

2 SPEZIELLE MATRIZEN

2.1

NULLMATRIZEN UND EINSMATRIZEN

Definitionen:

- $\mathbf{R}_{m \times n}$ heißt Nullmatrix und $\mathbf{r}_{m \times 1}$ heißt Nullvektor, wenn

$$r_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad \text{bzw.} \quad r_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

ist. Für \mathbf{R} bzw. \mathbf{r} schreibt man

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{R}_{m \times n}$ heißt Einsmatrix und $\mathbf{r}_{m \times 1}$ heißt Einsvektor, wenn

$$r_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n) \quad \text{bzw.} \quad r_i = 1 \quad (i = 1, \dots, m)$$

ist. Für \mathbf{R} bzw. \mathbf{r} schreibt man

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterungen:

- Eine Matrix heißt Nullmatrix, wenn alle Elemente gleich 0 sind. Ein Vektor, dessen Elemente alle gleich 0 sind, heißt Nullvektor.
- Eine Matrix heißt Einsmatrix, wenn alle Elemente gleich 1 sind. Ein Vektor, dessen Elemente alle gleich 1 sind, heißt Einsvektor. Als Symbol für den Einsvektor wird ausnahmsweise kein Kleinbuchstabe verwendet, sondern die fettgedruckte Zahl 1.

Regeln:

$$2.1.1 \quad \underset{m \times n}{A} - \underset{m \times n}{A} = \underset{m \times n}{\mathbf{0}} ; \quad \underset{m \times n}{A} + \underset{m \times n}{\mathbf{0}} = \underset{m \times n}{A}$$

$$2.1.2 \quad \lambda \underset{m \times n}{\mathbf{0}} = \underset{m \times n}{\mathbf{0}}$$

$$2.1.3 \quad \underset{m \times n}{A} \underset{n \times l}{\mathbf{0}} = \underset{m \times l}{\mathbf{0}} ; \quad \underset{m \times l}{\mathbf{0}} \underset{l \times m}{A} = \underset{l \times n}{\mathbf{0}}$$

$$2.1.4 \quad \underset{1 \times n}{\mathbf{1}'} \underset{n \times 1}{\mathbf{1}} = \underset{1 \times 1}{\mathbf{1}'} \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{Gesamtsumme der Elemente von } \mathbf{a}$$

$$2.1.5 \quad \underset{1 \times m}{\mathbf{1}'} \underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad \text{Gesamtsumme der Elemente von } A$$

$$2.1.6 \quad \underset{m \times n}{A} \underset{n \times 1}{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{Zeilensummen von } A$$

$$2.1.7 \quad \underset{1 \times m}{\mathbf{1}'} \underset{m \times n}{A} = \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^m a_{in} \right) \quad \text{Spaltensummen von } A$$

$$2.1.8 \quad \underset{m \times n}{J} = \underset{m \times 1}{\mathbf{1}} \underset{1 \times n}{\mathbf{1}'} ; \quad \underset{m \times n}{\mathbf{0}} = \underset{m \times 1}{\mathbf{o}} \underset{1 \times n}{\mathbf{o}'}$$

$$2.1.9 \quad \underset{m \times n}{J}' = \underset{n \times m}{J} ; \quad \underset{m \times n}{\mathbf{0}}' = \underset{n \times m}{\mathbf{0}}$$

$$2.1.10 \quad \underset{m \times n}{J} \underset{n \times p}{J} = \underset{m \times p}{n J} ; \quad \underset{m \times n}{\mathbf{0}} \underset{n \times p}{\mathbf{0}} = \underset{m \times p}{\mathbf{0}}$$

$$2.1.11 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{J}} \underset{n \times 1}{\mathbf{1}} = \underset{m \times 1}{n \mathbf{1}} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

$$2.1.12 \quad \underset{1 \times m}{\mathbf{1}'} \underset{m \times n}{\mathbf{J}} = \underset{1 \times n}{m \mathbf{1}'} = (m \quad \cdots \quad m)$$

Beispiele:

$$1) \quad \underset{3 \times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \underset{3 \times 1}{\mathbf{o}}; \lambda = -1$$

$$\underset{1 \times 2}{\mathbf{r}} = \underset{1 \times 3}{\mathbf{o}'} \underset{3 \times 2}{(\mathbf{A} + \lambda \mathbf{A})} = \underset{1 \times 3}{\mathbf{o}'} \underset{3 \times 2}{(\mathbf{A} - \mathbf{A})} = \underset{1 \times 3}{\mathbf{o}'} \underset{1 \times 2}{\mathbf{O}} = \underset{1 \times 2}{\mathbf{o}}$$



$$2) \quad \underset{2 \times 2}{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \underset{2 \times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \underset{2 \times 1}{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \underset{2 \times 1}{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$a) \quad \underset{2 \times 1}{\mathbf{b}'} \underset{2 \times 1}{\mathbf{1}} = (1 \quad \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad \underset{1 \times 2}{\mathbf{1}'} \underset{2 \times 1}{\mathbf{1}} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$c) \quad \underset{1 \times 2}{\mathbf{1}'} \underset{2 \times 2}{\mathbf{J}} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}$$

$$d) \quad \underset{2 \times 2}{\mathbf{A}} \underset{2 \times 1}{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$e) \quad \underset{1 \times 2}{\mathbf{1}'} \underset{2 \times 2}{\mathbf{A}} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \quad 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4) = (4 \quad 6)$$

$$f) \quad \underset{1 \times 2}{\mathbf{1}'} \underset{2 \times 2}{\mathbf{A}} \underset{2 \times 1}{\mathbf{1}} = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (4 \quad 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 10$$

$$g) \quad \mathbf{J}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}$$

Anmerkungen:

- Die Nullmatrizen spielen bei den Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl 0 bei den reellen Zahlen (Skalaren).
- Wenn $\mathbf{x}_{n \times 1}$ der Vektor der n Beobachtungen eines Merkmals ist, dann ist das arithmetische Mittel der Beobachtungen gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \mathbf{x}' \mathbf{1}_{n \times 1} = \frac{1}{n} \mathbf{1}' \mathbf{x}$$

2.2

QUADRATISCHE MATRIZEN

Definition:

$\mathbf{R}_{m \times n}$ heißt quadratische Matrix, wenn

$$m = n$$

ist.

Erläuterung:

Eine Matrix ist quadratisch, wenn sie genauso viele Spalten wie Zeilen hat, z.B. $\mathbf{R}_{n \times n}$. Eine quadratische Matrix besitzt eine Hauptdiagonale mit

den Elementen r_{ii} ($i = 1, \dots, n$):

$$\mathbf{R}_{n \times n} = \begin{pmatrix} \boxed{r_{11}} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & \boxed{r_{22}} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{\ddots} & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & \boxed{r_{nn}} \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

Matrixprodukte der Form $\underbrace{\mathbf{A}' \mathbf{A}}_{n \times n}$ und $\underbrace{\mathbf{A} \mathbf{A}'}_{m \times m}$ sind stets quadratisch.

2.3

EINHEITSMATRIZEN, EINHEITSVEKTOREN UND BASISMATRIZEN

Definitionen:

- \mathbf{R} heißt Einheitsmatrix, wenn
 $n \times n$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

ist. Für \mathbf{R} schreibt man

$$\mathbf{I}_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- \mathbf{r} heißt j -ter Einheitsvektor im \mathbb{R}^n , wenn
 $n \times 1$

$$r_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ist. Für \mathbf{r} schreibt man \mathbf{e}_j .

- \mathbf{R} heißt (k, l) -te Basismatrix, wenn
 $m \times n$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k \text{ und } j = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

ist. Für \mathbf{R} schreibt man \mathbf{B}_{kl} .

- $\delta_{ij} \in \mathbb{R}$ heißt Kronecker-Delta, wenn

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

ist.

Erläuterungen:

- Eine quadratische Matrix heißt Einheitsmatrix, wenn alle Elemente ihrer Hauptdiagonale Einsen und alle übrigen Elemente Nullen sind.
Als Symbol benutzen wir \mathbf{I} . Es gilt

$$\mathbf{I} = (\delta_{ij})_{n \times n}$$

- Ein Vektor, dessen j -tes Element eine Eins und dessen übrige Elemente Nullen sind, heißt (j -ter) Einheitsvektor im \mathbb{R}^n . Als Symbol benutzen wir \mathbf{e}_j .

Es gibt genau n Einheitsvektoren im \mathbb{R}^n , z.B. im \mathbb{R}^3

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

- Matrizen \mathbf{B}_{ij} , die nur an der Stelle (i, j) eine 1 aufweisen und deren übrige Elemente alle 0 sind, heißen Basismatrizen.

Regeln:

$$2.3.1 \quad \mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$m \times n \quad n \times n \quad m \times m \quad m \times n$

$$2.3.2 \quad \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j'$$

$m \times n \quad m \times 1 \quad 1 \times n$

$$2.3.3 \quad \mathbf{1} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i$$

$n \times 1 \quad n \times 1$

$$2.3.4 \quad \mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{ii} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i'$$

$n \times n \quad n \times n \quad n \times n \quad n \times 1$

$$2.3.5 \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \quad \text{Basiseigenschaft der } \mathbf{e}_i$$

$n \times 1 \quad n \times 1 \quad n \times 1$

$$2.3.6 \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{B}_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j' \quad \text{Basiseigenschaft der } \mathbf{B}_{ij}$$

$m \times n \quad m \times n \quad m \times n \quad m \times 1 \quad 1 \times n$

$$2.3.7 \quad a_{ij} = \mathbf{e}_i' \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j' \mathbf{A}' \mathbf{e}_i$$

$1 \times m \quad m \times n \quad n \times 1$

$$2.3.8 \quad \mathbf{a}_{\cdot j} = \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}_i$$

$m \times 1 \quad m \times n \quad n \times 1 \quad m \times 1 \quad m \times 1$

$$2.3.9 \quad \underset{n \times 1}{\mathbf{a}_i} = \underset{n \times m}{\mathbf{A}'} \underset{m \times 1}{\mathbf{e}_i} = \sum_{j=1}^n \underset{n \times 1}{a_{ij}} \underset{n \times 1}{\mathbf{e}_j}$$

$$2.3.10 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^m \underset{m \times 1}{\mathbf{e}_i} \underset{1 \times n}{\mathbf{a}_i'} = \sum_{j=1}^n \underset{m \times 1}{\mathbf{a}_{\cdot j}} \underset{1 \times n}{\mathbf{e}_j'}$$

$$2.3.11 \quad \underset{k \times m}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{m \times n}{\mathbf{A}} = \underset{k \times 1}{\mathbf{e}_i} \underset{1 \times n}{\mathbf{a}_{j\cdot}'}$$

$$2.3.12 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{A}} \underset{n \times k}{\mathbf{B}_{ij}} = \underset{m \times 1}{\mathbf{a}_{\cdot i}} \underset{1 \times k}{\mathbf{e}_j'}$$

$$2.3.13 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{A}} \underset{n \times k}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{k \times l}{\mathbf{C}} = \underset{m \times 1}{\mathbf{a}_{\cdot i}} \underset{1 \times l}{\mathbf{C}_{\cdot j}'}$$

$$2.3.14 \quad \underset{k \times m}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{m \times n}{\mathbf{A}} \underset{n \times l}{\mathbf{B}_{rs}} = \underset{k \times l}{a_{jr}} \underset{k \times l}{\mathbf{B}_{is}}$$

$$2.3.15 \quad \underset{1 \times n}{\delta_{ij}} = \underset{1 \times n}{\mathbf{e}_i'} \underset{n \times 1}{\mathbf{e}_j}$$

$$2.3.16 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{n \times 1}{\mathbf{e}_r} = \underset{m \times 1}{\delta_{jr}} \underset{m \times 1}{\mathbf{e}_i}$$

$$2.3.17 \quad \underset{1 \times m}{\mathbf{e}_r'} \underset{m \times n}{\mathbf{B}_{ij}} = \underset{1 \times n}{\delta_{ri}} \underset{1 \times n}{\mathbf{e}_j'}$$

$$2.3.18 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{n \times k}{\mathbf{B}_{rs}} = \underset{m \times k}{\delta_{jr}} \underset{m \times k}{\mathbf{B}_{is}}$$

$$2.3.19 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{n \times k}{\mathbf{B}_{js}} = \underset{m \times k}{\mathbf{B}_{is}}$$

$$2.3.20 \quad \underset{m \times n}{\mathbf{B}_{ij}} \underset{n \times k}{\mathbf{B}_{rs}} = \underset{m \times k}{\mathbf{O}} \quad \text{falls } r \neq j$$

Beispiele:

$$1) \quad \underset{3 \times 2}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \mathbf{I}_{3 \times 3} \mathbf{A}_{3 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \mathbf{A}_{3 \times 2} \mathbf{I}_{2 \times 2} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}
 \end{aligned}$$



$$\text{2)} \quad \mathbf{B}_{11}^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{23}^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\text{3)} \quad \mathbf{B}_{11}^{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{23}^{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen:

- Die Spalten der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{n \times n}$ sind die n Einheitsvektoren im \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{I}_{n \times n} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n]$$

- Die Einheitsmatrizen spielen bei den Matrizen die gleiche Rolle wie die Zahl 1 bei den reellen Zahlen (Skalaren).
- Im einführenden Beispiel wurde die Technologische Matrix \mathbf{T} durch Subtraktion der Direktbedarfsmatrix \mathbf{D} von der Einheitsmatrix erzeugt.
- Basismatrizen sind nicht notwendigerweise quadratisch.

2.4

DIAGONALMATRIZEN UND DREIECKSMATRIZEN

Definitionen:

- $\underset{n \times n}{R}$ heißt Diagonalmatrix, wenn

$$r_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j \ (i, j = 1, \dots, n)$$

ist.

- $\underset{n \times n}{R}$ heißt obere Dreiecksmatrix, wenn

$$r_{ij} = 0 \text{ für alle } i > j \ (i, j = 1, \dots, n)$$

ist.

- $\underset{n \times n}{R}$ heißt untere Dreiecksmatrix, wenn

$$r_{ij} = 0 \text{ für alle } i < j \ (i, j = 1, \dots, n)$$

ist.

Erläuterungen:

- Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente, die außerhalb der Hauptdiagonale stehen, Nullen sind. Die Elemente der Hauptdiagonale sind beliebig, d.h. sie könnten alle gleich oder unterschiedlich sein und dort könnten (auch) Nullen stehen.
- Eine quadratische Matrix heißt obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente, die unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonale stehen, Nullen sind. Die Elemente der Hauptdiagonale und oberhalb (unterhalb) der Hauptdiagonale sind beliebig.

Beispiele:

Die folgenden Matrizen sind Diagonalmatrizen:

$$1) \quad \underset{n \times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \mathbf{I}_{n \times n}$$

$$3) \quad \mathbf{O}_{n \times n}$$

Die folgenden Matrizen sind Dreiecksmatrizen:

$$4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{obere})$$

$$5) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{untere})$$

$$6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{obere; auch untere, wenn } x = 0)$$

$$7) \quad \mathbf{I}_{n \times n} \quad (\text{obere und untere})$$

Anmerkungen:

- Alle Einheits- und alle quadratischen Nullmatrizen sind Diagonalmatrizen.
- Alle Diagonalmatrizen sind (obere und untere) Dreiecksmatrizen.

2.5 SYMMETRISCHE MATRIZEN

Definition:

$\mathbf{R}_{n \times n}$ heißt symmetrische Matrix, wenn

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}$$

ist.

Erläuterung:

Eine quadratische Matrix ist symmetrisch, wenn sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt, wenn also die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale achsensymmetrisch zur Hauptdiagonale sind.

Korrespondierende Spalten und Zeilen sind dann identisch, d.h. die j -te Spalte ist gleich der j -ten Zeile ($j = 1, \dots, n$):

Einführung in die Moderne Matrix-Algebra

Mit Anwendungen in der Statistik

Schmidt, K.; Trenkler, G.

2015, IX, 275 S. 11 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-46772-5