Dirac–Folge ist eine stochastische Folge, und jede stochastische Folge ist eine positive summierbare Folge. In diesem Kapitel untersuchen wir die Eigenschaften der Menge aller stochastischen Folgen als Teilmenge des Banach–Raumes ℓ^1. Wir zeigen zunächst, dass diese Menge abgeschlossen und konvex ist (Abschnitt 2.2), und wir zeigen außerdem, dass ihre Extrempunkte gerade die Dirac–Folgen sind und dass die Menge aller stochastischen Folgen die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extrempunkte ist (Abschnitt 2.3).

Ergänzend klären wir die Bedeutung stochastischer Folgen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und geben eine Anwendung der Konvexität in der Versicherungsmathematik (Abschnitt 2.4).

2.1 Definition und Beispiele

Eine Folge $\mathbf{p} \in \ell^1$ heißt *stochastische Folge*, wenn $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ und $\|\mathbf{p}\|_1 = 1$ gilt; diese Bedingung ist offensichtlich genau dann erfüllt, wenn $p_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und außerdem $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge aller stochastischen Folgen mit

$$\mathcal{S}$$

Alle Aussagen über die Konvergenz einer Folge von stochastischen Folgen beziehen sich auf die Konvergenz bezüglich der Norm $\| \,.\, \|_1$ und damit auf die Konvergenz in ℓ^1.

Das folgende Lemma ist evident:

2.1.1 Lemma (Dirac–Folgen). *Es gilt $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$.*

K. D. Schmidt, *Stochastische Folgen,* DOI 10.1007/978-3-662-46176-1_2,
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Wir geben nun einige weitere Beispiele stochastischer Folgen:

2.1.2 Beispiele.

(1) **Binomialfolge:** Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in (0,1)$ ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := \binom{m}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{m-k}$$

(und damit $p_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}(m+1)$) eine stochastische Folge. Diese Folge wird mit

$$\mathbf{Bin}(m, \vartheta)$$

bezeichnet und heißt *Binomialfolge* mit den Parametern m und ϑ.

(2) **Poisson–Folge:** Für $\lambda \in (0, \infty)$ ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

eine stochastische Folge. Diese Folge wird mit

$$\mathbf{Poi}(\lambda)$$

bezeichnet und heißt *Poisson–Folge* mit dem Parameter λ.
In der Tat: Aus der Definition der Exponentialreihe ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$$

(3) **Negativbinomialfolge:** Für $\beta \in (0, \infty)$ und $\vartheta \in (0,1)$ ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := \binom{\beta + k - 1}{k} (1-\vartheta)^{\beta} \vartheta^k$$

eine stochastische Folge. Diese Folge wird mit

$$\mathbf{Neg}(\beta, \vartheta)$$

bezeichnet und heißt *Negativbinomialfolge* mit den Parametern β und ϑ.

(4) **Geometrische Folge:** Für $m \in \mathbb{N}$ und $\vartheta \in (0,1)$ ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := \binom{k-1}{m-1} (1-\vartheta)^{k-m} \vartheta^m$$

(und damit $p_k = 0$ für alle $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$) eine stochastische Folge. Diese Folge wird mit

$$\mathbf{Geo}(m, \vartheta)$$

bezeichnet und heißt *geometrische Folge* mit den Parametern m und ϑ.

(5) **Logarithmische Folge:** Für $\vartheta \in (0,1)$ ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ \dfrac{1}{|\log(1-\vartheta)|} \dfrac{\vartheta^k}{k} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stochastische Folge. Diese Folge wird mit

$$\mathbf{Log}(\vartheta)$$

bezeichnet und heißt *logarithmische Folge* mit dem Parameter ϑ.

Die fehlenden Beweise verlaufen wie im Fall der Poisson–Folge.

Aufgaben

2.1.A Sei $\mathbf{p} := \mathbf{Poi}(\lambda)$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \lambda$ sei $\mathbf{q}_m := \mathbf{Bin}(m, \lambda/m)$ und $\mathbf{r}_m := \mathbf{Neg}(m, \lambda/m)$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{m\to\infty} q_{m,k} = p_k = \lim_{m\to\infty} r_{m,k}$$

2.1.B Sei $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Dann ist die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := \int_0^\infty e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\,e^{-\alpha\lambda}\,\lambda^{\beta-1}\,d\lambda$$

eine stochastische Folge und es gilt $\mathbf{p} = \mathbf{Neg}(\beta, 1/(\alpha{+}1))$.

2.2 Konvexität und Abgeschlossenheit

Mit Hilfe der *Einheitssphäre*

$$S(\ell^1) := \Big\{\mathbf{x} \in \ell^1 \;\Big|\; \|\mathbf{x}\|_1 = 1\Big\}$$

des ℓ^1 lässt sich die Menge der stochastischen Folgen auch wie folgt darstellen:

2.2.1 Lemma. *Es gilt*

$$\mathcal{S} = \ell^1_+ \cap S(\ell^1)$$

Aus dem Lemma ergibt sich der folgende Satz:

2.2.2 Satz. *Die Menge $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen und konvex.*

Beweis. Nach Satz 1.3.4 ist die Menge ℓ^1_+ abgeschlossen und konvex.
Aus der Dreiecksungleichung $\big|\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1\big| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1$ folgt, dass auch die Menge $S(\ell^1)$ abgeschlossen ist, und wegen $\mathcal{S} = \ell^1_+ \cap S(\ell^1)$ ist dann auch $\mathcal{S}$ abgeschlossen.
Für $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ und $\eta \in (0,1)$ ergibt sich aus $\mathcal{S} \subseteq \ell^1_+$ und der Konvexität von ℓ^1_+ zunächst $\eta\,\mathbf{p} + (1{-}\eta)\,\mathbf{q} \in \ell^1_+$, und wegen Satz 1.3.4 gilt

$$\begin{aligned}\|\eta\,\mathbf{p} + (1{-}\eta)\,\mathbf{q}\|_1 &= \|\eta\,\mathbf{p}\|_1 + \|(1{-}\eta)\,\mathbf{q}\|_1 \\ &= \eta\,\|\mathbf{p}\|_1 + (1{-}\eta)\,\|\mathbf{q}\|_1 \\ &= \eta + (1{-}\eta) \\ &= 1\end{aligned}$$

und damit $\eta\,\mathbf{p} + (1{-}\eta)\,\mathbf{q} \in S(\ell^1)$; es gilt also $\eta\,\mathbf{p} + (1{-}\eta)\,\mathbf{q} \in \ell^1_+ \cap \mathcal{S}(\ell^1) = \mathcal{S}$.
Daher ist $\mathcal{S}$ konvex. □

Aus dem Satz folgt sofort, dass jede Konvexkombination von Dirac–Folgen eine stochastische Folge ist:

2.2.3 Folgerung. *Es gilt* $\mathrm{conv}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{S}$.

Beweis. Es gilt $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$. Da $\mathcal{S}$ konvex ist, folgt daraus $\mathrm{conv}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{S}$. □

Die Menge $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ besteht gerade aus den endlichen stochastischen Folgen. Wir können die letzte Folgerung verschärfen und erhalten ein Analogon zu Satz 1.3.6:

2.2.4 Satz. *Die Menge* $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ *ist dicht in* $\mathcal{S}$.

Beweis. Die Menge $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen und enthält die Menge $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$. Daher enthält sie auch den Abschluss von $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ in ℓ^1.
Sei nun $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $p_m > 0$ und damit $\sum_{i=0}^n p_i > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}(m)$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\mathbf{p}_n := \begin{cases} \boldsymbol{\delta}_0 & \text{falls } n \in \{0, \dots, m{-}1\} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{\sum_{i=0}^n p_i}\, \boldsymbol{\delta}_k & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\{\mathbf{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathrm{conv}(\mathcal{D})$, und für alle $n \in \mathbb{N}(m{+}1)$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\|_1 &= \sum_{k=0}^\infty [\mathbf{p}_n - \mathbf{p}]_k \\ &= \sum_{k=0}^\infty |p_{n,k} - p_k| \\ &= \sum_{k=0}^n \left| \frac{p_k}{\sum_{i=0}^n p_i} - p_k \right| + \sum_{k=n+1}^\infty p_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1 - \sum_{i=0}^n p_i}{\sum_{i=0}^n p_i}\, p_k + \sum_{k=n+1}^\infty p_k \\ &= 1 - \sum_{i=0}^n p_i + \sum_{k=n+1}^\infty p_k \\ &= 2 \sum_{k=n+1}^\infty p_k \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\|_1 = 0$$

und dies bedeutet, dass $\mathbf{p}$ im Abschluss von $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ liegt. Da $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ beliebig war, folgt daraus, dass $\mathcal{S}$ im Abschluss von $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ enthalten ist.
Daher stimmt $\mathcal{S}$ mit dem Abschluss von $\mathrm{conv}(\mathcal{D})$ überein. □

Aufgrund des Satzes kann jede stochastische Folge beliebig gut durch eine Konvexkombination von Dirac–Folgen approximiert werden.

2.3 Extrempunkte

Wir untersuchen nun die Extrempunkte der konvexen Menge $\mathcal{S}$.

2.3.1 Lemma. *Die Menge $\mathcal{D}$ ist die Menge aller Extrempunkte von $\mathcal{S}$.*

Beweis. Sei zunächst $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathbf{p} = \boldsymbol{\delta}_m$ und für alle $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{S}$ und $\eta \in (0,1)$ mit $\boldsymbol{\delta}_m = \eta\,\mathbf{q} + (1-\eta)\,\mathbf{r}$ gilt dann $\mathbf{q} = \boldsymbol{\delta}_m = \mathbf{r}$. Daher ist $\mathbf{p}$ ein Extrempunkt von $\mathcal{S}$.
Sei nun $\mathbf{p} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$. Dann gibt es $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i \neq j$ und $p_i \neq 0 \neq p_j$. Für

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &:= (p_i + p_j)\,\boldsymbol{\delta}_i + \sum_{i,j \neq k=0}^{\infty} p_k\,\boldsymbol{\delta}_k \\
\mathbf{r} &:= (p_i + p_j)\,\boldsymbol{\delta}_j + \sum_{i,j \neq k=0}^{\infty} p_k\,\boldsymbol{\delta}_k
\end{aligned}$$

gilt dann $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{S}$ und $\mathbf{q} \neq \mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, und mit $\eta := p_i/(p_i + p_j)$ erhält man

$$\mathbf{p} = \eta\,\mathbf{q} + (1-\eta)\,\mathbf{r}$$

Daher ist $\mathbf{p}$ kein Extrempunkt von $\mathcal{S}$. □

Der folgende Satz charakterisiert die Menge der stochastischen Folgen mit Hilfe ihrer Extrempunkte:

2.3.2 Satz. *Die Menge $\mathcal{S}$ ist die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extrempunkte.*

Die Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus Lemma 2.3.1 und Satz 2.2.4.

2.4 Anwendung in der Versicherungsmathematik

Wir beschreiben nun die Bedeutung stochastischer Folgen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und geben dann eine erste Anwendung in der Versicherungsmathematik.

Für das Verständnis dieses ergänzenden Abschnitts sind Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Grundlage der Maß– und Integrationstheorie von Vorteil; vgl. Schmidt [2011]. Zumindest aber sollten Grundkenntnisse der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie vorliegen, vgl. Krengel [2002] oder auch Schmidt [2009].

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Eine $\mathcal{F}$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbare Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Zufallsvariable*. Im Fall $P[\{X \geq 0\}] = 1$ bezeichnet man X als *positive Zufallsvariable*, und im Fall $P[\{X \in \mathbb{N}_0\}] = 1$ bezeichnet man X als *Zufallsvariable mit Werten in* $\mathbb{N}_0$. Für jede Zufallsvariable X ist die Abbildung $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ mit

$$P_X[B] := P[\{X \in B\}]$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das als *Verteilung* von X bezeichnet wird.

Sei nun X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P_X[B] = P[\{X \in B\}] = P[\{X \in B \cap \mathbb{N}_0\}] = \sum_{k \in B \cap \mathbb{N}_0} P[\{X = k\}]$$

In diesem Fall ist also die Verteilung von X vollständig durch die Wahrscheinlichkeiten $P[\{X = k\}]$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ beschrieben. Die Folge $\mathbf{p}$ mit

$$p_k := P[\{X = k\}]$$

ist eine stochastische Folge und wir schreiben

$$X \sim \mathbf{p}$$

Da die stochastische Folge $\mathbf{p}$ die Verteilung der Zufallsvariablen X repräsentiert, bezeichnen wir im Folgenden nicht nur das Wahrscheinlichkeitsmaß P_X, sondern auch die stochastische Folge $\mathbf{p}$ als *Verteilung* von X.

In der Versicherungsmathematik werden Zufallsvariable unter anderem dazu verwendet, für einen Bestand von Risiken (oder Versicherungsverträgen)
- die zufällige Anzahl der Schäden (Schadenzahl) oder
- die zufälligen Höhen einzelner Schäden (Schadenhöhen) oder
- die zufällige Höhe des Gesamtschadens eines Bestandes

in einem Versicherungsjahr zu beschreiben.

Für eine Darstellung der Grundlagen der Versicherungsmathematik verweisen wir auf Schmidt [2009].

In allen Anwendungen stochastischer Folgen in der Versicherungsmathematik betrachten wir ausschließlich Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

Inhomogener Bestand

Als Beispiel für eine versicherungsmathematische Anwendung stochastischer Folgen betrachten wir einen inhomogenen Bestand, der zwei Arten von Risiken (gute und schlechte) enthält, ein zufällig ausgewähltes Risiko des Bestandes, und die zufällige Anzahl der Schäden, die dieses Risiko in einem zukünftigen Versicherungsjahr erzeugt. Wir beschreiben die Anzahl der Schäden durch eine Zufallsvariable N.

Wir nehmen an,
- dass für den Bestand die Anteile der guten bzw. schlechten Risiken bekannt sind,
- dass für die guten Risiken und für die schlechten Risiken die Verteilung der Anzahl der Schäden bekannt ist, und
- dass für ein zufällig ausgewähltes Risiko nicht bekannt ist, ob es sich um ein gutes oder ein schlechtes Risiko handelt.

Zu bestimmen ist die Verteilung von N und damit eine stochastische Folge $\mathbf{p}$ mit $N \sim \mathbf{p}$, also mit $p_k = P[\{N = k\}]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Die zufällige Auswahl eines Risikos aus dem Bestand lässt sich durch eine nicht beobachtbare Zufallsvariable Λ mit $P[\{\Lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}\}] = 1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty)$ sowie $\lambda_1 < \lambda_2$ beschreiben, wobei
- das Ereignis $\{\Lambda = \lambda_1\}$ die Auswahl eines guten Risikos und
- das Ereignis $\{\Lambda = \lambda_2\}$ die Auswahl eines schlechten Risikos

beschreibt. Dann ist

$$\eta := P[\{\Lambda = \lambda_1\}]$$

der Anteil der guten Risiken und

$$1 - \eta = P[\{\Lambda = \lambda_2\}]$$

der Anteil der schlechten Risiken im Bestand. Die Zufallsvariable Λ wird als *Risikoparameter* bezeichnet. Nach Voraussetzung ist η bekannt, und aufgrund der Inhomogenität des Bestandes gilt $\eta \in (0, 1)$.

Des Weiteren lässt sich für $i \in \{1, 2\}$ die *bedingte Verteilung* von N unter dem Ereignis $\{\Lambda = \lambda_i\}$ durch die stochastische Folge $\mathbf{p}_i$ mit

$$p_{i,k} = P[\{N = k\}|\{\Lambda = \lambda_i\}] = \frac{P[\{N = k\} \cap \{\Lambda = \lambda_i\}]}{P[\{\Lambda = \lambda_i\}]}$$

beschreiben. Dann ist
- $\mathbf{p}_1$ die bedingte Verteilung der Anzahl der Schäden eines guten Risikos und
- $\mathbf{p}_2$ die bedingte Verteilung der Anzahl der Schäden eines schlechten Risikos.

Nach Voraussetzung sind $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ bekannt, und aufgrund der Inhomogenität des Bestandes gilt $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$. Für die (unbedingte) Verteilung $\mathbf{p}$ der Anzahl der Schäden eines zufällig ausgewählten Risikos gilt

$$\begin{aligned}
p_k &= P[\{N=k\}] \\
&= P[\{N=k\} \cap \{\Lambda=\lambda_1\}] + P[\{N=k\} \cap \{\Lambda=\lambda_2\}] \\
&= P[\{N=k\}|\{\Lambda=\lambda_1\}]\, P[\{\Lambda=\lambda_1\}] + P[\{N=k\}|\{\Lambda=\lambda_2\}]\, P[\{\Lambda=\lambda_2\}] \\
&= \eta\, p_{1,k} + (1-\eta)\, p_{2,k}
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{p} = \eta\, \mathbf{p}_1 + (1-\eta)\, \mathbf{p}_2$$

Daher ist die Verteilung der Anzahl der Schäden eines zufällig ausgewählten Risikos eine Konvexkombination der bedingten Verteilungen der guten bzw. schlechten Risiken, und die Gewichte der Konvexkombination sind gerade die Anteile der guten bzw. schlechten Risiken im Bestand.

Eine derartige zweistufige Modellierung zur Konstruktion einer Verteilung ist in der Versicherungsmathematik und auch in anderen Anwendungsgebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie recht häufig anzutreffen.

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-46175-4

Stochastische Folgen
Ein Proseminar mit Anwendungen in der Versicherungsmathematik
Schmidt, K.D.
2015, VIII, 160 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-46175-4