Kapitel 2: Lineare Optimierung

Wir beginnen mit Definitionen und beschäftigen uns anschließend mit der graphischen Lösung von linearen Optimierungsproblemen mit zwei Variablen (Kap. 2.1 und 2.2). Neben verschiedenen Schreibweisen werden in Kap. 2.3 Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen behandelt; in Kap. 2.4 beschreiben wir das nach wie vor wichtigste Verfahren zu deren Lösung, den *Simplex-Algorithmus*, in verschiedenen Varianten. In Kap. 2.5 folgen Aussagen zur Dualität in der linearen Optimierung und zur Sensitivitätsanalyse. Kap. 2.6 behandelt Modifikationen des Simplex-Algorithmus (implizite Berücksichtigung oberer und unterer Schranken für Variablen, revidierter Simplex-Algorithmus). Probleme und Lösungsmöglichkeiten bei mehrfacher Zielsetzung werden in Kap. 2.7 dargestellt. Das Kapitel schließt in Kap. 2.8 mit Problemen der Spieltheorie, bei deren Lösung die Dualitätstheorie von Nutzen ist.

Für weiterführende Aspekte der linearen Optimierung verweisen wir exemplarisch auf folgende Literatur, die auch Grundlage der Ausführungen dieses Kapitels ist. Dantzig und Thapa (1997, 2003) legen eine umfassende Darstellung vor, an der mit George B. Dantzig ein Autor beteiligt ist, dem u.a. die Erfindung des Simplex-Algorithmus zugeschrieben wird. Gritzmann (2013) und Vanderbei (2014) befassen sich mit den mathematischen Grundlagen der linearen Optimierung und geben Beweise für die in diesem Kapitel in den Sätzen 2.1 bis 2.6 formulierten zentralen Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen und deren Lösungen an. Denardo (2011) geht gezielt auf Anwendungen der linearen Optimierung ein und stellt die ökonomische Interpretation der Ergebnisse von Optimierungsrechnungen in den Mittelpunkt.

Allgemein enthalten angloamerikanische Grundlagenbücher zum OR sehr umfangreiche Einführungen in die lineare Optimierung, die darauf abzielen, die im Folgenden dargestellten Sachverhalte vorrangig durch die Verwendung von Beispielen herzuleiten. Sie verzichten dabei häufig auf eine formale Schreibweise (vgl. z.B. Winston (2004, Kap. 3 und 4) sowie Hillier und Lieberman (2015, Kap. 3 und 4)).

Die am Ende des Kapitels als weiterführend angegebene Literatur widmet sich in der Regel dezidiert einzelnen der im Folgenden behandelten Teilgebiete der linearen Optimierung und diskutiert entsprechend einzelne Aspekt vertieft.

2.1 Definitionen

Definition 2.1: Unter einem **linearen Optimierungs-** oder **Programmierungsproblem (LP-Problem** oder kürzer **LP)** versteht man die Aufgabe, eine *lineare (Ziel-) Funktion*

$$F(x_1,...,x_p) = c_1 x_1 + ... + c_p x_p \tag{2.1}$$

zu maximieren (oder zu minimieren) unter Beachtung von linearen Nebenbedingungen (= Restriktionen) der Form

W. Domschke et al., *Einführung in Operations Research*,
DOI 10.1007/978-3-662-48216-2_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

$$a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ip}\, x_p \le b_i \qquad \text{für } i = 1,\ldots,m_1 \tag{2.2}$$
$$a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ip}\, x_p \ge b_i \qquad \text{für } i = m_1+1,\ldots,m_2 \tag{2.3}$$
$$a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ip}\, x_p = b_i \qquad \text{für } i = m_2+1,\ldots,m \tag{2.4}$$

und zumeist unter Berücksichtigung der *Nichtnegativitätsbedingungen*

$$x_j \ge 0 \qquad \text{für (einige oder alle) } j = 1,\ldots,p \tag{2.5}$$

Definition 2.2:

a) Einen Punkt (oder Vektor) $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_p)$ des $\mathbb{R}^p$, der alle Nebenbedingungen (2.2) – (2.4) erfüllt, nennt man **Lösung** des LPs.

b) Erfüllt **x** außerdem (2.5), so heißt **x zulässige Lösung** (zulässiger Punkt) des LPs.

c) Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_p^*)$ heißt **optimale Lösung** (optimaler Punkt) des LPs, wenn es kein zulässiges **x** mit größerem (bei einem Maximierungsproblem) bzw. mit kleinerem (bei einem Minimierungsproblem) Zielfunktionswert als $F(\mathbf{x}^*)$ gibt.

d) Mit X bezeichnen wir die *Menge der zulässigen Lösungen*, mit X^* die *Menge der optimalen Lösungen* eines LPs.

2.2 Graphische Lösung von linearen Optimierungsproblemen

Wir betrachten das folgende **Produktionsplanungsproblem**, das als LP formuliert und gelöst werden kann.

Ein Unternehmen kann aufgrund seiner Ausstattung mit Personal, Betriebsmitteln und Rohstoffen in einer Planperiode zwei Produkte P_1 und P_2 herstellen. Die realisierbaren Mengeneinheiten (ME) der Produkte werden durch drei Inputfaktoren begrenzt:

1. Eine zur Herstellung aller Produkte gemeinsam genutzte Maschine, für die lediglich zeitliche Abschreibungen zu tätigen sind. Ihre Nutzung für die Produktion verursacht somit keine Einzelkosten.
2. Einen verderblichen[1] Rohstoff, von dem sich 720 ME auf Lager befinden; ein am Ende der Periode verbleibender Rest ist nicht verwertbar.
3. Knappe Kapazitäten in der Montageabteilung für P_2.

Die pro Periode verfügbaren Kapazitätseinheiten (KE) und Bedarfe je hergestellter ME (Produktionskoeffizienten) sowie die Deckungsbeiträge db_j sind Tab. 2.1 zu entnehmen.

Wie viele ME soll das Unternehmen pro Periode von jedem Produkt herstellen, damit es einen größtmöglichen Gesamtdeckungsbeitrag (DB) erzielt?

1 Die Annahmen „lediglich zeitliche Abschreibungen“ und „verderblicher Rohstoff“ für die beiden ersten Engpassfaktoren sind im Rahmen der Bewertung optimaler Lösungen in Kap. 2.5.3 von Bedeutung; siehe dort v.a. Bem. 2.11.

	P_1	P_2	verfügbare Kapazität
Maschine	1	1	100
Rohstoff	6	9	720
Montageabteilung	0	1	60
db_j	10	20	

Tab. 2.1

Zur mathematischen Formulierung des Problems wählen wir folgende Variablen:

x_1: von P_1 herzustellende ME
x_2: von P_2 herzustellende ME

Damit erhalten wir das folgende Modell:

$$\text{Maximiere } F(x_1,x_2) = 10x_1 + 20x_2 \tag{2.6}$$

unter den Nebenbedingungen

$$x_1 + x_2 \le 100 \quad \text{Maschinenrestriktion} \tag{2.7}$$
$$6x_1 + 9x_2 \le 720 \quad \text{Rohstoffrestriktion} \tag{2.8}$$
$$x_2 \le 60 \quad \text{Montagerestriktion} \tag{2.9}$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{2.10}$$

Wir wollen das Problem graphisch lösen. Dazu überlegen wir uns, welche Punkte **x** hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung (siehe den schraffierten Bereich in Abb. 2.1 für die Nebenbedingung (2.7)) und hinsichtlich aller Nebenbedingungen (siehe X in Abb. 2.2) zulässig sind.

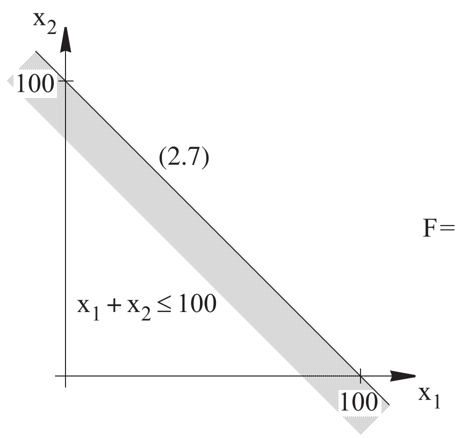

Abb. 2.1

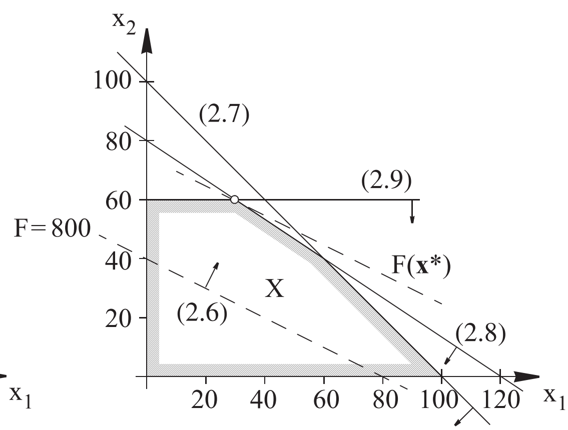

Abb. 2.2

Den zulässigen Bereich bzgl. Nebenbedingung (2.7) etwa erhalten wir, indem wir uns zunächst überlegen, welche Punkte die Bedingung als Gleichung erfüllen. Es handelt sich um alle Punkte auf der Geraden, die durch **x** = (100,0) und **x** = (0,100) verläuft. Ferner erfüllt der Ursprung (0,0) die gegebene Ungleichung, so dass wir den schraffierten Halbraum erhalten.

Die Menge X in Abb. 2.2 ist der Durchschnitt der für alle Nebenbedingungen einschließlich der Nichtnegativitätsbedingungen ermittelbaren zulässigen Lösungen.

Danach zeichnen wir eine Gerade gleichen Gesamtdeckungsbeitrags (Höhenlinie der Zielfunktion, hier eine Iso-DB-Linie), z.B. für F = 800.

Gesucht ist ein Punkt, für den ein maximaler DB erzielt wird. Daher ist die Höhenlinie der Zielfunktion so lange parallel (in diesem Fall nach rechts oben) zu verschieben, bis der zulässige Bereich gerade noch berührt wird. Auf diese Weise erhalten wir die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*) = (30, 60)$ mit dem minimalen Deckungsbeitrag von $F^* = F(\mathbf{x}^*) = 1500$ GE.

Als zweites **Beispiel** wollen wir das folgende (stark vereinfachte – Agrarwissenschaftler mögen uns verzeihen!) *Mischungsproblem* betrachten und graphisch lösen:

Ein Viehzuchtbetrieb füttert Rinder mit zwei tiermehlfreien Futtersorten S_1 und S_2 (z.B. Rüben und Heu). Die Tagesration eines Rindes muss Nährstoffe I, II bzw. III im Umfang von mindestens 6, 12 bzw. 4 Gramm enthalten. Die Nährstoffgehalte in Gramm pro kg und Preise in GE pro kg der beiden Sorten zeigt Tab. 2.2.

	Sorte S_1	Sorte S_2	Mindest-menge
Nährstoff I	2	1	6
Nährstoff II	2	4	12
Nährstoff III	0	4	4
Preis in GE/kg	5	7	

Tab. 2.2

Wie viele kg von Sorte S_1 bzw. S_2 muss jede Tagesration enthalten, wenn sie unter Einhaltung der Nährstoffbedingungen kostenminimal sein soll?

Mit den Variablen

x_1 : kg von Sorte S_1 pro Tagesration

x_2 : kg von Sorte S_2 pro Tagesration

lautet das Optimierungsproblem:

Minimiere $F(x_1,x_2) = 5x_1 + 7x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 6 & \text{Nährstoff I} \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 12 & \text{Nährstoff II} \\ & & 4x_2 & \geq & 4 & \text{Nährstoff III} \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

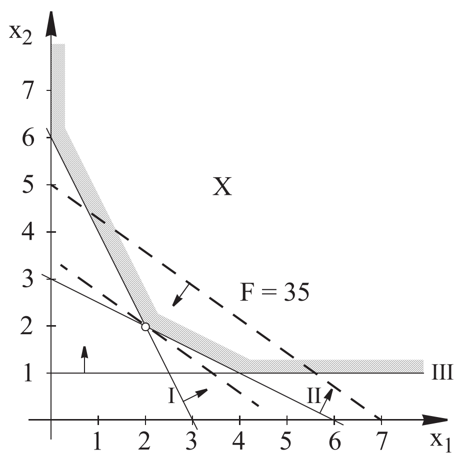

Abb. 2.3

Auf graphische Weise (siehe Abb. 2.3) erhalten wir die optimale Lösung $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ mit $x_1^* = x_2^* = 2$. Eine Tagesration kostet damit $F(\mathbf{x}^*) = 24$ GE.

2.3 Formen und Eigenschaften von LPs

2.3.1 Optimierungsprobleme mit Ungleichungen als Nebenbedingungen

Jedes beliebige LP lässt sich in der folgenden Form aufschreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Maximiere } F(x_1,\dots,x_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} c_j x_j & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \le b_i & \text{für } i = 1,\dots,m \\ \qquad x_j \ge 0 & \text{für } j = 1,\dots,p \end{array}\right\} \quad (2.11)$$

Jedes beliebige LP lässt sich *auch* wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Minimiere } F(x_1,\dots,x_p) = \sum\limits_{j=1}^{p} c_j x_j & \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \ge b_i & \text{für } i = 1,\dots,m \\ \qquad x_j \ge 0 & \text{für } j = 1,\dots,p \end{array}\right\} \quad (2.12)$$

Die Aussagen gelten aufgrund folgender Überlegungen:

- Eine zu minimierende Zielfunktion $F(\mathbf{x})$ lässt sich durch die zu maximierende Zielfunktion $-F(\mathbf{x})$ ersetzen und umgekehrt, d.h. der Koeffizientenvektor ist mit -1 zu multiplizieren. Eine $\le$ - Nebenbedingung lässt sich durch Multiplikation beider Seiten mit -1 in eine $\ge$ - Restriktion transformieren.
- Eine Gleichung $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$ lässt sich durch zwei Ungleichungen ersetzen: $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \le b_i$ und $-a_{i1}x_1 - \dots - a_{ip}x_p \le -b_i$
- Falls eine Variable x_j beliebige Werte aus $\mathbb{R}$ annehmen darf, so kann man sie durch zwei Variablen $x_j' \ge 0$ und $x_j'' \ge 0$ substituieren; dabei gilt $x_j := x_j' - x_j''$. Vgl. hierzu Aufgabe 2.6 im Übungsbuch Domschke et al. (2015).

2.3.2 Die Normalform eines linearen Optimierungsproblems

Erweitert man die Nebenbedingungen (2.2) und (2.3) um **Schlupfvariablen** $x_{p+1},\dots,x_n$, die in der Zielfunktion (2.1) mit 0 bewertet werden, so entsteht aus (2.1) – (2.5) das folgende Modell:

$$\text{Maximiere } F(x_1,\dots,x_p,x_{p+1},\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{p} c_j \cdot x_j + \sum_{j=p+1}^{n} 0 \cdot x_j$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + x_{p+i} = b_i \qquad \text{für } i = 1,\ldots,m_1$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j - x_{p+i} = b_i \qquad \text{für } i = m_1+1,\ldots,m_2$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i \qquad \text{für } i = m_2+1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n$$

Die ursprünglichen Variablen $x_1,\ldots,x_p$ des Problems bezeichnet man als **Strukturvariablen**. Wiedergegeben in der Form (2.13), spricht man von der **Normalform eines LPs**.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \text{für } i = 1,\ldots,m \\ \qquad x_j \ge 0 \qquad \text{für } j = 1,\ldots,n \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

Im Folgenden verwenden wir für LPs auch die **Matrixschreibweise**; für ein Problem in der Normalform (2.13) sieht sie wie folgt aus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \qquad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (2.14)$$

Dabei sind **c** und **x** jeweils n-dimensionale Vektoren; **b** ist ein m-dimensionaler Vektor und A eine $(m \times n)$-Matrix. Im Allgemeinen gilt $n \ge m$ und oft $n \gg m$; siehe auch Kap. 2.6.2.

Definition 2.3: Gelten in (2.14) für die Vektoren **b** und **c** sowie die Matrix A die Eigenschaften

$$\mathbf{b} \ge \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_{n-m} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,n-m} & 1 & & 0 \\ . & & . & & . & \\ . & & . & & & . \\ . & & . & & & \quad . \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-m} & 0 & & 1 \end{array}\right],$$

so sagt man, das LP besitze **kanonische Form**.

2.3.3 Eigenschaften von linearen Optimierungsproblemen

Wir beschäftigen uns im Folgenden vor allem mit Eigenschaften der Menge aller zulässigen Lösungen X und aller optimalen Lösungen X^* eines LPs. Dabei setzen wir die Begriffe „beschränkte Menge“, „unbeschränkte Menge“ sowie „lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren“ als bekannt voraus; siehe dazu etwa Merz und Wüthrich (2013, Kap. 7) sowie Opitz und Klein (2014, Kap. 12.4). Wir definieren aber zu Beginn, was man unter einer konvexen Linearkombination von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ und einem Eckpunkt oder Extrempunkt (einer Menge) versteht.

Definition 2.4: Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn mit je zwei Punkten $\mathbf{x}^1 \in K$ und $\mathbf{x}^2 \in K$ auch jeder Punkt $\mathbf{y} = \lambda \cdot \mathbf{x}^1 + (1-\lambda) \cdot \mathbf{x}^2$ mit $0 < \lambda < 1$ zu K gehört.

Die **konvexe Hülle** H einer beliebigen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist die kleinste K enthaltende konvexe Menge.

Beispiele: Man betrachte die in den Abbildungen 2.4 und 2.5 dargestellten Mengen K.

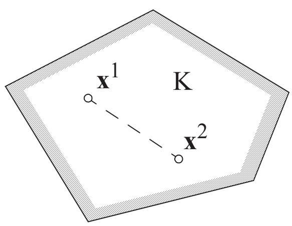

Abb. 2.4

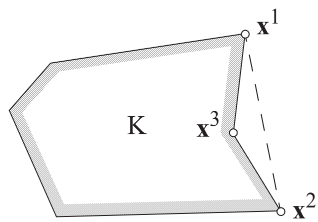

Abb. 2.5

Def. 2.4 besagt, dass mit zwei beliebigen Punkten $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ einer konvexen Menge K auch alle Punkte auf der Strecke zwischen $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ zu K gehören. Die in Abb. 2.4 dargestellte Menge ist daher konvex. Die in Abb. 2.5 dargestellte Menge ist dagegen nicht konvex, da z.B. die Punkte der $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ verbindenden Strecke nicht zu ihr gehören. Die konvexe Hülle H besteht hier aus der Vereinigung von K mit allen Punkten des von $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$ aufgespannten Dreiecks.

Definition 2.5: Seien $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^r$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ nichtnegative reelle Zahlen (also Werte aus $\mathbb{R}_+$). Setzt man $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ voraus, so wird $\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \mathbf{x}^i$ als **konvexe Linearkombination** oder **Konvexkombination** der Punkte $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^r$ bezeichnet.

Eine **echte konvexe Linearkombination** liegt vor, wenn außerdem $\lambda_i > 0$ für alle i = 1,...,r gilt.

Definition 2.6: Die Menge aller konvexen Linearkombinationen endlich vieler Punkte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^r$ des $\mathbb{R}^n$ wird (durch diese Punkte aufgespanntes) **konvexes Polyeder** genannt.

Bemerkung 2.1: Das durch r Punkte aufgespannte konvexe Polyeder ist identisch mit der konvexen Hülle der aus diesen Punkten bestehenden Menge.

Definition 2.7: Ein Punkt **y** einer konvexen Menge K heißt **Eckpunkt** oder **Extrempunkt** von K, wenn er sich nicht als *echte* konvexe Linearkombination zweier verschiedener Punkte $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ von K darstellen lässt.

Bemerkung 2.2: Ein konvexes Polyeder enthält endlich viele Eckpunkte.

Beispiele:

a) Man betrachte Abb. 2.6. Das Dreieck zwischen den Eckpunkten $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$ ist das durch diese Punkte aufgespannte konvexe Polyeder. Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x_1,x_2)$ im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten $x_1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot 0$ und $x_2 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 3$ (mit $\lambda_i \geq 0$ für alle i = 1, 2, 3 und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$) ist konvexe Linearkombination von $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ und $\mathbf{x}^3$.

b) Die in Abb. 2.7 dargestellte Menge K ist konvex; wegen ihrer Unbeschränktheit ist sie jedoch kein konvexes Polyeder.

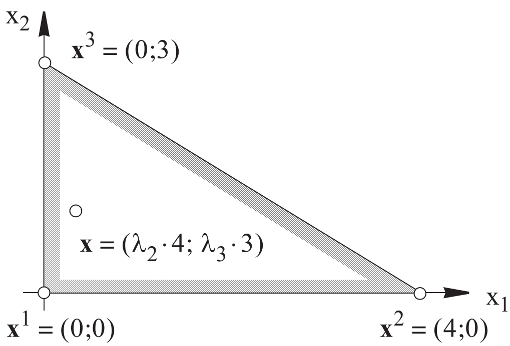

Abb. 2.6

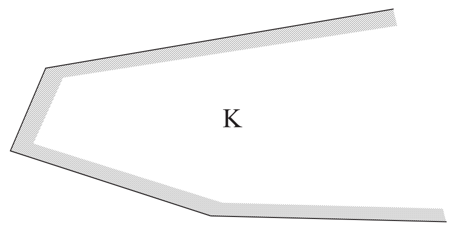

Abb. 2.7

Wir formulieren nun einige wichtige Sätze. Beweise hierzu findet man beispielsweise in Neumann und Morlock (2002, S. 43 ff.) sowie Opitz und Klein (2014, Kap. 16.3).

Satz 2.1: Gegeben sei ein LP, z.B. in der Normalform (2.13). Es gilt:

a) Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen der Nebenbedingungen zulässigen Lösungen ist konvex.

b) Die Menge X aller zulässigen Lösungen des Problems ist als Durchschnitt konvexer Mengen ebenfalls konvex mit endlich vielen Eckpunkten.

Satz 2.2: Eine lineare Funktion F, die auf einem konvexen Polyeder X definiert ist, nimmt ihr Optimum, d.h. Minimum oder Maximum, in mindestens einem Eckpunkt des Polyeders an.

Bemerkung 2.3: Man kann zeigen, dass auch bei einem unbeschränkten zulässigen Bereich X eines LPs mindestens eine Ecke von X optimale Lösung ist, falls überhaupt eine optimale Lösung des Problems existiert. Daher kann man sich bei der Lösung von LPs auf die Untersuchung der Eckpunkte des zulässigen Bereichs beschränken.

Satz 2.3: Die Menge X^* aller optimalen Lösungen eines LPs ist konvex.

In Def. 2.8 geben wir eine präzise, aber für die meisten Leser sicher nicht sehr anschauliche Definition des Begriffs „Basislösung". Anschaulicher, aber nicht ganz zutreffend gilt:
Eine *Basislösung* für ein $(m \times n)$-Problem in Normalform erhält man, indem man $n-m$ Variablen (wir bezeichnen sie unten als Nichtbasisvariablen) gleich 0 setzt und mit den restlichen m Variablen (Basisvariablen) das verbleibende Gleichungssystem löst.

Definition 2.8:

a) Gegeben sei ein LP in der Normalform (2.13) mit m' als Rang der $(m \times n)$-Matrix A (Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren) mit $n \geq m \geq m'$. Eine Lösung **x** heißt **Basislösung** des Problems, wenn $n-m'$ der Variablen x_i gleich null und die zu den restlichen Variablen gehörenden Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ linear unabhängig sind.

b) Eine Basislösung, die alle Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Basislösung**.

c) Die m' (ausgewählten) linear unabhängigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ einer (zulässigen) Basislösung heißen **Basisvektoren**; die zugehörigen x_j nennt man **Basisvariablen**. Alle übrigen Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ heißen **Nichtbasisvektoren**; die zugehörigen x_j nennt man **Nichtbasisvariablen**.

d) Die Menge aller Basisvariablen x_j einer Basislösung bezeichnet man kurz als **Basis**.

Bemerkung 2.4: Bei den meisten der von uns betrachteten Probleme gilt $m' = m$. Insbesondere der in Kap. 2.5.2 behandelte Sonderfall 4 sowie das klassische Transportproblem in Kap. 4.1 bilden Ausnahmen von dieser Regel.

Satz 2.4: Ein Vektor **x** ist genau dann zulässige Basislösung eines LPs, wenn er einen Eckpunkt von X darstellt.

Beispiel: Das Problem (2.6) – (2.10) besitzt, in Normalform gebracht, folgendes Aussehen:

Maximiere $F(x_1,...,x_5) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 100 \\
6x_1 & + & 9x_2 & & & + & x_4 & & & = & 720 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 60 \\
 & & & & & & & & x_1,...,x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

In Abb. 2.8 sind sämtliche Basislösungen (BL) A bis J dargestellt, die sich anschaulich als Schnittpunkte von Nebenbedingungsgeraden und/oder den Koordinatenachsen ergeben. Die Vektoren A bis E sind zulässige BL mit jeweils drei Basisvariablen (BV) und zwei Nichtbasisvariablen (NBV), da sie keine negativen Komponenten aufweisen. Jede dieser BL entspricht einem Eckpunkt des Polyeders der zulässigen Lösungen.

Eckpunkt	BV	NBV	BL $(x_1,...,x_5)$
A = (0,0)	x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	(0,0,100,720,60)
B = (0,60)	x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	(0,60,40,180,0)
C = (30,60)	x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	(30,60,10,0,0)
D = (60,40)	x_1, x_2, x_5	x_3, x_4	(60,40,0,0,20)
E = (100,0)	x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	(100,0,0,120,60)
F = (0,100)	x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	(0,100,0,–180,–40)
G = (0,80)	x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	(0,80,20,0,–20)
H = (40,60)	x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	(40,60,0,–60,0)
J = (120,0)	x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	(120,0,–20,0,60)

Tab. 2.3

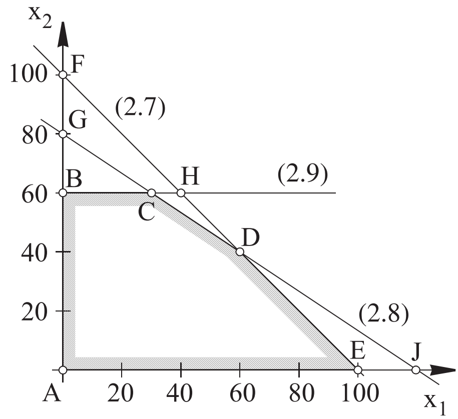

Abb. 2.8

2.4 Der Simplex-Algorithmus

Wir beschreiben im Folgenden den Simplex-Algorithmus.[2] Er wird zumeist **G.B. Dantzig** zugeschrieben, der die Vorgehensweise im Jahre 1947 veröffentlichte. Erste Arbeiten dazu stammen jedoch von dem russischen Mathematiker **L.V. Kantorovich** aus dem Jahre 1939.

Der Simplex-Algorithmus untersucht, wie unten deutlich wird, den Rand des zulässigen Bereichs nach einer optimalen Lösung und zählt nach wie vor zu den leistungsfähigsten Verfahren zur Lösung von LPs der Praxis. Im Gegensatz dazu suchen so genannte **Interior Point - Methoden**, ausgehend von einer im Inneren des zulässigen Bereichs liegenden Lösung, nach einer optimalen Lösung. Zu den bekanntesten Vorgehensweisen dieser Art gehören die *Ellipsoid-Methode* von Khachijan (1979) und die *projektive Methode* von Karmarkar (1984). Sie sind zwar hinsichtlich des Rechenzeitbedarfs im ungünstigsten Fall,[3] aber zumeist nicht im durchschnittlichen Laufzeitverhalten dem Simplex-Algorithmus überlegen. Interior Point-Methoden werden z.B. in Ye (1997), Dantzig und Thapa (1997, Kap. 4), Schrijver (1998), Dantzig und Thapa (2003, Kap. 3 und 4), Hamacher und Klamroth (2006, Kap. 4) sowie Bazaraa et al. (2010, Kap. 8) ausführlich dargestellt.

Wir beschreiben im Folgenden verschiedene Varianten des Simplex-Algorithmus, jeweils für **Maximierungsprobleme**. Wir beginnen mit dem *primalen* Simplex-Algorithmus, der von einer bekannten zulässigen Basislösung ausgeht. In Kap. 2.4.2 beschäftigen wir uns mit Vorgehensweisen zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung. Neben der M-Methode beschreiben

2 Der Name Simplex-Algorithmus ist von der Bezeichnung **Simplex** für ein durch n+1 Punkte des $\mathbb{R}^n$ aufgespanntes konvexes Polyeder abgeleitet.

3 Zur Abschätzung des Rechenaufwands des Simplex-Algorithmus vgl. z.B. Papadimitriou und Steiglitz (1982, S. 166 ff.) oder Borgwardt (2001, Kap. 9). In Klee und Minty (1972) findet sich ein Beispiel, für das der Simplex-Algorithmus nichtpolynomialen Rechenaufwand erfordert. Zur Komplexität allgemein siehe auch Kap. 6.2.1.

http://www.springer.com/978-3-662-48215-5

Einführung in Operations Research
Domschke, W.; Drexl, A.; Klein, R.; Scholl, A.
2015, XVI, 276 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-48215-5