

Dieses Kapitel behandelt einen wichtigen Spezialfall der optimalen Steuerung dynamischer Systeme. Es handelt sich um Probleme mit *linearen* Zustandsgleichungen und *quadratischen* Gütefunktionalen, die selbst bei hochdimensionalen Systemen die Ableitung optimaler Regelgesetze zulassen. Die Bedeutung der *Linearen-Quadratischen (LQ-)Optimierung* für die Regelungstechnik ist daher besonders hervorzuheben, bietet sie doch die Möglichkeit des einheitlichen, geschlossenen und transparenten Entwurfs von *Mehrgrößenreglern* für lineare dynamische Systeme. Zwar sind die meisten praktisch interessierenden Systeme nichtlinear. In der Regelungstechnik ist es aber üblich, eine Linearisierung um einen stationären Arbeitspunkt oder um eine Solltrajektorie vorzunehmen, wodurch lineare Zustandsgleichungen entstehen (s. Abschn. 12.10). Die Fundamente dieses wichtigen Kapitels der Optimierungs- und Regelungstheorie gehen auf die bedeutungsvollen Arbeiten von *R.E. Kalman* zurück [1]. Ausführliche Darlegungen des Gegenstandes dieses Kapitels können in [2–5] gefunden werden.

Die linearen Prozessnebenbedingungen der Problemstellung lauten (vgl. auch Abschn. 19.2.1.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (12.1)$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der Zustandsvektor, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ der Steuervektor, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die gegebenenfalls zeitvarianten System- und Steuermatrizen sind. Das zu minimierende Gütefunktional ist quadratisch

$$J = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(T)\|_{\mathbf{S}}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{Q}(t)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 dt, \quad T \text{ fest}, \quad (12.2)$$

wobei $\mathbf{S} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{Q}(t) \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{R}(t) > \mathbf{0}$ gegebenenfalls zeitvariante symmetrische Gewichtungsmatrizen sind (s. Übungen 12.6, 12.7 für Verallgemeinerungen dieser Problemstellung). Der kürzeren Darstellung halber wird das Zeitargument t in den folgenden Ausführungen dieses Kapitels teilweise weggelassen.

Das quadratische Gütefunktional (12.2) macht deutlich, dass die optimale Steuerung eine Solltrajektorie $\mathbf{x}_{\text{soll}}(t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_{\text{soll}}(t) = \mathbf{0}$ anstrebt. Diese Einschränkung trifft bei vielen praktischen Anwendungen zu, bei denen in der Tat eine Systemkorrektur um eine Ruhelage oder um eine Systemtrajektorie angestrebt wird, mit dem Ziel, Störungswirkungen auszugleichen bzw. eine Anfangsabweichung $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ abzubauen. Dass hier die Nulltrajektorie als Solltrajektorie betrachtet wird, ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da die Problemstellung angesichts der Linearität der Prozessgleichungen in jede andere Ruhelage bzw. Systemtrajektorie transformierbar ist, s. Abschn. 12.8.

Die Berücksichtigung quadratischer Terme der Steuergrößen im Gütefunktional hat den Sinn, den notwendigen Steueraufwand bei der Systemkorrektur mitzuberechnen. Darüber hinaus können aber über diese quadratischen Terme indirekt auch Steuerbeschränkungen berücksichtigt werden, da die Größe der Gewichtungselemente von \mathbf{R} den Umfang der entsprechenden Steuermaßnahmen direkt beeinflusst.

Während die Endzeit T in (12.2) als fest angenommen wird, ist der Endzustand $\mathbf{x}(T)$ frei. Durch den im Gütefunktional enthaltenen Endzeiterm ist es aber möglich, den Endzustand bzw. einzelne Komponenten desselben mittels entsprechend hoher Gewichtungselemente von \mathbf{S} beliebig nahe an Null zu bringen. Gilt beispielsweise $\mathbf{S} = \text{diag}(s_{ii})$ und wird ein bestimmtes Matrixelement $s_{jj} \rightarrow \infty$ gewählt, so ist $x_j(T) \rightarrow 0$ zu erwarten, sofern die entsprechende Zustandsvariable x_j steuerbar ist. Aus praktischer Sicht bedeutet dieser Fall also eine Fixierung von $x_j(T) = 0$, auch wenn $x_j(T)$ formal nach wie vor frei bleibt.

12.1 Zeitvarianter Fall

Zur Lösung der formulierten Problemstellung stellen wir zunächst die Hamilton-Funktion auf

$$H = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{R}}^2 + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) . \quad (12.3)$$

Mit (12.3) lassen sich die notwendigen Optimalitätsbedingungen wie folgt ableiten

$$\nabla_{\mathbf{u}} H = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (12.4)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} H = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (12.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\nabla_{\mathbf{x}} H = -\mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} . \quad (12.6)$$

Die zugehörigen Randbedingungen lauten

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (12.7)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = \mathbf{S}\mathbf{x}(T) . \quad (12.8)$$

Die Koppelgleichung (12.4) kann nach \mathbf{u} aufgelöst werden

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} . \quad (12.9)$$

Durch Einsetzen von (12.9) in (12.5) erhält man ferner

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} . \quad (12.10)$$

Gleichungen (12.10) und (12.6) konstituieren ein ZPRWP mit den Randbedingungen (12.7), (12.8), dessen Lösung zu den gesuchten optimalen Trajektorien führt. Dass diese Lösung einem Minimum entspricht, erhärtet die Auswertung der notwendigen Bedingung 2. Ordnung, die $\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 H = \mathbf{R} > \mathbf{0}$ liefert. In Anbetracht der Konvexität der Problemstellung handelt es sich hierbei in der Tat um ein eindeutiges globales Minimum [2, 5].

Wir sind bestrebt, für die formulierte Problemstellung ein optimales Regelgesetz im Sinne von Abschn. 10.3 zu erhalten. In Anbetracht von (12.9) würde man ein Regelgesetz erhalten, wenn man bei der Lösung des ZPRWP den Kozustand $\boldsymbol{\lambda}$ als Funktion des Zustandes \mathbf{x} ausdrücken könnte. Aus diesem Grund machen wir den linearen Ansatz

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (12.11)$$

und wollen nun überprüfen, ob die Lösung des ZPRWP diesem Ansatz entsprechen kann. Durch Einsetzen von (12.11) und (12.10) in (12.6) erhalten wir

$$\left(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} \right) \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} .$$

Damit diese Beziehung für alle t erfüllt ist, muss der Term in den Klammern verschwinden. Mit anderen Worten, die eingeführte Matrix \mathbf{P} muss folgende Gleichung erfüllen

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{Q} , \quad (12.12)$$

um zu einer Lösung des ZPRWP zu führen. Gleichung (12.12) ist eine nichtlineare Matrix-Differentialgleichung, die den Namen *Riccati-Differentialgleichung* trägt. Ein Vergleich des Ansatzes (12.11) mit (12.8) liefert uns sofort auch eine Randbedingung für (12.12)

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{S} . \quad (12.13)$$

Zur Berechnung der *Riccati-Matrix* $\mathbf{P}(t)$ muss also die Riccati-Differentialgleichung (12.12), von der Endbedingung (12.13) ausgehend, rückwärts integriert werden. Zur Durchführung einer Rückwärtsintegration ist es erforderlich, die Substitution $\tau = T - t$ vorzunehmen. Mit $d\tau = -dt$ erhält man dann aus (12.12), (12.13) folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}; \quad \mathbf{P}(\tau = 0) = \mathbf{S} ,$$

das durch numerische Vorwärtsintegration (vgl. Abschn. 15.2) die gesuchte Matrixtrajektorie liefert. Auf diese Weise wurde nun das ZPRWP auf ein einfach zu lösendes

Ein-Punkt-Randwert-Problem höherer Ordnung zurückgeführt. Da gezeigt werden kann, dass die Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ symmetrisch ist, erfordert die Lösung der Riccati-Differentialgleichung nicht die Auswertung von n^2 , sondern lediglich von $n(n+1)/2$ skalaren, verkoppelten Differentialgleichungen.

Um die Symmetrieeigenschaft der Riccati-Matrix zu beweisen, beachte man, dass durch Transponieren der Riccati-Gleichung (12.12) und ihrer Randbedingung (12.13) folgende Gleichungen resultieren

$$\dot{\mathbf{P}}^T = -\mathbf{A}^T \mathbf{P}^T - \mathbf{P}^T \mathbf{A} + \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^T - \mathbf{Q}; \quad \mathbf{P}^T(T) = \mathbf{S}. \quad (12.14)$$

Ein direkter Vergleich von (12.12), (12.13) einerseits mit (12.14) andererseits zeigt, dass \mathbf{P} einerseits und \mathbf{P}^T andererseits aus der Auswertung der gleichen Gleichung mit der gleichen Randbedingung entstehen, weshalb beide identisch sein müssen.

Durch Einsetzen von (12.11) in (12.9) erhalten wir schließlich das gesuchte optimale Regelgesetz

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t). \quad (12.15)$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um eine lineare vollständige *Zustandsrückführung* (*LQ-Regler*) mit einer zeitvarianten *Rückführmatrix*

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^T \mathbf{P}(t). \quad (12.16)$$

Dieses Regelgesetz ist also unabhängig von dem Anfangszustand \mathbf{x}_0 und hängt ausschließlich von den Prozessmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , von den Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} und von der Endzeit T ab. Die Zustandsgleichung des optimal geregelten Prozesses lautet somit

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} = \mathbf{A}_{RK} \mathbf{x}, \quad (12.17)$$

wobei $\mathbf{A}_{RK} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ die Systemmatrix des geregelten Systems ist. Der mittels des optimalen Regelgesetzes (12.15) resultierende minimale Wert des Gütefunktions (12.2) beträgt

$$J^* = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P}(0) \mathbf{x}_0. \quad (12.18)$$

Zur Ableitung von (12.18) beachte man zunächst folgende Gleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}}$$

und setze dann $\dot{\mathbf{x}}$ aus (12.17) und $\dot{\mathbf{P}}$ aus (12.12) ein

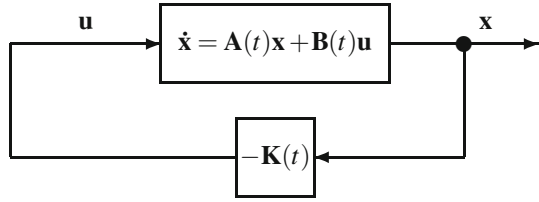
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}. \quad (12.19)$$

Durch Integration von (12.19) erhält man

$$\int_0^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt = -\mathbf{x}(T)^T \mathbf{P}(T) \mathbf{x}(T) + \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0),$$

woraus mit (12.13) und (12.2) die Beziehung (12.18) unmittelbar resultiert.

Abb. 12.1 LQ-Regelung eines linearen Prozesses



Führt man die Integration von (12.19) mit den Integralgrenzen (t, T) durch, so erhält man

$$\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P}(t) \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(T)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(T) + \int_t^T \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt .$$

Aus der positiven Semidefinitheit der rechten Seite obiger Gleichung lässt sich folgern, dass $\mathbf{P}(t) \geq \mathbf{0}$ gelten muss.

Die Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ ist positiv semidefinit

$$\mathbf{P}(t) \geq \mathbf{0}, \quad t \in [0, T] . \quad (12.20)$$

Fassen wir nun die Vorgehensweise der Entwicklung und des Einsatzes eines optimalen Regelgesetzes bei einer gegebenen Anwendung zusammen, so müssen zunächst durch Rückwärtsintegration der Riccati-Gleichung (12.12) mit Endbedingung (12.13) die Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ und mittels (12.16) auch die Rückführmatrix $\mathbf{K}(t)$ bei gegebenen Prozess- und Gewichtungsmatrizen sowie gegebener Endzeit T off-line berechnet und abgespeichert werden. In wenigen einfachen Anwendungsfällen mag auch eine analytische Lösung der Riccati-Gleichung möglich sein (s. Beispiel 12.1 sowie einige Übungsaufgaben). Die on-line Berechnungen beschränken sich dann lediglich auf die Auswertung des optimalen Regelgesetzes (12.15) anhand vorliegender Messungen $\mathbf{x}(t)$ aus dem Prozessgeschehen. Abbildung 12.1 zeigt das Schema des optimal geregelten Prozesses.

Beispiel 12.1 Das im Abschn. 10.4 behandelte Beispiel erfüllt alle Voraussetzungen der LQ-Optimierung und kann also mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren gelöst werden. Zusätzlich zu Abschn. 10.4 wollen wir hier eine Verallgemeinerung des Gütefunktional (10.34) einführen, indem wir den Steueraufwand mit $r > 0$ gewichten

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x^2 + r u^2 dt . \quad (12.21)$$

Offensichtlich würde die Einführung eines Gewichtungsfaktors $q \geq 0$ im ersten Term des obigen Integranden zu keiner weiteren Verallgemeinerung der Problemstellung führen.

Zur Anwendung des LQ-Formalismus für dieses Problem beachten wir, dass $A = 0$, $B = 1$, $S = \infty$, $Q = 1$, $R = r$ gelten, so dass wir gemäß (12.12) folgende Riccati-Gleichung erhalten

$$\dot{P} = \frac{P^2}{r} - 1 \quad (12.22)$$

mit der Randbedingung $P(T) = \infty$. Durch Integration von (12.22) lässt sich bei diesem einfachen Problem eine analytische Lösung der Riccati-Gleichung ableiten

$$P(t) = \sqrt{r} \frac{1 + e^{\frac{2(t+c)}{\sqrt{r}}}}{1 - e^{\frac{2(t+c)}{\sqrt{r}}}}.$$

Mit der obigen Randbedingung ergibt sich dann die Integrationskonstante $c = -T$, so dass wir schließlich folgende Lösung der Riccati-Gleichung bekommen

$$P(t) = \sqrt{r} \coth \frac{T-t}{\sqrt{r}}. \quad (12.23)$$

Die optimale Rückführung berechnet sich mittels (12.16) wie folgt

$$K(t) = \frac{\coth \frac{T-t}{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}. \quad (12.24)$$

Das optimale Regelgesetz lautet somit

$$u(t) = -\frac{\coth \frac{T-t}{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} x(t), \quad (12.25)$$

was für $r = 1$ der Lösung (10.43) von Abschn. 10.4 entspricht. \square

Beispiel 12.2 Wir betrachten das doppelintegrierende System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned}$$

das ähnlich wie in Beispiel 10.2 als vereinfachtes Fahrzeugmodell verstanden werden kann. Zur Überführung des Systemzustandes in endlicher Endzeit T vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0]^T$ in die Nähe der Endlage $[x_e \ 0]^T$ berücksichtige man die Minimierung des quadratischen Gütefunktional

$$J = \frac{1}{2} s_1 (x_1(T) - x_e)^2 + \frac{1}{2} s_2 x_2(T)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T q^2 (x_1(t) - x_e)^2 + u^2 dt \quad (12.26)$$

mit den Gewichtungsfaktoren $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $q \geq 0$. Dieses Gütefunktional bestraft neben den Abweichungen der Zustandsgrößen von ihren erwünschten Endwerten auch den Steueraufwand der Überführung.

Um die vorliegende Problemstellung in die Standardform der LQ-Problemstellung zu bringen, kann man für die erste Zustandsvariable die Transformation $\tilde{x}_1 = x_1 - x_e$ einführen. Die resultierenden System- und Gewichtungsmatrizen der Problemstellung lauten

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1. \quad (12.27)$$

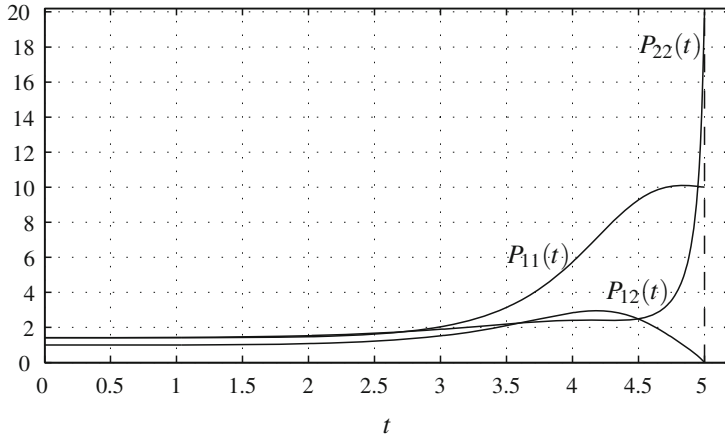


Abb. 12.2 Verlauf der Riccati-Elemente für Beispiel 12.2

Die Riccati-Gleichung (12.12) liefert mit diesen Werten folgenden Satz von drei verkoppelten Differentialgleichungen für die Elemente der symmetrischen Riccati-Matrix

$$\begin{aligned}\dot{P}_{11} &= P_{12}^2 - q^2; P_{11}(T) = s_1 \\ \dot{P}_{12} &= -P_{11} + P_{12}P_{22}; P_{12}(T) = 0 \\ \dot{P}_{22} &= -2P_{12} + P_{22}^2; P_{22}(T) = s_2.\end{aligned}$$

Zur Durchführung einer Rückwärtsintegration erhält man aus obigen Gleichungen mit $\tau = T - t$ und $d\tau = -dt$ folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{dP_{11}}{d\tau} &= -P_{12}^2 + q^2; P_{11}(0) = s_1 \\ \frac{dP_{12}}{d\tau} &= P_{11} - P_{12}P_{22}; P_{12}(0) = 0 \\ \frac{dP_{22}}{d\tau} &= 2P_{12} - P_{22}^2; P_{22}(0) = s_2.\end{aligned}$$

Abbildung 12.2 zeigt die Verläufe der Elemente der Riccati-Matrix für $T = 5$, $q = 1$, $s_1 = 10$, $s_2 = 20$, wie sie aus der numerischen Integration obigen Anfangswertproblems entstehen. Der zugehörige zeitvariante optimale Regler lautet mit (12.15)

$$u(t) = -P_{12}(t)\tilde{x}_1(t) - P_{22}(t)x_2(t) = -P_{12}(t)(x_1(t) - x_e) - P_{22}(t)x_2(t). \quad \square$$

12.2 Zeitinvarianter Fall

Die Lösung des letzten Abschnittes versetzt uns in die Lage, Regelgesetze für Prozesse zu entwickeln, die die in Abschn. 12.1 besprochenen Voraussetzungen erfüllen. Dies führt im Allgemeinen zu zeitvarianten Rückführmatrizen $\mathbf{K}(t)$, s. (12.16). In der regelungstechnischen Praxis ist es aber meistens ausreichend, und aus Aufwandsgründen auch erwünscht, zeitinvariante Regelgesetze zu entwickeln, die über unbeschränkte Zeit auf die entsprechenden Prozesse eingesetzt werden können. Es stellt sich daher die Frage, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen die Lösung des Abschn. 12.2 zu einer zeitinvarianten Rückführmatrix führt. Diese zusätzlichen Voraussetzungen, sowie die daraus resultierende zeitinvariante Lösung werden in diesem Abschnitt vorgestellt und erläutert.

Wir betrachten nun Problemstellungen der LQ-Optimierung, die zusätzlich zu den bisherigen Angaben folgende Voraussetzungen erfüllen:

- (i) Die Problemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} sind zeitinvariant.
- (ii) Die Endzeit ist unendlich: $T \rightarrow \infty$.
- (iii) Das System $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ ist vollständig steuerbar. Diese Voraussetzung wird eingeführt, um zu garantieren, dass das Gütefunktional trotz unendlicher Endzeit endlich groß bleibt. Wäre nämlich ein Zustand x_i , der im Gütefunktional enthalten ist, nicht steuerbar, so könnte ungeachtet der Steuertrajektorie $x_i(t \gg 0) = \bar{x}_i(t) \neq 0$ auftreten. Dies würde aber angesichts der unendlichen Endzeit bedeuten, dass der Wert des Gütefunktionals für alle möglichen Steuertrajektorien unendlich wäre, weshalb eine Optimierungsaufgabe keinen Sinn machen würde (s. auch Beispiel 12.6).
- (iv) Das System $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ ist vollständig beobachtbar, wobei die Matrix \mathbf{C} eine beliebige Matrix ist, die die Beziehung $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{Q}$ erfüllt. Diese Voraussetzung wird eingeführt, wenn asymptotische Stabilität für *alle* Zustandsvariablen des optimal geregelten Systems gesichert sein soll. Zum Verständnis dieser Anforderung denke man sich einen fiktiven Prozessausgang $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, wodurch sich mit obiger Annahme $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y}$ im Gütefunktional ergibt. Nun garantiert die Beobachtbarkeitsannahme, dass alle Zustandsvariablen im Ausgangsvektor \mathbf{y} und somit im Gütefunktional sichtbar bleiben. Als Konsequenz müssen also alle Zustandsvariablen zu Null geführt werden, wenn das Gütefunktional trotz unendlicher Endzeit endlich sein soll, woraus die asymptotische Stabilität resultiert, s. [6].

Beispiel 12.3 Die optimale Steuerung des Systems

$$\dot{x} = x + u; \quad x(0) = x_0$$

im Sinne der Minimierung von

$$J = \int_0^{\infty} u(t)^2 dt$$

lautet $u^*(t) = 0$, weil dadurch der minimale Wert des Gütefunktional $J^* = 0$ erreicht wird. Das resultierende optimal gesteuerte System

$$\dot{x} = x$$

ist offenbar instabil. Der Grund dieser Instabilität ist, dass die obige Voraussetzung (iv) verletzt wurde, da der Zustand x nicht im Gütefunktional enthalten ist. \square

Unter den getroffenen Voraussetzungen kann gezeigt werden [2, 5, 6], dass die Rückwärtsintegration der Riccati-Differentialgleichung (12.12) gegen einen stationären Wert $\bar{\mathbf{P}} \geq \mathbf{0}$ konvergiert, sofern für die Randbedingung (12.13) $\mathbf{P}(T) \geq \mathbf{0}$ erfüllt ist. Der stationäre Wert $\bar{\mathbf{P}}$ ist aber unabhängig von dem verwendeten Randwert $\mathbf{P}(T)$ und somit unabhängig von der Gewichtungsmatrix \mathbf{S} , was in Anbetracht der unendlichen Endzeit T nicht verblüffend erscheint.

Obige Eigenschaft verschafft uns eine Möglichkeit zur Berechnung der stationären Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}$, und zwar durch die Rückwärtsintegration der Riccati-Differentialgleichung (12.12) von einem beliebigen Randwert $\mathbf{P}(T) \geq \mathbf{0}$, z. B. $\mathbf{P}(T) = \mathbf{0}$, ausgehend, bis die Veränderungen der Matrixelemente P_{ij} eine vorbestimmte Toleranzgrenze unterschreiten. Alternativ kann aber $\bar{\mathbf{P}}$ auch durch Lösung der *stationären Riccati-Gleichung* gewonnen werden. Letztere erhält man aus $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ in (12.12), wodurch die Matrixgleichung

$$\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\bar{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (12.28)$$

entsteht. Da das Gleichungssystem (12.28) nichtlinear ist, kann es eine mehrdeutige Lösung besitzen; es kann aber gezeigt werden, dass es *genau eine* positiv semidefinite Lösung $\bar{\mathbf{P}} \geq \mathbf{0}$ aufweist, die somit der gesuchten stationären Riccati-Matrix entspricht. Weitere, teilweise komplexere, dafür aber rechentechnisch effektivere Verfahren zur Berechnung der stationären Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}$ sind aus der Literatur bekannt [7, 8].

Das mit $\bar{\mathbf{P}}$ entstehende optimale Regelgesetz der hier betrachteten Problemstellung ergibt sich aus (12.15) zu

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (12.29)$$

wobei

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}} \quad (12.30)$$

nunmehr eine *zeitinvariante Rückführmatrix* darstellt. Die gemäß (12.17) resultierende Systemmatrix $\mathbf{A}_{RK} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\bar{\mathbf{P}}$ des optimal geregelten Prozesses hat bei Erfüllung der Voraussetzungen (i)–(iv) dieses Abschnittes alle ihre Eigenwerte in der linken komplexen Halbebene und führt somit zu einem asymptotisch stabilen geregelten System. Der mittels des optimalen Regelgesetzes (12.29) resultierende minimale Wert des Gütefunktional (12.2) beträgt gemäß (12.18)

$$\bar{J}^* = \frac{1}{2}\mathbf{x}_0^T\bar{\mathbf{P}}\mathbf{x}_0. \quad (12.31)$$

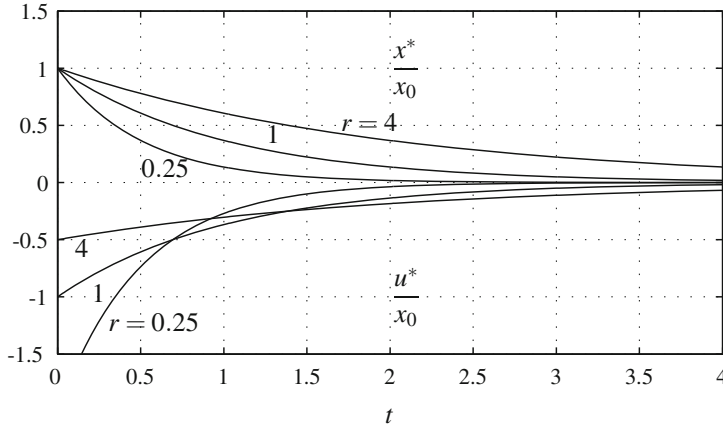


Abb. 12.3 Optimale Trajektorie für Beispiel 12.4

Beispiel 12.4 Wir wollen nun die Problemstellung des Beispiels 12.1 für unendliche Endzeit $T \rightarrow \infty$ behandeln. Da alle Voraussetzungen dieses Abschnittes erfüllt sind, kann der stationäre Wert des Riccati-Koeffizienten aus (12.23) bestimmt werden

$$\bar{P} = \lim_{T \rightarrow \infty} P(t) = \sqrt{r}. \quad (12.32)$$

Alternativ liefert die Lösung der stationären Riccati-Gleichung (12.28)

$$\frac{\bar{P}^2}{r} - 1 = 0$$

die nichtnegative Lösung $\bar{P} = \sqrt{r}$. Das zeitinvariante optimale Regelgesetz (12.29) lautet somit $u = -x/\sqrt{r}$ und es führt zu folgender Systemgleichung (12.17) des geregelten Systems

$$\dot{x} = -\frac{x}{\sqrt{r}}$$

mit dem Eigenwert $\lambda = -1/\sqrt{r} < 0$. Die resultierenden optimalen Trajektorien lauten also

$$x^*(t) = x_0 e^{-t/\sqrt{r}}; \quad u^*(t) = -\frac{x_0}{\sqrt{r}} e^{-t/\sqrt{r}}.$$

Abbildung 12.3 zeigt den Verlauf der optimalen Trajektorien für verschiedene Werte des Gewichtungsfaktors r . Es wird ersichtlich, dass die Wahl des Gewichtungsfaktors einen entscheidenden Einfluss auf die dynamischen Eigenschaften des geregelten Systems ausübt. Jede Erhöhung von r führt in der Tat zu einem geringeren und gleichmäßigeren Steueraufwand, begleitet von einer langsamer abklingenden Zustandsvariable $x(t)$. Die Extremfälle $r \rightarrow 0$ bzw. $r \rightarrow \infty$ führen erwartungsgemäß zu einer (technisch nicht realisierbaren) impulsartigen Steuerung bzw. zu einer (technisch irrelevanten) Nullsteuerung. \square

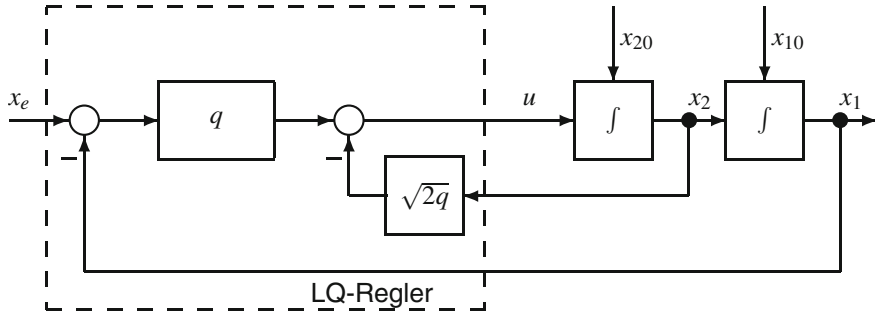


Abb. 12.4 Zustandsregler für Beispiel 12.5

Beispiel 12.5 Das doppelintegrierende System von Beispiel 12.2 wird unter dem gleichen Gütefunktional (12.26), nunmehr aber für unendlichen Zeithorizont $T \rightarrow \infty$ betrachtet. Steuer- und Beobachtbarkeitseigenschaften sind für dieses Beispiel gegeben, wie man sich leicht vergewissern kann. Mit den Matrizenwerten (12.27) ergibt die stationäre Riccati-Gleichung (12.28) das algebraische Gleichungssystem

$$-\bar{P}_{12}^2 + q^2 = 0, \quad \bar{P}_{11} - \bar{P}_{12}\bar{P}_{22} = 0, \quad 2\bar{P}_{12} - \bar{P}_{22}^2 = 0.$$

Die einzige Lösung dieses Gleichungssystems, die zu einer positiv semidefiniten Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}} \geq \mathbf{0}$ führt, lautet

$$\bar{P}_{11} = q\sqrt{2q}, \quad \bar{P}_{12} = q, \quad \bar{P}_{22} = \sqrt{2q}.$$

Es ist interessant festzustellen, dass diese Werte erwartungsgemäß für $q = 1$ den stationären Werten ($t = 0$) der Zeitverläufe von Abb. 12.2 entsprechen. Mit diesen Werten berechnet sich das optimale Regelgesetz (12.29) wie folgt

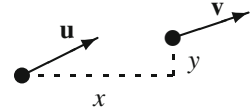
$$u = q(x_e - x_1) - \sqrt{2q} x_2.$$

Abbildung 12.4 visualisiert den resultierenden Regelkreis. Die Untersuchung des Übertragungsverhaltens des Regelkreises zeigt, dass es sich um ein dynamisches System 2. Ordnung (PT₂-System) handelt

$$\frac{x_1(p)}{x_e(p)} = \frac{q}{p^2 + \sqrt{2q}p + q}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \sqrt{q/2}(-1 \pm j)$. Diese Werte verdeutlichen, dass ungeachtet des q -Wertes der Regelkreis ein konstantes Dämpfungsverhalten aufweist (s. auch Übung 12.1). Der Wert des Gewichtungsfaktors q beeinflusst lediglich die Schnelligkeit des resultierenden Regelkreises. \square

Abb. 12.5 Zwei punktförmige Objekte



Für manche Anwendungen mögen die Voraussetzungen (iii) und/oder (iv) nicht erfüllt sein, wenn das betrachtete System nicht steuerbar und/oder nicht beobachtbar ist. Trotzdem kann in vielen dieser Fälle durch Rückwärtsintegration der Riccati-Differentialgleichung (12.12) eine zeitinvariante Rückführmatrix berechnet werden, die unter Umständen eine sinnvolle Regelung bewirkt, wie folgendes Beispiel demonstriert.

Beispiel 12.6 Ein punktförmiges Objekt bewegt sich im zweidimensionalen Raum mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]^T$. Ein zweites punktförmiges Objekt mit gesteuerter Geschwindigkeit $\mathbf{u} = [u_x \ u_y]^T$ soll das erste Objekt auffangen. Gesucht wird ein Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{R}(\mathbf{v}, x, y)$, das unter Nutzung aktueller Messwerte \mathbf{v}, x, y obiges Ziel anstrebt, wobei x bzw. y den horizontalen bzw. vertikalen Abstand der zwei Objekte bezeichnen (Abb. 12.5).

Zur Entwicklung des Regelgesetzes formulieren wir folgendes LQ-Problem:

Minimiere

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x(t)^2 + y(t)^2 + u_x(t)^2 + u_y(t)^2 dt \quad (12.33)$$

unter Berücksichtigung von

$$\dot{v}_x = 0 \quad (12.34)$$

$$\dot{v}_y = 0 \quad (12.35)$$

$$\dot{x} = v_x - u_x \quad (12.36)$$

$$\dot{y} = v_y - u_y. \quad (12.37)$$

Dieses Problem lässt sich offenbar in zwei gleiche, unabhängige LQ-Probleme, jeweils für die x - und y -Richtung, aufspalten. Das Problem der x -Richtung lautet:

Minimiere

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x(t)^2 + u_x(t)^2 dt$$

unter Berücksichtigung von (12.34), (12.36).

Offenbar sind die Zustandsvariablen v_x, v_y nicht steuerbar und die Voraussetzung (iii) somit nicht erfüllt. Trotzdem stellen wir mit den Problemmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die Riccati-Gleichungen auf

$$\dot{P}_{11} = -2P_{12} + P_{12}^2 \quad (12.38)$$

$$\dot{P}_{12} = -P_{22} + P_{22}P_{12} \quad (12.39)$$

$$\dot{P}_{22} = P_{22}^2 - 1 \quad (12.40)$$

mit der Randbedingung $\mathbf{P}(\infty) = \mathbf{0}$. Die Rückwärtsintegration von (12.39), (12.40) führt zu den stationären Werten $\overline{P}_{12} = 1$, $\overline{P}_{22} = 1$, während sich aus (12.38) kein endlicher stationärer Wert für P_{11} ergibt. In der Tat liefert die stationäre Version der Riccati-Gleichung (12.38)–(12.40) keine Lösung für $\overline{\mathbf{P}}$. Trotzdem wollen wir mittels (12.29) formal das Regelgesetz berechnen und erhalten

$$u_x(t) = \overline{P}_{12}v_x(t) + \overline{P}_{22}x(t) = v_x(t) + x(t). \quad (12.41)$$

Für das Regelgesetz der y -Richtung erhalten wir entsprechend

$$u_y(t) = v_y(t) + y(t). \quad (12.42)$$

Fassen wir nun die Erkenntnisse aus diesem Beispiel zusammen:

- (a) Der zu regelnde Prozess ist bezüglich der Zustandsgrößen v_x , v_y nicht steuerbar.
- (b) Die stationäre Riccati-Gleichung (12.28) hat zwar keine Lösung, aber die Rückwärtsintegration der Riccati-Gleichung liefert stationäre Werte für \overline{P}_{12} , \overline{P}_{22} , die ausreichend sind, um ein zeitinvariantes Regelgesetz (12.41) bzw. (12.42) zu erhalten.
- (c) Das Regelgesetz (12.41), (12.42) garantiert die asymptotische Stabilität der steuerbaren Zustandsvariablen x und y und erfüllt somit das gestellte Regelungsziel. \square

12.3 Rechnergestützter Entwurf

Während in den 50er Jahren die theoretischen Verfahren zum Entwurf *einschleifiger* Regelkreise im Frequenzbereich mit Erfolg eingesetzt wurden, war das Entwurfsproblem *mehrschleifiger* Regelkreise offen. Eine erste Schule von Wissenschaftlern und Ingenieuren konzentrierte ihre Anstrengungen auf die geeignete Erweiterung bekannter Verfahren des Frequenzbereichs auf den mehrdimensionalen Fall und entwickelte Methoden, die um den Preis eines unter Umständen beträchtlichen Entwurfsaufwandes erfolgreich angewandt werden konnten. Eine zweite Schule zog es vor, auf den Zeitbereich und auf die Optimierung zu setzen, wodurch der in diesem Kapitel vorgestellte LQ-Regler für mehrdimensionale Systeme entstand. Die beiden Schulen lieferten sich zeitweise in Kongressen und Publikationen Wortgefechte, die letztlich nützliche Entwicklungen in beiden Richtungen gefördert haben [9, 10].

Im Zusammenhang mit der LQ-Optimierung wurde die ursprüngliche Euphorie über die vermeintliche „Automatisierung des Reglerentwurfs“ gedämpft, als realisiert wurde,

dass ein mehrschleifiger Regelkreis erst dann als Lösung einer Optimierungsaufgabe automatisch resultiert, wenn die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{S} festgelegt wurden. Wie aber sollten diese Matrizen gewählt werden? Regelungstechnische Anforderungen betreffen üblicherweise Schnelligkeit, Überschwingverhalten, Robustheit und ähnliche Eigenschaften, die sich großteils nicht direkt auf entsprechende Werte der Gewichtungsmatrizen beziehen lassen. Die Festlegung der Gewichtungsmatrizen erfordert also meistens eine indirekte, rechnergestützte „trial-and-error“-Prozedur, die im Folgenden in groben Zügen skizziert werden soll. Aber auch andere systematischere Verfahren wurden in einer Vielzahl von Arbeiten entwickelt, s. [11] für eine Übersicht, s. auch [12] für einen Zusammenhang zwischen Gewichtungsmatrizen und Robustheit des resultierenden Regelkreises.

Wir richten unser Augenmerk auf LQ-Problemstellungen mit unendlicher Endzeit, die durch zeitinvariante Zustandsrückführung gelöst werden können. Obwohl diese Problemstellung formal als Optimierungsaufgabe eingeführt wurden, macht obige Diskussion klar, dass die dynamische Optimierung in diesem Zusammenhang keine Minimierung einer physikalisch bedeutungsvollen Größe anstrebt. Das quadratische Gütefunktional der LQ-Optimierung ist tatsächlich ein Vehikel zur Ableitung sinnvoller zeitinvarianter Zustandsrückführungen. Mangels direkter Entwurfsverfahren müssen also die Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} , \mathbf{R} interaktiv so festgelegt werden, dass die angestrebten regelungstechnischen Anforderungen Berücksichtigung finden. Eine mögliche Vorgehensweise für diese Festlegung ist durch folgende Schritte übersichtlich dargestellt [13]:

- (i) Die Systemmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} und die Problemspezifikationen bezüglich Einschwingzeiten, Überschwinger, Stell- und Zustandsgrößenbeschränkungen u. ä. werden festgehalten.
- (ii) Eine anfängliche Wahl der Gewichtungsmatrizen wird wie folgt getroffen

$$\mathbf{Q} = \text{diag} \left(\frac{1}{\hat{x}_i^2} \right), \quad \mathbf{R} = \text{diag} \left(\frac{1}{\hat{u}_i^2} \right),$$

wobei \hat{x}_i , \hat{u}_i geeignet normierte (z. B. maximal zulässige) Werte sind.

- (iii) Die zugehörigen Werte der Riccati-Matrix $\bar{\mathbf{P}}$ und der Rückführmatrix \mathbf{K} werden gegebenenfalls durch Rechneinsatz berechnet. Sodann wird das Regelkreisverhalten mittels Simulation anhand der grafischen Verläufe der Steuervariablen $\mathbf{u}(t)$ und der Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t)$ visualisiert.
- (iv) Gegebenenfalls wird unbefriedigendem Verhalten bestimmter Systemvariablen durch gezielte Veränderung der entsprechenden Gewichtungsfaktoren und erneute Durchführung von (iii) entgegengewirkt.
- (v) Die Schritte (iii) und (iv) werden so oft durchlaufen, bis befriedigendes Verhalten im Sinne der Spezifikationen von (i) erzielt wird.

Regelungstechnische Entwurfsumgebungen zur effizienten Durchführung obiger Schritte sind heute verfügbar. Die Qualität des Entwurfsergebnisses hängt allerdings nicht zuletzt von Geschick, Erfahrung und theoretischen Kenntnissen des Anwenders ab, so dass von einer Automatisierung des Reglerentwurfs nicht die Rede sein kann.

12.4 Robustheit zeitinvarianter LQ-Regler

Die Diskussion des letzten Abschnittes legt die Frage nahe, ob tatsächlich alle nur denkbaren (also auch technisch unsinnigen) Zustandsregler als optimale LQ-Regler im Sinne einer entsprechenden Festlegung der Gewichtungsmatrizen ableitbar sind. Anders ausgedrückt stellt sich die Frage, ob ungeachtet der verwendeten Gewichtungsmatrizen Zustandsregler, die mittels einer LQ-Optimierungsprozedur ermittelt wurden, ein gewisses Qualitätssiegel tragen, das sie von anderen Zustandsreglern unterscheidet. Eine positive Antwort auf diese Frage hat R.E. Kalman [9] zunächst für skalare Regler im Zusammenhang mit der Robusttheitseigenschaft geben können.

Mit welchem Verfahren auch immer, der Entwurf eines Reglers setzt das Vorhandensein eines mathematischen Prozessmodells voraus. Da mathematische Prozessmodelle nie exakt sein können, stellt sich dann aber die Frage, ob ein theoretisch entwickelter Regler, der für das Nominalmodell zufriedenstellendes Verhalten aufweist, auch in einer praktischen Umgebung, bei möglichen Variationen des Prozessverhaltens, Stabilität und Güte des Regelkreises garantieren kann. Dies ist die Frage nach der *Robustheit* eines Reglers.

Eine ausführliche Behandlung der Robusttheitseigenschaften von LQ-Reglern, die sinnvollerweise im Frequenzbereich erfolgen müsste, würde uns zu weit vom Hauptgegenstand dieses Buches wegführen. Wir wollen uns daher darauf beschränken, ohne Beweis festzuhalten, dass zeitinvariante LQ-Regelkreise mit *einer* (skalaren) Steuergröße u ungeachtet der Werte der Gewichtungsmatrizen folgende *Kalman-Ungleichung* erfüllen

$$|1 - F_0(j\omega)| \geq 1. \quad (12.43)$$

Hierbei ist $F_0(j\omega) = -\mathbf{k}^T(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ die Frequenzgangsfunktion des am u -Signal aufgeschnittenen (offenen) Regelkreises. Ungleichung (12.43) macht deutlich (s. Abb. 12.6), dass der Frequenzgang $-F_0(j\omega)$ außerhalb eines Einheitskreises um den kritischen Punkt $(-1, 0)$ verläuft und somit eine Phasenreserve von mindestens 60° und eine unendliche Amplitudenreserve aufweist. Analoge Eigenschaften können auch für den mehrdimensionalen Fall nachgewiesen werden [2, 5].

Beispiel 12.7 Für das doppelintegrierende dynamische System von Beispiel 12.5 wurde mittels der LQ-Prozedur ein zeitinvarianter Zustandsregler entworfen. Die Übertragungsfunktion des am Signal u aufgeschnittenen Regelkreises beträgt

$$F_0(j\omega) = -\frac{q + j\omega\sqrt{2q}}{(j\omega)^2}.$$

Auf der Grundlage dieser Übertragungsfunktion lässt sich die Gültigkeit der Ungleichung (12.43) leicht nachweisen

$$|1 - F_0(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{q}{\omega^2}\right)^2} \geq 1.$$

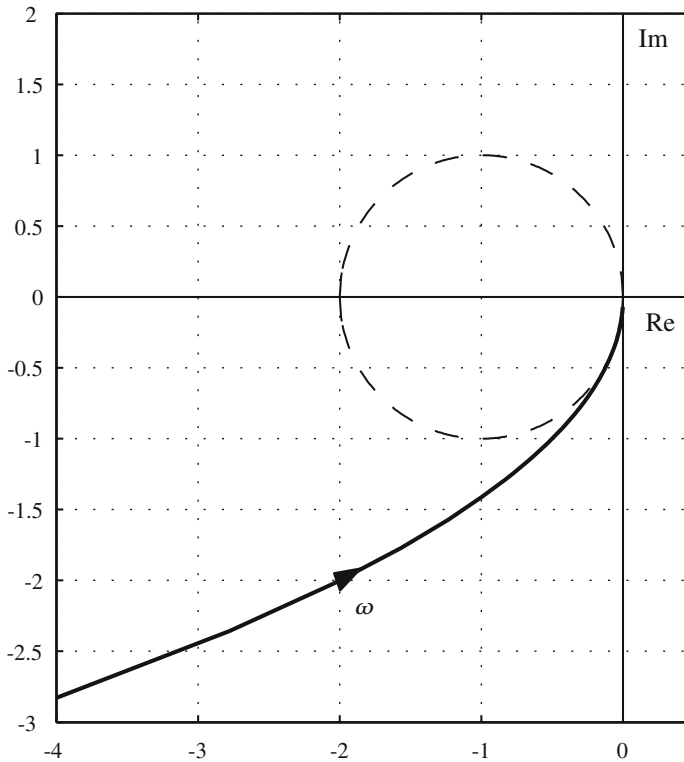


Abb. 12.6 Ortskurve des offenen Regelkreises für Beispiele 12.5, 12.7 für $q = 1$

Obige Ungleichung gilt offenbar für alle $q \geq 0$ und stellt somit eine strukturelle Eigenschaft des LQ-Reglers dar, s. auch Abb. 12.6. \square

12.5 LQ-Regler mit vorgeschriebener minimaler Stabilitätsreserve

Beispiele 12.4, 12.5 verdeutlichen, dass die aus dem Einsatz zeitinvarianter LQ-Regler resultierenden Regelkreise ihre Eigenwerte bei entsprechender Wahl der Gewichtungsmatrizen beliebig nahe an der imaginären Achse haben können. Wenn man es wünscht, so besteht aber auch die Möglichkeit, mittels der LQ-Prozedur Regelkreise zu entwerfen, die ungeachtet der verwendeten Gewichtungsmatrizen eine vorgeschriebene absolute *Stabilitätsreserve* nicht unterschreiten, d. h. dass für alle Eigenwerte Λ_i des Regelkreises die Ungleichung

$$\operatorname{Re}\{\Lambda_i\} < -\alpha \quad (12.44)$$

erfüllt ist, wobei $\alpha > 0$ die erwünschte minimale Stabilitätsreserve bezeichnet.

Obige Eigenschaft kann erreicht werden, wenn bei Berücksichtigung des linearen zeitinvarianten Prozessmodells

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (12.45)$$

folgendes modifizierte Gütefunktional anstelle von (12.2) zur Minimierung herangezogen wird

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{2\alpha t} \|\mathbf{x}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 dt . \quad (12.46)$$

Für $\alpha > 0$ hat dieses Gütefunktional offenbar die Eigenschaft, spätere Abweichungen von der Nulllage stärker zu bestrafen. Für die Matrizenpaare $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ bzw. $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$, mit $\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{Q}$, wird gemäß den Voraussetzungen von Abschn. 12.2 vollständige Steuer- bzw. Beobachtbarkeit vorausgesetzt.

Es kann nun gezeigt werden, dass die modifizierte Problemstellung der Minimierung von (12.46) unter Berücksichtigung von (12.45) und unter den Voraussetzungen von Abschn. 12.2 (zeitinvarianter Entwurf) auf die stationäre Standard-LQ-Problemstellung zurückgeführt werden kann. Um dies zu erreichen, führen wir folgende Substitutionsvariablen ein

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{u}(t)e^{\alpha t}, \quad \mathbf{x}_\alpha(t) = \mathbf{x}(t)e^{\alpha t}, \quad (12.47)$$

wodurch das Gütefunktional J_α aus (12.45) folgende quadratische Standardform erhält

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty \|\mathbf{x}_\alpha(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_\alpha(t)\|_{\mathbf{R}}^2 dt . \quad (12.48)$$

Ferner gilt wegen (12.47) $\dot{\mathbf{x}}_\alpha = \dot{\mathbf{x}}e^{\alpha t} + \alpha \mathbf{x}e^{\alpha t}$ und durch Einsetzen in die linearen Prozessnebenbedingungen (12.45) erhält man das modifizierte Modell

$$\dot{\mathbf{x}}_\alpha = (\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{x}_\alpha + \mathbf{B}\mathbf{u}_\alpha . \quad (12.49)$$

Aus der Definition (12.47) der Substitutionsvariablen ist es ersichtlich, dass die vollständige Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des ursprünglichen Problems auf die Matrizenpaare $[\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}, \mathbf{B}]$ und $[\mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}, \mathbf{C}]$ des modifizierten Problems übertragbar ist. Folglich stellt die Minimierung von (12.48) unter Berücksichtigung von (12.49) ein zeitinvariantes LQ-Problem dar, dessen Lösung folgendes optimales Regelgesetz ergibt

$$\mathbf{u}_\alpha(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}}_\alpha \mathbf{x}_\alpha(t) . \quad (12.50)$$

Hierbei ist $\bar{\mathbf{P}}_\alpha$ die Lösung der stationären Riccati-Gleichung des modifizierten Problems

$$\bar{\mathbf{P}}_\alpha \mathbf{A}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha^T \bar{\mathbf{P}}_\alpha - \bar{\mathbf{P}}_\alpha \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}}_\alpha + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (12.51)$$

mit der Systemmatrix $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}$ des modifizierten Prozessmodells (12.49). Durch Rücktransformation von (12.50) erhält man schließlich das gesuchte Regelgesetz in den ursprünglichen Variablen

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}}_\alpha \mathbf{x}(t). \quad (12.52)$$

Dieses Regelgesetz garantiert, dass die Ungleichung (12.44) für alle Pole des geregelten Originalsystems (12.45) erfüllt ist. Um dies zu sehen, beachte man zunächst, dass das Regelgesetz (12.50) gemäß Abschn. 6.2 für das modifizierte System (12.49) einen asymptotisch stabilen Regelkreis liefert, d. h. $\operatorname{Re}\{\lambda_{\alpha,i}\} < 0$. In Anbetracht der Beziehung $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\alpha(t)e^{-\alpha t}$ ist es dann aber klar, dass (12.44) für den Regelkreis des Originalsystems erfüllt sein muss.

Fassen wir nun die Schritte zusammen, die zum Entwurf eines zeitinvarianten LQ-Reglers mit minimaler Stabilitätsreserve führen:

- Festlegung der Problemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} und der erwünschten Stabilitätsreserve α .
- Lösung der modifizierten stationären Riccati-Gleichung (12.51).
- Berechnung des LQ-Reglers nach (12.52).

Beispiel 12.8 Man betrachte das dynamische System 1. Ordnung $\dot{x} = 2x + u$ und die Gewichtungsfaktoren $R = 1$ und $Q = q > 0$. Offenbar sind Steuer- und Beobachtbarkeit dieses Systems gewährleistet. Für eine minimale Stabilitätsreserve $\alpha > 0$ lautet die Systemmatrix der modifizierten Problemstellung $A_\alpha = 2 + \alpha$, so dass die modifizierte stationäre Riccati-Gleichung (12.51) folgende Beziehung liefert

$$\bar{P}_\alpha^2 - 2(2 + \alpha)\bar{P}_\alpha - q = 0.$$

Mit der nichtnegativen Wurzel obiger Gleichung

$$\bar{P}_\alpha = 2 + \alpha + \sqrt{(2 + \alpha)^2 + q}$$

ergibt sich gemäß (12.52) das Regelgesetz

$$u(t) = -\bar{P}_\alpha x(t).$$

Das geregelte System ist dann beschrieben durch

$$\dot{x}(t) = -\left(\alpha + \sqrt{(2 + \alpha)^2 + q}\right)x(t),$$

und für seinen reellen Eigenwert $\lambda = -\alpha - \sqrt{(2 + \alpha)^2 + q}$ gilt offenbar $\lambda < -\alpha$, ungeachtet der Werte von $\alpha > 0$ und $q > 0$. \square

Optimierung

Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die
Anwendung

Papageorgiou, M.; Leibold, M.; Buss, M.

2015, XIX, 538 S. 151 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-46935-4