

2 Mechanische Grundlagen

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Für das Verständnis der durchgeführten experimentellen Versuche und numerischen Betrachtungen werden zunächst die notwendigen mechanischen Grundlagen geschaffen. Diese sind allgemeingültig und sind im Wesentlichen aus (BECKER et al., 2002; GROSS et al., 2011; GROSS et al., 2007; HOLZAPFEL, 2000; ALTENBACH, 2012) entnommen. Als Notation für Tensoren wird die folgende Schreibweise verwendet:

- a : Skalar (Tenor 0. Stufe) ,
- $\vec{a}$: Vektor (Tensor 1. Stufe) ,
- $\mathbf{a}$: Tensor 2. Stufe, speziell: $\mathbf{1}$ ist der Einheitstensor ,
- $\mathbb{A}$: Tensor 4. Stufe .

2.2 Kinematik

2.2.1 Deformation

Erfährt ein materieller Punkt in einem Körper eine Verschiebung, wird dies als Deformation bezeichnet (siehe Abb. 2.1). Die undeformierte Lage des materiellen Punktes P_0 wird Ausgangs- bzw. Referenzkonfiguration genannt. In der deformierten Lage befindet sich dagegen der materielle Punkt P in der Momentankonfiguration, die oftmals auch aktuelle Konfiguration genannt wird.

Die Beschreibung eines beliebigen Punktes des Körpers erfolgt im dreidimensionalen euklidischen Punktraum, der als $\mathbb{E}^3$ bezeichnet wird. Darin werden die Punkte in der Ausgangskonfiguration mittels Ortsvektoren $\vec{X}$ in der Lagrangesche Darstellung dargestellt, in der Momentankonfiguration durch die Ortsvektoren $\vec{x}$ in der Eulerschen Darstellung. Die Lagrangeschen Darstellung wird als materielle Beschreibung bezeichnet, da sich der „Betrachter“ auf dem Körper befindet und dadurch immer den selben Körper beschreibt. Dagegen wird die Eulersche Darstellung als raumfeste Beschreibung aufgefasst, denn der „Betrachter“ befindet sich an einem festen Ort außerhalb des Körpers und kann dadurch

die Änderung der Eigenschaften eines oder mehrerer Körper beschreiben. Diese Darstellung wird vor allem in der Fluidmechanik zugrunde gelegt.

In der Festkörpermechanik wird die Lagrangesche Darstellung bevorzugt. Aus diesem Grund wird die hier vorgestellte Kinematik in der Lagrangesche Darstellung beschrieben. Die Menge aller Ortsvektoren bilden den undeformierten bzw. deformierten Körper B_0 bzw. B und die dazugehörigen Oberflächen ∂B_0 bzw. ∂B .

Die Verschiebung der materiellen Punkte im Körper wird durch die Ortsvektoren und die Einführung des Verschiebungsvektors $\vec{u}$ dargestellt:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \quad . \quad (2.1)$$

Die Deformation des elastischen Körpers ist als eine eindeutig bestimmte, umkehrbare Abbildung von B_0 nach B postuliert. Damit ist eine Bewegungsbeziehung zwischen den beiden Konfigurationen möglich:

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \quad . \quad (2.2)$$

Die Deformation eines materiellen Linienelementes $d\vec{X}$ in der Referenzkonfiguration am Punkt P_0 kann mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ in ein Linienelement $d\vec{x}$ in der Momentankonfiguration am Punkt P überführt werden:

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{X}} d\vec{X} = \text{grad}(\vec{x}) d\vec{X} = \mathbf{F} d\vec{X} \quad , \text{ mit } \mathbf{F} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad . \quad (2.3)$$

Der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ besitzt demnach eine Basis mit jeweils einem Basisvektor in der Ausgangskonfiguration und in der Momentankonfiguration. Er berücksichtigt sowohl die Längenänderung des Linienelementes $d\vec{X}$ als auch die Starrkörperbewegungen des Körpers. Der Deformationsgradient kann polar in eine Abbildung aus einer reinen Rotation mit anschließender Streckung oder umgekehrt zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad . \quad (2.4)$$

Der Rechts-Strecktensor $\mathbf{U}$ und der Links-Strecktensor $\mathbf{V}$ sind symmetrisch und positiv definit. Der Drehtensor $\mathbf{R}$ ist orthogonal ($\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$). Der Zusammenhang des Körpers muss gewährleistet sein; auch eine Durchdringung des Körpers ist auszuschließen. Um dies zu gewährleisten, muss die Jakobi-Determinante des Deformationsgradienten $J = \det \mathbf{F} > 0$ sein. Folglich existiert auch die Inverse $\mathbf{F}^{-1}$, welche die Voraussetzung für die Umkehrbarkeit einer Deformation eines elastischen Körpers ermöglicht.

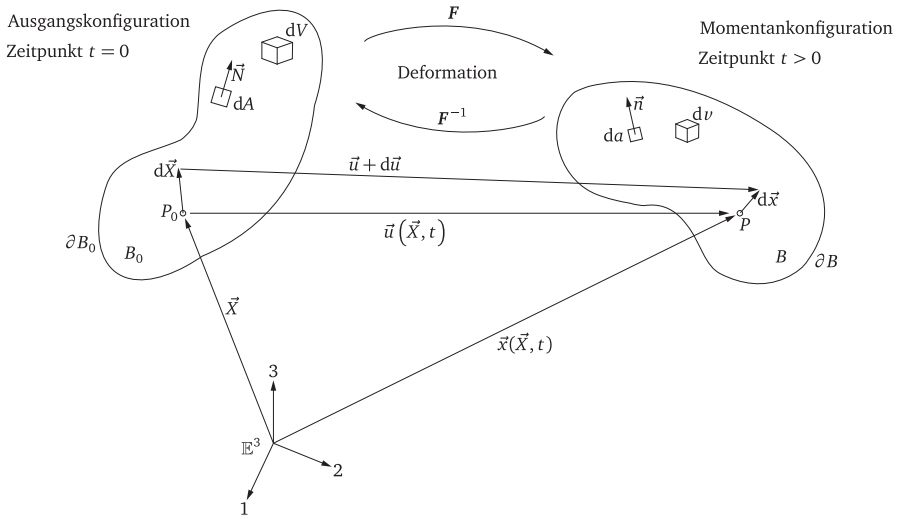


Abbildung 2.1 Schematische Darstellung der Deformation eines Körpers

Mit Einführung des Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}$ lässt sich der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ unter Berücksichtigung von Gleichung (2.1) darstellen als:

$$\mathbf{F} = \text{grad} \left(\vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) \right) = \mathbf{1} + \text{grad}(\vec{u}) = \mathbf{1} + \mathbf{H} \quad , \text{ mit } \mathbf{H} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \quad . \quad (2.5)$$

Der Einheitsvektor $\vec{N}$ in der Ausgangskonfiguration steht senkrecht auf dem infinitesimalen Flächenelement dA (siehe Abb. 2.1). Dadurch ist $d\vec{A} = \vec{N} dA$ der Schnittflächenvektor, der als Komponenten die Projektion des Flächenelements dA senkrecht zur jeweiligen Koordinatenachse besitzt. Dies gilt auch für den Schnittflächenvektor in der Momentankonfiguration $d\vec{a} = \vec{n} da$. Die Transformation eines infinitesimalen Volumenelements dV bzw. eines infinitesimalen Flächenelements dA von der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration ist mit den folgenden Beziehungen zu überführen:

$$dv = \det(\mathbf{F}) dV \quad , \text{ mit } J = \det(\mathbf{F}) > 0 \quad , \quad (2.6)$$

$$d\vec{a} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\vec{A} \quad . \quad (2.7)$$

Aus Gleichung (2.6) wird Folgendes deutlich: wenn die Determinante des Deformationsgradienten den Wert $\det \mathbf{F} = 1$ annimmt, ist das Volumen des betrachteten Materials in der Ausgangs- und Momentankonfiguration gleich groß. Solch ein Materialverhalten wird als isochor oder inkompressibel bezeichnet.

2.2.2 Verzerrungsmaße

Das mechanische Verhalten eines Körpers bei einem Deformationsprozess wird durch Verzerrungen, also eine Veränderung der Lagebeziehung der Linienelemente zwischen Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration, hervorgerufen. Es wird davon ausgegangen, dass Starrkörperbewegungen keinen Einfluss auf das mechanische Verhalten des Körpers haben. Für die Beschreibung von Verzerrungen müssen Verzerrungsmaße definiert werden, die je nach der verwendeten Theorie bestimmte Eigenschaften aufweisen. So eignet sich beispielsweise der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ nicht als Verzerrungsmaß, da er auch die Starrkörperbewegung als Rotation beinhaltet. Des Weiteren fallen bei keiner Deformation $d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$ die Linienelemente der Ausgangs- und der Momentankonfiguration zusammen und der Deformationsgradient wird zu $\mathbf{F} = \mathbf{1}$. Dadurch eignet sich der Deformationsgradient für ein Verzerrungsmaß nicht. Zudem befindet sich eine Basis des Deformationsgradienten in der Ausgangskonfiguration und die andere in der Momentankonfiguration, was für die Berechnung der aus den Verzerrungen resultierenden Spannungen unzweckmäßig ist.

Aufgrund den Eigenschaften bei der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten nach Gleichung (2.4) lassen sich Hilfstensoren einführen, die keine Rotationsanteile mehr besitzen und sich mit beiden Basen in einer Konfiguration befinden:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad \text{rechter Cauchy-Green Tensor} \quad , \quad (2.8)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 \quad \text{linker Cauchy-Green Tensor} \quad . \quad (2.9)$$

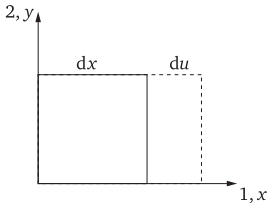
Der rechte Cauchy-Green Tensor befindet sich in der Ausgangskonfiguration und der linke Cauchy-Green Tensor in der Momentankonfiguration.

Aus dem Cauchy-Green Tensor und der Bedingung, dass bei keiner Deformation auch keine Verzerrungen auftreten, ergibt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ in der Ausgangskonfiguration und der Euler-Almansische Verzerrungstensor $\mathbf{e}$ in der Momentankonfiguration, die ein geeignetes Verzerrungsmaß darstellen:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad , \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \quad . \quad (2.11)$$

Die beiden Verzerrungsmaße, Green-Lagrangescher und Euler-Almansischer Verzerrungstensor, sind als die halbe Differenz der Längenquadrate des undeformierten und des deformierten Linienelements deutbar.

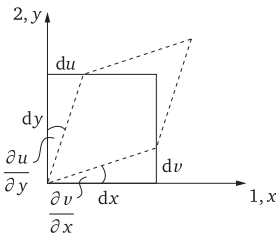
2-D: Infinitesimale einachsige Dehnung ϵ_{xx} 

$$X_1, X_2 \iff x, y$$

$$u_1, u_2 \iff u, v$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \implies \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

2-D: Infinitesimale technische Schubverformung γ_{xy} in der Ebene

$$du = \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad ; \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \gamma_{12} \implies$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

Abbildung 2.2 Geometrische Deutung der Dehnung und Schubverformung**2.2.3 Lineare Theorie**

Hat der Deformationsprozess eines Körpers kleine Verzerrungen zur Folge, so gehen damit einige Vereinfachungen einher. Für das Auftreten von kleinen Verzerrungen ist es gerechtfertigt, den Verschiebungsgradienten $\mathbf{H}$ wie folgt anzunehmen:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} \ll 1 \quad . \quad (2.12)$$

Demzufolge wird der Deformationsgradient nach Gleichung (2.5) zum Einheitsstensor $\mathbf{F} \approx \mathbf{1}$ und die Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration fallen zusammen. Dadurch ist der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor identisch zum Euler-Almansischen Verzerrungstensor. Zudem können die Terme höherer Ordnung des Verschiebungsgradi-

enten im Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor nach Gleichung (2.10) näherungsweise entfallen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} = \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad . \quad (2.13)$$

Der linearisierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird als infinitesimaler Verzerrungstensor bezeichnet. Die geometrische Deutung des infinitesimalen Verzerrungstensors ist in Abb. 2.2 gezeigt. Die Komponenten des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf der Hauptdiagonalen werden als Dehnung oder Stauchung bezeichnet, die Komponenten auf den Nebendiagonalen als Schubverformung oder Gleitung. Dabei ist die als technische Gleitung γ definierte Ingenieurgröße doppelt so groß wie die mathematische Schubverformung ε_{ij} mit $i \neq j$. Dementsprechend muss bei der Berechnung der Verzerrungen klar definiert werden, ob es sich um die mathematischen oder technischen Verzerrungen handelt.

Ausgehend vom ersten Axiom der Rheologie, das besagt, dass unter isotropem Druck sich alle Materialien gleichartig elastisch verhalten, können vier rheologische Grundmodelle formuliert werden: das elastische Modell für Volumenverzerrungen und das elastische, das viskose und das plastische Modell für die deviatorischen Verzerrungen (ALTENBACH, 2012). Folglich setzt sich die Formänderung eines Körpers infolge einer Belastung aus einer Volumenänderung (volumetrischer oder hydrostatischer Anteil) und einer Gestaltänderung (deviatorischer Anteil) zusammen. Bei einer Gestaltänderung bleibt das Volumen des Körpers konstant. Dagegen tritt bei einer hydrostatischen Beanspruchung nur eine Volumenänderung auf und keine Gestaltänderung. Abhängig vom Werkstoff und der auftretenden Belastung auf den Körper kann der hydrostatische Anteil oder der deviatorische Anteil dominieren. Für die Modellierung des Materialverhaltens ist auch die Kenntnis des Werkstoffversagens notwendig: Es wird davon ausgegangen, dass der hydrostatische Anteil einer Belastung keine Schädigung des Materials verursacht.

Daher ist die Trennung der Formänderung des Körpers in einen hydrostatischen Anteil und einen deviatorischen Anteil nützlich. Dies wird durch die additive Aufspaltung des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in einen volumetrischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vol}}$ und in einen deviatorischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}}$ erreicht:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{vol}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{dev}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right) \quad . \quad (2.14)$$

2.3 Spannung

2.3.1 Spannungsvektor

Die mechanische Wechselwirkung zwischen verschiedenen Teilen von einem Körper und seiner Umgebung wird in der Kontinuumsmechanik mit Hilfe von Kräften beschrieben. Es werden drei Arten von Kräften unterschieden:

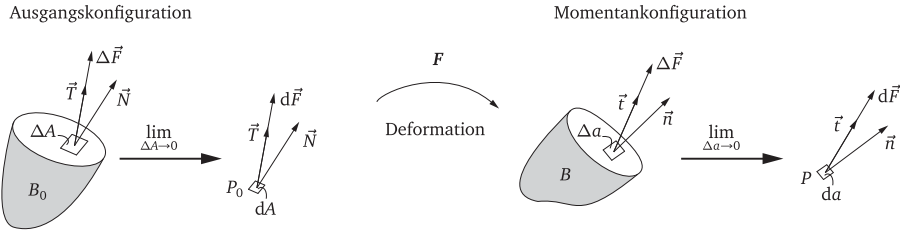


Abbildung 2.3 Spannungsvektor in der Ausgangs- und Momentankonfiguration

- Kontaktkräfte $\vec{F}$, die zwischen verschiedenen Teilen des Körpers wirken,
- Kontaktkräfte $\vec{F}$ auf der Oberfläche des Körpers, die durch die Umgebung erzeugt werden und
- Volumenkräfte $\vec{f}$ im Inneren vom Körper, die durch die Umgebung erzeugt werden.

Die Kontaktkräfte $\vec{F}$ werden durch die zeitliche Ableitung des Impulses $\vec{p}$ beschrieben

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (2. \text{ Newtonsches Axiom}) \quad . \quad (2.15)$$

Die Kontaktkräfte $\vec{F}$, auch als Schnittkräfte bezeichnet, sind unabhängig von der Konfiguration gleich groß. Als Spannungen werden auf eine Schnittfläche im Körper bezogene Kontaktkräfte bezeichnet. Dabei können die Spannungen in der Ausgangskonfiguration oder in der Momentankonfiguration gemäß Abb. 2.3 dargestellt werden. In einem Schnitt durch den Körper wirkt in der Momentankonfiguration die Kontaktkraft ΔF auf die freigelegte Fläche ΔA . Der lokale Spannungsvektor $\vec{t}$ ist definiert durch die Kontaktkraft in einem lokalen Punkt P bezogen auf die dazugehörige infinitesimale Fläche da . Die Orientierung der Fläche ist durch den Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben. Analog zur Momentankonfiguration ist der Spannungsvektor $\vec{T}$ in der Ausgangskonfiguration durch die entsprechenden Bezugsgrößen darstellbar. Der Spannungsvektor in der jeweiligen Konfiguration ist demnach definiert als:

$$\vec{t} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta a} = \frac{d\vec{F}}{da} \quad (\text{Momentankonfiguration}) \quad , \quad (2.16)$$

$$\vec{T} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (\text{Ausgangskonfiguration}) \quad . \quad (2.17)$$

2.3.2 Spannungstensoren

Für ein bewegtes Kraftsystem $(\vec{t}, \vec{f})$ müssen die Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichung gelten. Um diese zu erfüllen, ist es gemäß dem Satz von Cauchy notwendig und hinreichend, dass ein Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ zweiter Stufe existiert (Cauchyscher Spannungstensor), mit folgenden Eigenschaften:

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \vec{n} \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.19)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{x}} \quad (2.20)$$

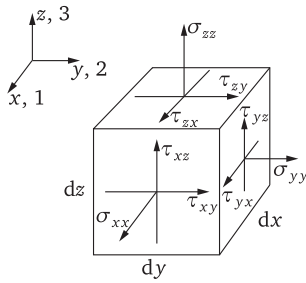
Der Spannungsvektor $\vec{t}$ lässt sich in der Momentankonfiguration als lineare Abbildung des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und der Normalen $\vec{n}$ des betrachteten Punktes deuten (vgl. Gleichung (2.18)). Der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist nach Gleichung (2.19) symmetrisch aufgrund der Einhaltung der Drehimpulsbilanz und befindet sich ausschließlich in der Momentankonfiguration. Die dazugehörigen linear unabhängigen Spannungskomponenten werden deshalb auch als „wahre Spannungen“ bezeichnet. Gleichung (2.20) stellt die Impulsbilanz für ein bewegtes Kraftsystem dar. Im Falle eines statischen Kraftsystems ($\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \vec{0}$), von welchem für die hier betrachteten Problemstellungen ausgegangen wird, ist der Impulssatz Gleichung (2.20) gleichzusetzen mit dem lokalen Kräftegleichgewicht eines beliebigen infinitesimalen Volumens V .

Wie bereits erläutert, hat eine hydrostatische Belastung keine Schädigung des Materials zur Folge, sodass bei der Modellierung des Materials der hydrostatische Anteil der Formänderung des Körpers keinen Einfluss auf das Werkstoffversagen hat. Daher ist eine Aufspaltung des Spannungstensors, analog zum Verzerrungstensor nach Gleichung (2.14), in einen volumetrischen Anteil $\boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}}$ (hydrostatischer Spannungsanteil) und einen Gestaltungsänderungsanteil $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$ (Spannungsdeviator) nützlich:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \right) \quad (2.21)$$

Die Spannungsvektoren können durch die Definition von Spannungstensoren auf die unterschiedlichen Konfigurationen bezogen und in den unterschiedlichen Konfigurationen beschrieben werden. Es sind in der Kontinuumsmechanik vor allem der erste und zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor von Bedeutung. Mit der Definition des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors $\mathbf{P}$ (1. PK) wird die Schnittkraft dF durch den Spannungsvektor in der Momentankonfiguration, bezogen auf die Schnittfläche in der Referenzkonfiguration, beschrieben:

$$\mathbf{P} := (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (1. \text{ Piola-Kirchhoff}) \quad (2.22)$$



$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Abbildung 2.4 Darstellung des dreidimensionalen Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ an einem infinitesimalen Volumen

Somit hat er die eine Basis in der Momentan- und die zweite in der Ausgangskonfiguration und ist unsymmetrisch. Er ist dadurch als konjugierter Spannungstensor zu den in Abschn. 2.2.2 vorgestellten Verzerrungstensen ungeeignet. Durch Symmetrisierung des 1. PK erhält man den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor $\boldsymbol{S}$ (2. PK):

$$\boldsymbol{S} := \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^{-T} = (\det \boldsymbol{F}) \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{F}^{-T} \quad (2. \text{ Piola-Kirchhoff}) \quad . \quad (2.23)$$

Im Gegensatz zum ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor kann der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor nicht als eine physikalische Spannung interpretiert werden. Er stellt jedoch den konjugierten Spannungstensor zum Green-Lagrangschen Verzerrungstensor dar, denn er befindet sich vollständig in der Ausgangskonfiguration und ist symmetrisch. Aufgrund seiner Eigenschaften wird er für die Umsetzung von kontinuumsmechanischen Problemen mit der Methode der finiten Elemente verwendet.

Analog zu den Verzerrungstensen der unterschiedlichen Konfigurationen gehen die drei vorgestellten Spannungstensen bei kleinen Verzerrungen ineinander über: $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}$. In Abb. 2.4 werden die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors an einem infinitesimalen Volumen dargestellt. Der erste Index steht für die Normalenrichtung des Schnittes und der zweite Index gibt die Richtung der Komponente an. Die Komponenten auf der Hauptdiagonalen werden als Normalspannungen bezeichnet. Die Spannungen auf den Nebendiagonalen als Schubspannungen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung ist der Spannungstensor symmetrisch.

2.4 Konstitutivgleichung

2.4.1 Elastizitätsgesetz

Die Beschreibung von Körpern geht in der Elastomechanik in der Regel mit der Kenntnis der Beanspruchung und der Deformation des Körpers einher. Die materialunabhängigen

Gleichgewichtsbedingungen und die kinematischen Beziehungen reichen im Allgemeinen nicht aus, um die Spannungen und die Verformungen des Körpers zu ermitteln. Es sind weitere Gleichungen erforderlich, die zu einem vollständigen, lösbaeren Gleichungssystem führen: Diese werden Materialgleichungen, Konstitutivgleichungen oder Stoffgesetze genannt. Ein Körper ist durch zwei konstitutive Beziehungen charakterisiert: Stoffgesetze, die einen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen herstellen, und kohäsive Konstitutivgleichungen für durch Risse entstandene Oberflächen (XU et al., 1994). Kohäsive Konstitutivgleichungen werden in Abschn. 2.6.4 vorgestellt. Stoffgesetze, die einen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen beschreiben, werden häufig aus Experimenten abgeleitet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad . \quad (2.24)$$

Die Annahmen für Materialgleichungen sind so zu formulieren, dass die experimentell beobachteten Eigenschaften möglichst gut abgebildet werden. Verhalten sich in einem eindimensionalen Spannungsproblem die Spannung und Verzerrung linear zueinander, dann lässt sich die Materialgleichung durch das bekannte Hookesche Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ beschreiben. Bei einem linear elastischen, mehrdimensionalen Spannungsproblem ist der Elastizitätstensor $\mathbb{C}$ ein Tensor der 4. Stufe und das Stoffgesetz lautet:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \quad (2.25)$$

Bei einer Belastung geht der Körper von der Ausgangslage in einen deformierten Zustand über; geht der Körper bei anschließender Entlastung wieder vollständig in die Ausgangslage zurück, so wird das Materialverhalten des Körpers als elastisch bezeichnet. Der Elastizitätstensor $\mathbb{C}$ weist $3^4 = 81$ Komponenten auf. Aufgrund des Potentialcharakters der Formänderungsenergie und der Symmetrie des Spannungs- und des Verzerrungstensors lässt sich der Elastizitätstensor auf 21 Komponenten reduzieren.

2.4.2 Linear elastisches, isotropes Materialverhalten

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Werkstoffe weisen in allen Richtungen gleiches Materialverhalten auf und sind damit für beliebige Transformationen des zugrunde gelegten Koordinatensystems invariant. Materialien mit dieser Eigenschaft werden als isotrop bezeichnet. Sind die Materialien zudem linear elastisch, so hängt der Elastizitätstensor nur von den beiden sogenannten Laméschen Konstanten λ und μ ab.

Dann kann das Hookesche Gesetz nach Gleichung (2.25) in Abhängigkeit von den Laméschen Konstanten formuliert werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \quad (2.26)$$

Untersuchungen zur Resttragfähigkeit von
gebrochenen Verglasungen

Investigation of the residual load-bearing behaviour of
fractured glazing

Franz, J.

2015, XXIII, 240 S. 120 Abb., 42 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-48555-2