Kapitel 2
Einführung in die Lineare Optimierung

Die Lineare Optimierung, auch lineare Programmierung genannt, ist ein wichtiges Teilgebiet des Operations Research. In diesem Kapitel wird zunächst die Geometrie solcher Probleme untersucht und dann ein in der Praxis weit verbreitetes Lösungsverfahren, der so genannte Simplex-Algorithmus, vorgestellt.

lineare Programmierung

Lineare Optimierungsprobleme liegen vor, wenn sowohl die Zielfunktion als auch die Restriktionen linear sind. Die lineare Optimierung wird aus folgenden Gründen in der Praxis häufig eingesetzt:

Vorteile der linearen Optimierung

- lineare Modelle der relevanten Umwelt werden wegen ihrer „Einfachheit“ häufig gegenüber nichtlinearen Ansätzen vorgezogen,
- lineare Optimierungsprobleme können durch endliche Verfahren, d.h. durch eine endliche Zahl algebraischer Operationen, gelöst werden und
- es gibt fertige Softwarepakete zur Lösung von großen Problemen mit vielen tausend Variablen und Nebenbedingungen.

Erwähnt sei noch, dass bei Problemen mit sehr vielen Unbekannten und Restriktionen zur Verringerung des numerischen Aufwandes zunehmend *iterative Lösungsverfahren*, wie z.B. die Ellipsoid-Methode von Khachiyan und die projektive Methode von Karmarkar (eine so genannte Innere-Punkt-Methode), eingesetzt werden.

iterative Lösungsverfahren

R. Schwenkert, Y. Stry, *Operations Research kompakt,*
DOI 10.1007/978-3-662-48397-8_2,

2.1 Beispiele und graphische Lösung

Die Aufgaben der linearen Optimierung — Modellierung und Lösung — sollen zunächst an Beispielen unter Verwendung der graphischen Lösungsmethode erläutert werden. Dies gibt Aufschluss über wichtige geometrische Eigenschaften, die Grundlage für das Simplexverfahren sind.

Untersucht wird zuerst ein typisches, häufig in der Praxis vorkommendes Problem, die „Gewinnmaximierung“.

Beispiel 2.1

Gewinnmaximierung

Wir betrachten einen Weinproduzenten, der über 100 ha Rebfläche und eine Kapazität von 1.300 Arbeitsstunden (AS) pro Jahr verfügt. Der Winzer hat die Option, zwei Rotweine herzustellen: einen teuren Barrique-Wein und eine billigere Cuvée, von denen er jeweils maximal 50 bzw. 160 Fässer verkaufen kann. Der Produktionsaufwand pro Fass beträgt:

- für den Barrique: 1 ha Rebfläche und 20 AS/Jahr,
- für die Cuvée: $0,5$ ha Rebfläche und 5 AS/Jahr.

Der Verkauf eines Barrique-Fasses bringt einen Gewinn von 5.000 €, während am Cuvée-Fass 1.500 € zu verdienen sind. Der Önologe will nun wissen, wie viele Fässer er von der jeweiligen Sorte absetzen muss, um seinen Gewinn zu maximieren.

lineares Modell

Die Lösung kann durch Aufstellen eines linearen Modells, das man als *lineares Programm* bezeichnet, ermittelt werden. Dazu führen wir für die gesuchten Absatzmengen zwei so genannte *Entscheidungsvariablen* ein: Die Anzahl der zu verkaufenden Fässer

Entscheidungsvariablen

- für den Barrique-Wein sei x_1
- und für die Cuvée x_2.

Der jährliche Gewinn (in €) ergibt sich dann durch die so genannte Zielfunktion

Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = 5.000x_1 + 1.500x_2.$$

Berücksichtigung von Restriktionen bzw. Nebenbedingungen

Der Weinproduzent muss also das absolute Maximum von $f(x_1, x_2)$ ermitteln. Dabei hat er jedoch die Marktkapazitäten (maximal absetzbare Mengen pro Produkt)

$$x_1 \leq 50 \qquad \text{und} \qquad x_2 \leq 160$$

zu berücksichtigen. Ferner muss er

Kapazitätsschranken

- die nutzbaren Rebflächen, d.h. $1 \cdot x_1 + 0,5x_2 \leq 100$, und

- die verfügbaren Arbeitsstunden, d.h. $20x_1 + 5x_2 \leq 1.300$

in die Berechnung mit einbeziehen. Da die Absatzmengen nicht negativ sein können, müssen sinnvollerweise auch die beiden so genannten *Nichtnegativitätsbedingungen*

Nicht-negativitäts-bedingungen

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

gefordert werden. (Es sei darauf hingewiesen, dass die korrekten Restriktionen eigentlich $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ wären. Damit hätte man aber ein Problem der *ganzzahligen Optimierung* modelliert, das hier nicht betrachtet werden soll.) Der Winzer kann sein ökonomisches Ziel der Gewinnmaximierung nun durch Lösung der folgenden linearen Optimierungsaufgabe bzw. des folgenden linearen Programm erreichen ($\vec{x} = (x_1, x_2)^T$):

lineares Programm

$$\begin{array}{rrcr} & \max\ 5.000x_1 + 1.500\ x_2 & & \\ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : & x_1 \qquad\qquad & \leq & 50 \\ & x_2 & \leq & 160 \\ & x_1 + 0,5x_2 & \leq & 100 \\ & 20x_1 + \quad 5x_2 & \leq & 1.300 \\ & x_1 \geq 0 & , & x_2 \geq 0. \end{array}$$

Wir lösen das lineare Programm nun graphisch. Da nur zwei Entscheidungsvariablen x_1, x_2 vorliegen, ist die Lösung als Punkt in einem zweidimensionalen (x_1, x_2)-Koordinatensystem (mit x_1 auf der Abszisse, x_2 auf der Ordinate) darstellbar. Jeder Punkt (x_1, x_2), der die Restriktionen erfüllt, stellt eine mögliche Produktionsentscheidung des Weinproduzenten dar. Die Menge aller solcher Punkte nennt man *Menge der zulässigen Lösungen* des linearen Programms.

Menge der zulässigen Lösungen

Ersetzt man in jeder der ersten vier Ungleichungen das „$\leq$"-Zeichen durch ein „="-Zeichen, so erhält man im zweidimensionalen Koordinatensystem eine Gerade, welche die Ebene in zwei Hälften, so genannte *Halbebenen*, teilt. Da jede Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist, lässt sie sich sehr einfach in das Koordinatensystem einzeichnen. Zur „Rebflächenrestriktion" (dritte Ungleichung) gehört beispielsweise die Gerade

Halbebenen

zur Ungleichung gehörende Gerade

$$x_1 + 0,5x_2 = 100.$$

Durch einfache Rechnung erhält man leicht die auf ihr liegenden Punkte $(30, 140)$ und $(20, 160)$. (Die einfacheren Schnittpunkte der Geraden mit den Achsen $(0, 200)$ und $(100, 0)$ sind für die Gesamtskizze Abb. 2.2 unvorteilhaft.) Nun überprüft man

Ermittlung der korrekten Halbebene

durch Einsetzen, ob der Koordinatenursprung $(0, 0)$ die Ungleichung erfüllt. Da dies hier der Fall ist $(0 \leq 100)$, entspricht diejenige Halbebene, die den Ursprung enthält, der Lösungsmenge der Restriktion. Die Gerade als Rand der Halbebene gehört natürlich ebenfalls zur Lösungsmenge. In der Graphik (siehe Abb. 2.1) empfiehlt sich die Markierung der richtigen „Gleichungsseite“ durch Schraffur.

Schraffur

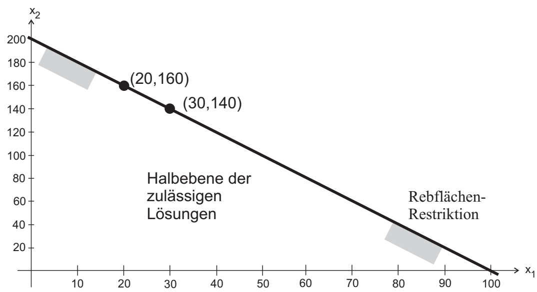

Abb. 2.1: Lösungsmenge einer Ungleichung

Auf der zur Arbeitskapazität (vierte Ungleichung) gehörenden Gleichung $20x_1 + 5x_2 = 1.300$ liegen die Punkte $(30, 140)$ und $(50, 60)$. Die Gleichung $x_1 = 50$ entspricht einer Parallelen zur x_2-Achse durch den Punkt $(50, 0)$ und die Gleichung $x_2 = 160$ stellt eine Parallele zur x_1-Achse durch den Punkt $(0, 160)$ dar. Die richtigen Halbebenen enthalten alle den Ursprung, woraus sich die entsprechenden Markierungen ergeben.

Schnittmengenbildung aller Halbebenen

Die *Menge der zulässigen Lösungen* des Optimierungsproblems (eigentlich des gegebenen Ungleichungssystems) ergibt sich nun aus der Schnittmenge aller eingezeichnenten Halbebenen. Dabei ist zu beachten, dass die beiden Nichtnegativitätsbedingungen den Schnitt auf den ersten Quadranten des Koordinatensystems einschränken. Die zulässige Lösungsmenge ist als grauer Bereich in Abbildung 2.2 dargestellt.

zulässiger Bereich

Lösungsmenge ist Polyeder

Die Menge der zulässigen Lösungen ergibt sich geometrisch als *Polyeder*. Die Aufgabe besteht nun darin, dasjenige Wertepaar (x_1^*, x_2^*) des Polyeders zu bestimmen, für das die Zielfunktion $f(x_1, x_2)$ ihr Maximum annimmt.

Das gesuchte Maximum kann mit Hilfe der Niveaulinien der Zielfunktion gefunden werden. Hierzu sucht man eine geeignete Konstante c und definiert die Gleichung

Niveaulinie der Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = c$$

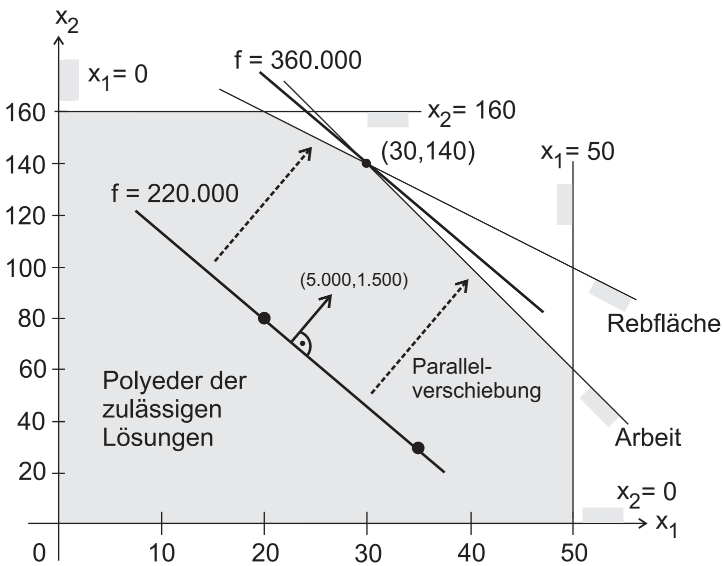

Abb. 2.2: Graphische Lösung des Maximierungsproblems

(so genannte Niveaulinie der Zielfunktion zum Wert c). Jetzt kann diese Niveaulinie der (linearen!) Zielfunktion als Gerade in die Graphik eingezeichnet werden. Wir wählen beispielsweise $c = 220.000$ (Gerade sollte gut zur Graphik passen!) und erhalten die Niveaulinie

$$f(x_1, x_2) = 5.000x_1 + 1.500x_2 = 220.000.$$

Diese Gerade geht offensichtlich durch die Punkte $(20, 80)$ und $(35, 30)$. Auf dem eingezeichneten Niveau hätte der Winzer einen Gewinn von 220.000 €. Durch Parallelverschiebung der Geraden ist eine Änderung des Zielfunktionswertes (und damit des Gewinns) möglich. Welche „Verschiebungsrichtung" den Zielfunktionswert steigert, kann man am Gradienten ∇f von f ablesen. Wie aus der mehrdimensionalen Analysis bekannt, steht der Gradient auf der Niveaulinie senkrecht und zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion. Der Gradient ergibt sich zu

Parallelverschiebung

Gradient = Richtung des steilsten Anstiegs

$$\nabla f(x_1, x_2) = (f_{x_1}(x_1, x_2), f_{x_2}(x_1, x_2))^T = (5.000, 1.500)^T$$

und ist als Vektor in Abb. 2.2 eingezeichnet. Verschiebt man also die Gerade parallel vom Ursprung weg, so erhöht sich der Zielfunktionswert. Diese Verschiebung ist so lange möglich, wie die Gerade noch mindestens einen gemeinsamen Punkt mit der

Menge der zulässigen Lösungen hat. Das ist genau der Fall für die Niveaulinie

$$f(x_1, x_2) = 5.000x_1 + 1.500x_2 = 360.000.$$

Sie berührt den zulässigen Bereich gerade noch im Punkt $(x_1^*, x_2^*) = (30, 140)$. Dieser ist die gesuchte Lösung des linearen Programms: Wenn der Winzer 30 Fässer des Barrique-Weines und 140 Fässer von der Cuvée verkauft, dann erzielt er unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen den maximal möglichen Gewinn von 360.000 €. □

Anmerkung

Man beachte, dass sich die „Verschiebungsrichtung“ der Zielfunktionsniveaulinie — abweichend von Beispiel 2.1 — auch zum Gradienten entgegengesetzt ergeben kann: nämlich dann, wenn die Konstante c größer als der Optimalwert des Problems gewählt wurde. In diesem Fall liegt die Niveaulinie ganz außerhalb des zulässigen Bereichs und muss so lange in negativer Gradientenrichtung verschoben werden, bis sie diesen erstmals berührt (siehe Abbildung 2.3).

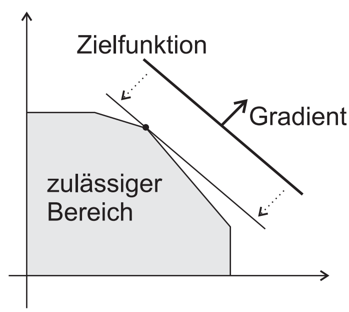

Abb. 2.3: Max.problem: Niveaulinie außerhalb des zul. Bereichs

Minimierung einer Zielfunktion

Neben der gerade vorgestellten Maximierung einer Zielfunktion tauchen in der Praxis häufig auch Probleme auf, bei denen eine Zielfunktion minimiert werden muss.

Beispiel 2.2
Die DACH-Bank, präsent in den Ländern **D**eutschland, **A**ustria und der Schweiz (**C**onfoederatio **H**elvetica), möchte in ihren Nostro-Bestand zwei neue Staatsanleihen aus Griechenland (G) und Portugal (P) aufnehmen. Die bankinternen Investmentabteilungen der drei Ländern schätzen jeweils die Ertragskraft der Anleihen unterschiedlich ein und fordern daher am Ende des

Investitionszeitraums auch unterschiedliche Mindestertragsvolumina. Die länderspezifischen Prognosen können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden:

Land	Ertrag G	Ertrag P	Mindestvolumen
D	1	3	9.000.000 €
A	1	1	6.000.000 €
CH	2	1	8.000.000 €

Die Analysten der Bank schätzen die Ausfallwahrscheinlichkeit dieser Anleihen (Bonitätsrisiko) für Griechenland auf 5%, für Portugal auf 3%. Der Finanzvorstand der Bank möchte nun unter Einhaltung der Vorgaben aus allen drei Ländern so investieren, dass das Ausfallrisiko möglichst gering ausfällt.
Zur mathematischen Modellierung des Problems müssen auch hier wieder zwei Entscheidungsvariablen eingeführt werden: Die Investitionsvolumina (in Mio. €) seien bezeichnet mit

lineares Modell

- x_1 für die griechische Anleihe,
- x_2 für das portugiesische Wertpapier.

Entscheidungs-variablen

Das Bonitätsrisiko lässt sich dann durch die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = 0,05x_1 + 0,03x_2$$

messen. Dieses Risiko ist unter Einhaltung der Vorgaben zu minimieren: So nimmt beispielsweise die deutsche Investmentabteilung eine Verdreifachung bei der Wertentwicklung der Portugal-Anleihen an, geht andererseits jedoch von unveränderten Werten bei der griechischen Anleihe aus. Aufgrund dieser Prognose, so die Forderung der Deutschen, sollte das Investment am Ende mindestens 9 Mio. € zum Nostro-Bestand der Bank beitragen, d.h. es muss gelten

Risiko-minimierung

Berücksich-tigung von Restriktionen

$$x_1 + 3x_2 \geq 9.$$

Analog ergeben sich die Restriktionen aus Österreich und der Schweiz zu $x_1 + x_2 \geq 6$ und $2x_1 + x_2 \geq 8$. Beachtet man, dass — wie im ersten Beispiel — die Volumina nicht negativ werden können, so erhält man bzgl. der Risikominimierung das folgende lineare Programm:

$$\begin{aligned} & \min\ 0,05x_1 + 0,03x_2 \\ \vec{x} \in I\!R^2 :\ & x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ & x_1 + \ \ x_2 \geq 6 \\ & 2x_1 + \ \ x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

lineares Programm

Um das Problem graphisch zu lösen, betrachten wir wieder die zu den Ungleichungen gehörenden Gleichungen. Auf den jeweiligen Geraden liegen die Punkte:

Geradengleichungen

- $x_1 + 3x_2 = 9$: $(0, 3)$ und $(9, 0)$,
- $x_1 + x_2 = 6$: $(0, 6)$ und $(6, 0)$,
- $2x_1 + x_2 = 8$: $(0, 8)$ und $(4, 0)$.

unbeschränkte Lösungsmenge

Unter Beachtung der Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ ergibt sich daraus der in Abb. 2.4 grau hervorgehobene Bereich als Menge der zulässigen Lösungen. Man beachte, dass diese Menge unbeschränkt (nach oben offen) ist. Ebenfalls eingezeichnet ist die Niveaulinie

$$f(x_1, x_2) = 0,05x_1 + 0,03x_2 = 0,45,$$

Gradient

die durch die Punkte $(9, 0)$ und $(6, 5)$ verläuft. Der senkrecht zur Niveaulinie stehende Gradient ergibt sich zu $\nabla f(x_1, x_2) = (f_{x_1}(x_1, x_2), f_{x_2}(x_1, x_2))^T = (0,05; 0,03)^T$.

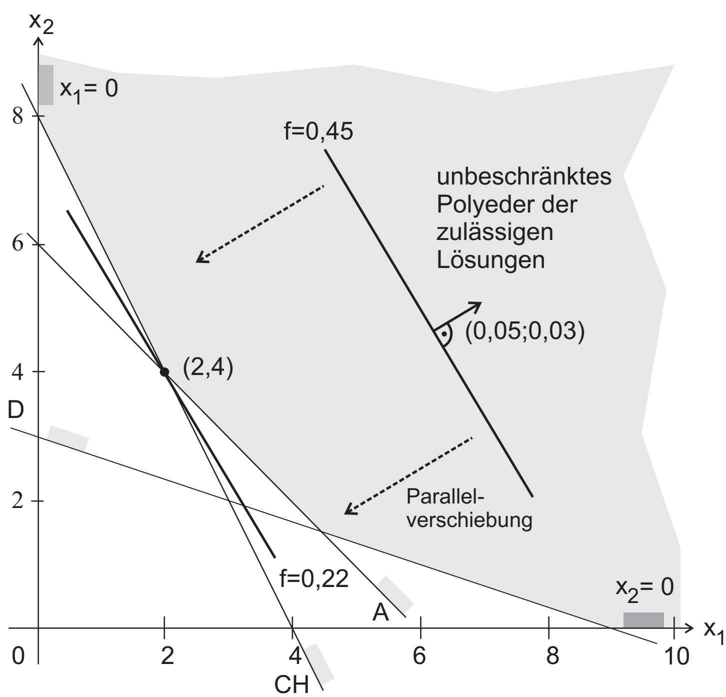

Abb. 2.4: Graphische Lösung der Risikominimierung

Die Zielfunktionswerte werden also kleiner, wenn man die Niveaulinie Richtung Ursprung (entgegen der Gradientenrichtung) so lange verschiebt, bis sie den zulässigen Bereich gerade noch berührt. Dies ist der Fall im Punkt $(x_1^*, x_2^*) = (2, 4)$ bei einem Niveau von $0,22$. Investiert die Bank daher 2.000.000 € in das griechische Wertpapier und 4.000.000 € in die Portugal-Anleihe, so hat sie unter Einhaltung der Vorgaben ihrer Investmentabteilungen das Ausfallrisiko minimiert. □

Die nachfolgende Übung zeigt eine weitere Besonderheit, die bei der Lösung linearer Programme auftreten kann.

Übung 2.1

Wir nehmen an, dass sich in unserem „Winzerbeispiel" 2.1 nach fünf Jahren einige Produktionsbedingungen geändert haben: Der Önologe muss für die Herstellung eines Fasses mit Barrique-Wein jetzt 30 AS/Jahr statt 20 AS/Jahr aufwenden. Gleichzeitig konnte er die verfügbare Arbeitskapazität von 1.300 AS auf 1.600 AS pro Jahr steigern. Außerdem bringt inzwischen der Verkauf eines Cuvée-Fasses statt 1.500 € einen Gewinn von 2.500 €.

a) Wie lautet das lineare Programm zur Gewinnmaximierung?
b) Lösen Sie das Problem graphisch.
c) Welcher optimale Produktionsplan ergibt sich?

Lösung 2.1

a) Die neue Ungleichung für die Arbeitskapazität lautet jetzt $30x_1 + 5x_2 \leq 1.600$ und die Zielfunktion muss geändert werden auf $f(x_1, x_2) = 5.000x_1 + 2.500x_2$. Damit ergibt sich das neue lineare Programm zu

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \max\ 5.000x_1 + 2.500\,x_2 & & \\
\vec{x} \in I\!R^2 : & x_1 \qquad\qquad & \leq & 50 \\
 & x_2 & \leq & 160 \\
 & x_1 + 0,5x_2 & \leq & 100 \\
 & 30x_1 + \quad 5x_2 & \leq & 1.600 \\
 & x_1 \geq 0 \quad , & & x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

b) Die zur neuen „Arbeitskapazitäts-Ungleichung" gehörende Gleichung $30x_1 + 5x_2 = 1.600$ geht durch die Punkte $(40, 80)$ und $(30, 140)$. Wählt man für die neue Zielfunktion die Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 5.000x_1 + 2.500x_2 = 250.000$, so liegen auf dieser die Punkte $(30, 40)$ und $(10, 80)$. Der Gradient lautet nun $\nabla f(x_1, x_2) = (5.000, 2.500)^T$.
Diese Änderungen gegenüber Abb. 2.2 sind in Abb. 2.5 eingezeichnet. Eine Parallelverschiebung in Gradientenrichtung

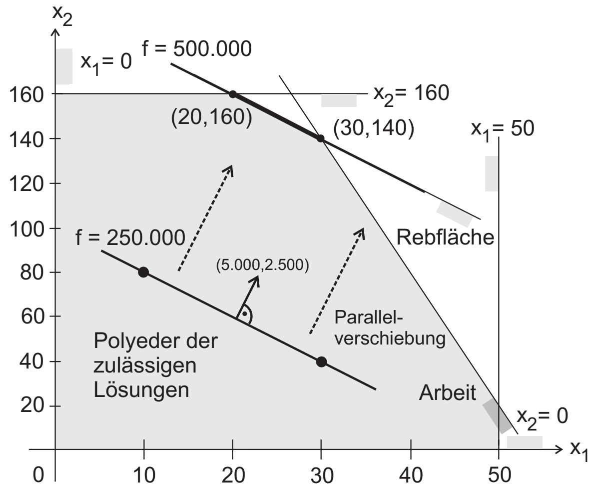

Abb. 2.5: Graphische Lösung des geänderten Winzerbeispiels

liefert nun die Optimallösungen. Die Niveaulinie $5.000x_1 + 2.500x_2 = 500.000$ berührt gerade noch den zulässigen Bereich.

unendlich viele Optimallösungen

c) Im Unterschied zu den vorangegangen Beispielen findet die Berührung nicht nur an einer einzigen Ecke statt, sondern auf einem ganzen Randstück des Polyeders. Damit ergeben sich unendlich viele Optimallösungen: Die Eckpunkte $(20, 160)$ und $(30, 140)$ sind Optimallösungen, aber auch alle Punkte auf der Strecke zwischen diesen beiden Punkten.

Die Strecke lässt sich einfach bestimmen: Die zugehörige Geradengleichung setzt man als $x_2 = ax_1 + b$ an. Einsetzen der Eckpunkte liefert das Gleichungssystem

$$20a + b = 160,$$
$$30a + b = 140,$$

Darstellung der unendlich vielen Optimallösungen

welches die Lösung $a = -2$, $b = 200$ hat. Die Gleichung der Strecke (und damit die Menge der unendlich vielen Optimallösungen) lautet daher

$$x_2 = -2x_1 + 200, \quad x_1 \in [20, 30].$$

Setzt man beispielsweise $x_1 = 25$, so erhält man die spezielle Optimallösung $(25, 150)$.

Der Winzer könnte also 30 Barrique-Fässer und 140 Cuvée-Fässer oder 20 Barrique-Fässer und 160 Cuvée-Fässer produzieren, andererseits aber auch 25 Barrique-Fässer und 150 http://www.springer.com/978-3-662-48396-1

Operations Research kompakt
Eine an Beispielen orientierte Einführung
Schwenkert, R.; Stry, Y.
2015, XI, 288 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-48396-1