

---

# Einleitung

Information theory is a branch of the mathematical theory of probability and mathematical statistics.

Solomon Kullback in [Kull97]

Der Begriff **Information** gehört zu den Schlüsselbegriffen unserer Zeit; Soziologen sprechen daher unter anderem vom Informationszeitalter, wenn sie die Gegenwart beschreiben. Fragt man nach den wissenschaftlichen Disziplinen, die sich mit Information beschäftigen, so kommt den meisten wohl die Informatik, die Nachrichtentechnik und ganz allgemein Kommunikationswissenschaften (etwa als Teilgebiete der Elektrotechnik, der Psychologie und der Soziologie) in den Sinn; an die Mathematik denken die wenigsten. Aus diesem Grund wird die Informationstheorie auch nicht (mehr) als Teilgebiet der Mathematik wahrgenommen. Dies ist umso erstaunlicher, wenn man bedenkt, dass es Mathematiker waren, die die Pionierarbeit einer wissenschaftlichen Theorie der Information – eingebettet in die Stochastik – geleistet haben.

In mathematisch-naturwissenschaftlichem Kontext tritt der Begriff Information wohl erstmals im Jahre 1925 in einer Arbeit von RONALD AYLMER FISHER (1890–1962) mit dem Titel „Theory of statistical estimation“ auf (siehe [Fi25]); dabei wird im Prinzip nach der Menge an Information gefragt, die man über unbekannte Verteilungsparameter durch Realisierungen des zugrunde gelegten Zufallsexperiments erhält; auf eine verwandte Fragestellung werden wir bei der Betrachtung suffizienter Statistiken zu sprechen kommen. In diesem Buch wird ein zur FISHER-Information alternativer Zugang zum Begriff der Information gewählt. Als erste Veröffentlichung in diesem Zusammenhang kann der Artikel „A Mathematical Theory of Communication“ gelten, dessen erster Teil von CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916–2001) im Juli 1948 im *Bell Systems Technical Journal* veröffentlicht wurde (siehe [ShWe63]). Das Ziel dieser Vorgehensweise wird im Titel des besagten Artikels klar: Der Informationsbegriff dient als Baustein einer zu entwickelnden Theorie der Kommunikation. Im gleichen Jahr wählte NORBERT WIENER (1894–1964) unabhängig von SHANNON einen analogen Zugang für stetige Verteilungen durch Einführung der differentiellen Entropie (siehe [Wie61]), welche in thermodynamischem Kontext bereits von LUDWIG BOLTZMANN (1844–1906) im Jahr 1866 verwendet wurde; allerdings verwendete WIENER im Gegensatz zu BOLTZMANN und SHANNON in diesem

Zusammenhang explizit den Begriff Information. Das vorliegende Buch hat somit den Shannon-Wiener Zugang zum mathematischen Informationsbegriff zum Gegenstand. Wie bereits NORBERT WIENER in seinem Buch über Kybernetik ([Wie61]) feststellte, kann dieser Zugang den Informationsbegriff von FISHER ersetzen (das entsprechende Hilfsmittel ist die „de Bruijn Identität“, siehe etwa [Joh04]). Obwohl sowohl SHANNON als auch WIENER bei ihrer Konzeption der mathematischen „Messung“ einer Informationsmenge in erster Linie die Kommunikationstheorie im Blick hatten, zeigt schon die Parallele zur Thermodynamik, dass der im Folgenden zu untersuchende Informationsbegriff wesentlich breiter anwendbar ist.

Der erste Teil des vorliegenden Buches ist den Grundlagen gewidmet. Wesentlich ist dabei nach einer gegenseitigen Abgrenzung der beiden Begriffe Nachricht und Information die axiomatische Zuordnung einer Informationsmenge zu einer Wahrscheinlichkeit.

In Teil II werden abzählbare Systeme, also Wahrscheinlichkeitsräume mit höchstens abzählbar vielen Ergebnissen untersucht. Die mittlere Informationsmenge dieser Systeme führt auf die fundamentale Definition der Shannon-Entropie und ihre Anwendung als geeignetes Maß für die Güte einer Codierung; mit der Huffman-Codierung wird eine optimale Codierung vorgestellt. Ein sehr wichtiges Beispiel für abzählbare Systeme liefert die statistische Physik – genauer die Thermodynamik. In diesem Zusammenhang ermöglicht die Shannon-Entropie eine informationstheoretische Interpretation der thermodynamischen Entropie und insbesondere des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für abgeschlossene Systeme (Kap. 4). Mit der Einführung bedingter Wahrscheinlichkeiten in Kap. 5 werden zwei klassische Anwendungen der Shannon-Entropie in der mathematischen Statistik (Suffizienz von Schätzfunktionen) und in der Nachrichtentechnik (Transinformation) vorgestellt. Ein Buch über die Mathematik der Information wäre ohne einen Blick auf Quanteninformation und Quantenalgorithmen unvollständig; das entsprechende sechste Kapitel dient als Einführung in diese Thematik.

Mit Teil III beginnt die Analyse allgemeiner Systeme, also von Wahrscheinlichkeitsräumen mit im Allgemeinen mehr als abzählbar vielen Ergebnissen; dies führt auf den von NORBERT WIENER im Rahmen der Informationstheorie eingeführten Begriff der differentiellen Entropie. Die notwendigen maß- und integrationstheoretischen Voraussetzungen werden jeweils an der Stelle entwickelt, wo sie benötigt werden. Neben Anwendungen aus der Nachrichtentechnik und der mathematischen Statistik wird der Informationsbegriff auch bei der Analyse dynamischer Systeme betrachtet.

Dieses Buch ist für Mathematiker und/oder Informatiker mit Vorkenntnissen auf Bachelor-Niveau geschrieben. Es dient einerseits der Darstellung, wie der Informationsbegriff in der Mathematik verankert ist, und soll andererseits eine Auswahl von Anwendungen (gerade auch außerhalb der Kommunikationstechnik) vorstellen; da als Mathematikbuch konzipiert, wird natürlich großer Wert auf exakte Beweisführung gelegt. Daher wird sich der Inhalt dieses Buches nicht mit den Inhalten decken, die Ingenieure mit dem Begriff Informationstheorie in Verbindung bringen (hierzu gibt es eine nicht mehr zu überschauende Fülle von Literatur; genannt sei als Klassiker [CovTho91]). Zur Vermeidung von Missverständnissen wurde daher im Titel dieses Buches der Begriff In-

formationstheorie vermieden. Dennoch bleibt beim Autor die Überzeugung, dass auch der ein oder andere Ingenieur das vorliegende Buch mit Gewinn lesen wird, wenn er sich auf die Sprache und Darstellungsart der Mathematik einlässt, was aber gerade in Deutschland leider nicht selbstverständlich ist.

Aber auch Mathematiker werden in diesem Buch gewisse Themen vermissen; ich denke insbesondere an die Ergodentheorie. Dieses Thema hat sich längst zu einer eigenen Spezialdisziplin entwickelt; in den Abschn. 7.3 und 9.4 werden wir zumindest auf den Begriff des ergodischen Wahrscheinlichkeitsmaßes zu sprechen kommen. Ein Standardwerk zum Thema Ergodentheorie und Information ist immer noch [Bill65]. Für eine mathematisch fundierte Einführung in die Codierungstheorie, die hier auch nur am Rande betrachtet wird, sei auf [Ash65] und [HeiQua95] verwiesen. Einen sehr interessanten Zusammenhang gibt es zwischen der Shannon-Entropie und der Hausdorff-Dimension einer Menge; hier sei auf [Bill65] und [PötSob80] verwiesen.

Mein geschätzter Mitarbeiter und Kollege, Herr DR. R. VON CHOSSY hat das Manuskript in den letzten Wochen seiner Dienstzeit kritisch durchgearbeitet, viele Verbesserungsvorschläge und wertvolle Beweisideen (zum Beispiel zu Theorem 8.1) eingebracht und war mir somit wie immer eine unschätzbare Hilfe. Ihm sei an dieser Stelle – gerade auch für seine hervorragende Arbeit in den gemeinsamen 14 Jahren – besonders gedankt.

Mathematik der Information

Theorie und Anwendungen der Shannon-Wiener  
Information

Schäffler, S.

2015, XV, 160 S. 26 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-46381-9