2

Verso una teoria relativistica della gravitazione

La equazioni gravitazionali di Newton, che forniscono la base teorica per la descrizione Kepleriana del moto dei corpi celesti, e che sembrano prestarsi così bene a rappresentare le forze gravitazionali anche su scala macroscopica di laboratorio, *non sono* compatibili con i principi della relatività ristretta.

Le equazioni di Newton prevedono infatti che gli effetti dell'interazione gravitazionale si propaghino con velocità infinita in tutti i mezzi; inoltre, non ci dicono come tale interazione si trasformi passando da un sistema di riferimento ad un altro. La teoria Newtoniana definisce la forza gravitazionale generata da una sorgente statica, ma non ci dà la forza prodotta da sorgenti in movimento. La teoria può dunque descrivere il campo gravitazionale di una massa M, utilizzando il potenziale statico $\phi(r) = -GM/r$, solo nell'approssimazione non-relativistica in cui l'energia potenziale $m\phi$ di una massa di prova m è trascurabile (in valore assoluto) rispetto alla sua energia di riposo mc^2. Ossia nel regime in cui

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1. \tag{2.1}$$

Per descrivere correttamente la gravità nel regime relativistico è dunque necessario generalizzare la teoria di Newton. In che modo? Una via naturale sembrerebbe suggerita dalla stretta analogia formale che esiste tra la forza gravitazionale che si esercita tra due masse statiche e la forza di Coulomb tra le cariche elettriche. Così come il potenziale di Coulomb corrisponde alla quarta componente del quadrivettore potenziale, anche il potenziale di Newton potrebbe corrispondere alla componente di un quadrivettore, e anche l'interazione gravitazionale potrebbe essere rappresentata da un campo relativistico di tipo *vettoriale*, in modo analogo all'interazione elettromagnetica.

Questa suggestiva speculazione va però immediatamente scartata, perché interazioni di tipo vettoriale prevedono forze che sono *repulsive* tra sorgenti statiche dello stesso segno mentre, come ben noto, la forza di gravità è *attrattiva* tra masse dello stesso segno.

Una seconda possibilità, anche questa perfettamente consistente dal punto di vista formale, è che il potenziale della teoria di Newton si comporti come un

M. Gasperini, *Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*,
UNITEXT for Physics, DOI 10.1007/978-88-470-5690-9_2

oggetto scalare rispetto alle trasformazione di coordinate, e che l'interazione gravitazionale relativistica sia correttamente descritta da un campo di tipo *scalare*. Anche quest'ipotesi va scartata sulla base di risultati sperimentali, ma le motivazioni, in questo caso, sono meno evidenti che nel caso precedente. Vale la pena – anche in vista di applicazioni successive – di discutere brevemente una di queste motivazioni che riguarda la precessione del perielio delle orbite planetarie.

Consideriamo il moto di un corpo di prova relativistico, di massa m, che interagisce con una forza centrale (cioè diretta radialmente) descritta dal potenziale scalare $U = U(r)$. Il moto è governato dalla Lagrangiana relativistica

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - mU, \tag{2.2}$$

dove $v^2 = v_i v^i$, e $v^i = dx^i/dt$. Il termine cinetico di questa Lagrangiana si ottiene direttamente dall'azione libera (1.118) usando come parametro della traiettoria il tempo t di un generico osservatore inerziale, $x^\mu = x^\mu(t)$.

Si può facilmente dimostrare che per questo sistema dinamico il momento angolare si conserva e il moto è confinato su di un piano, in quanto $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nabla} U = 0$. Introducendo su questo piano coordinate polari,

$$x = r\cos\varphi, \qquad\qquad y = r\sin\varphi, \tag{2.3}$$

e prendendo per U il potenziale gravitazionale prodotto da un corpo centrale di massa M, si arriva alla Lagrangiana:

$$L = -mc^2\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)\right]^{1/2} + \frac{GMm}{r}, \tag{2.4}$$

dove il punto indica derivata rispetto a t.

Questa Lagrangiana è ciclica rispetto alle coordinate φ e t, ed è quindi caratterizzata da due costanti del moto: il momento canonicamente coniugato alla variabile angolare (cioè il momento angolare) e l'energia totale (associata all'Hamiltoniana). Possiamo quindi porre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\gamma r^2\dot\varphi = mh = \text{cost}, \tag{2.5}$$

$$H = v^i\frac{\partial L}{\partial v^i} - L = m\gamma c^2 + mU = m\alpha = \text{cost}, \tag{2.6}$$

dove γ è il fattore di Lorentz

$$\gamma = \left[1-\frac{1}{c^2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)\right]^{-1/2}, \tag{2.7}$$

e dove h e α sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali.

Combiniamo ora le due relazioni (2.5), (2.6), deriviamo rispetto a φ, e poniamo $u = 1/r$. Escludendo il possibile caso di orbite circolari, $r =$ cost, si arriva così alla seguente equazione del moto in coordinate polari (si veda l'Esercizio 2.1):

$$u'' + k^2 u = \frac{k^2}{p}, \tag{2.8}$$

dove il primo indica la derivata rispetto a φ, e dove le costanti k e p sono definite da:

$$k^2 = 1 - \frac{c^2 r_0^2}{4h^2}, \qquad \frac{k^2}{p} = \frac{\alpha r_0}{2h^2}, \qquad r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \tag{2.9}$$

La soluzione generale di questa equazione si ottiene sommando alla soluzione generale dell'equazione omogena una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea (ad esempio, $u = p^{-1}$), e dipende da due costanti di integrazione che chiameremo e e φ_0. Se siamo interessati, in particolare, a descrivere le orbite planetarie possiamo prendere condizioni iniziali per le quali il moto rimane confinato in una porzione finita di spazio, e possiamo convenientemente scrivere la soluzione generale nella forma seguente,

$$u = \frac{1}{p}\left[1 + e\cos k(\varphi - \varphi_0)\right], \tag{2.10}$$

con $0 < e < 1$. Nel limite non-relativistico ($c \to \infty$) si ottiene $k \to 1$, e l'Eq. (2.10) si riduce esattamente all'equazione che descrive (in coordinate polari) un'ellisse di eccentricità e e posizione del perielio $\varphi = \varphi_0$.

Se non trascuriamo le correzioni relativistiche, e prendiamo per k il valore prescritto dall'Eq. (2.9), troviamo che il moto è ancora compreso tra una posizione di minima e massima distanza dall'origine, ma l'orbita non è più chiusa: non descrive un'ellisse, bensì una curva detta "rosetta". Il punto di minima distanza dalla sorgente, o perielio, non viene più raggiunto periodicamente dopo che il moto del corpo ha sotteso un angolo $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$, bensì dopo un angolo $k(\varphi - \varphi_0) = 2\pi$ (si veda l'Eq. (2.10)). Perciò, ad ogni giro, c'è uno spostamento angolare del perielio dato da

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{k} - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{k} - 1\right) \simeq 2\pi\left(\frac{c^2 r_0^2}{8h^2}\right) = \frac{\pi G^2 M^2}{c^2 h^2} \tag{2.11}$$

(abbiamo usato per k la definizione (2.9) nell'approssimazione $c^2 r_0^2/h^2 \ll 1$, che è ben soddisfatta nel caso delle orbite planetarie del nostro sistema solare).

Una teoria che descrive l'interazione gravitazionale mediante un potenziale scalare relativistico prevede dunque che le orbite planetarie, anziché descrivere delle perfette ellissi Kepleriane come prescritto dalla meccanica di Newton, siano soggette ad una (piccola) precessione del perielio descritta dall'Eq. (2.11). Un moto di precessione di questo tipo in effetti esiste realmente, ed è stato messo in evidenza e misurato da una lunga serie (più che secolare) di accurate osservazioni astronomiche.

Purtroppo, però, la predizione (2.11) basata sul modello di gravità scalare è in netto disaccordo con le precessioni osservate: per il pianeta Mercurio, ad esempio, l'Eq. (2.11) fornisce uno spostamento del perielio di circa 7 secondi d'arco per secolo, mentre lo spostamento osservato è di circa 43 secondi d'arco per secolo. Una discrepanza che va molto al di là dei possibili errori sperimentali e sistematici[1]. Il modello in cui l'interazione gravitazionale è rappresentata da un campo scalare non può quindi rappresentare una soddisfacente generalizzazione relativistica della teoria Newtoniana.

Un approccio alternativo ad una teoria relativistica della gravità, che non fa uso di campi scalari o vettoriali, e che si confronta favorevolmente con tutte le osservazioni finora disponibili, è il modello di interazione *tensoriale* che viene adottato dalla teoria della relatività generale di Einstein e che permette, a livello classico, di descrivere e interpretare le forze gravitazionali anche in modo geometrico.

Il punto di partenza di questo efficiente approccio è una radicale estensione del principio che sta alla base della relatività ristretta e che sancisce l'equivalenza fisica di tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tale principio viene generalizzato dalla seguente assunzione:

le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento,

senza restringersi alla classe dei riferimenti inerziali. Questa assunzione porta, come conseguenza, al cosiddetto "principio di general-covarianza":

le leggi della fisica sono covarianti rispetto a trasformazioni generali di coordinate,

e non solo rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Queste due assunzioni, che rappresentano una generalizzazione naturale (e piuttosto innocua, all'apparenza) dei postulati della relatività ristretta, e che stanno alla base della teoria della relatività generale, hanno una portata rivoluzionaria. In questo contesto, infatti, diventa inevitabile rinunciare alla struttura rigida e pseudo-Euclidea dello spazio-tempo di Minkowski a favore di una struttura geometrica più generale.

Per illustrare questo punto ricordiamo che per una generica trasformazione $x^\mu \to x'^\mu$ il differenziale delle coordinate si trasforma come

$$dx^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right) dx'^\nu, \tag{2.12}$$

dove il termine in parentesi tonde rappresenta la matrice Jacobiana inversa della trasformazione. Supponiamo, per semplicità, che le coordinate di par-

[1] Come vedremo nel Capitolo 10, la teoria della relatività generale prevede che lo spostamento del perielio sia controllato da un'espressione che coincide approssimativamente con la (2.11) moltiplicata per 6, e che produce quindi un accordo molto migliore con le osservazioni.

tenza x^μ si riferiscano ad un sistema inerziale, caratterizzato da un intervallo spazio-temporale infinitesimo di tipo Minkowskiano:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{2.13}$$

Lo stesso intervallo, espresso in funzione delle nuove coordinate x'^μ, assumerà una forma non più Minkowskiana. Dalle legge di trasformazione (2.12) otteniamo infatti

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta \equiv g_{\alpha\beta}(x') dx'^\alpha dx'^\beta, \tag{2.14}$$

dove abbiamo posto

$$g_{\alpha\beta}(x') = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}. \tag{2.15}$$

Questo risultato mostra esplicitamente che una generica trasformazione di coordinate – al contrario delle trasformazioni di Lorentz – non preserva la metrica di Minkowski.

Se estendiamo la classe dei sistemi fisicamente equivalenti anche ai sistemi non-inerziali dobbiamo allora necessariamente introdurre nella varietà spazio-temporale un intervallo (o "elemento di linea") ds^2 che non è più rigidamente fissato come combinazione pseudo-Euclidea dei differenziali quadratici dx^2, ma che combina tra loro i differenziali delle coordinate in un modo che dipende, in generale, dal punto in cui il ds^2 viene calcolato.

2.1 I postulati della geometria Riemanniana

Il principio di relatività generale, o di general-covarianza, ci porta ad uno spazio-tempo con una geometria diversa da quella di Minkowski, e più ricca di possibili strutture. Per poter formulare dei modelli fisicamente predittivi diventa allora necessario fare alcune "ipotesi di lavoro" sulla geometria dello spazio-tempo, così da fissare meglio il modello che si assume valido.

A questo scopo è opportuno considerare le due seguenti ipotesi di base:

- l'intervallo ds^2 è una forma quadratica omogenea (in generale con coefficienti non costanti) nei differenziali delle coordinate:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu; \tag{2.16}$$

- l'intervallo ds^2 è invariante per trasformazioni generali di coordinate:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = \\ &= ds'^2 \equiv g'_{\alpha\beta}(x') dx'^\alpha dx'^\beta. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Questa seconda ipotesi, come vedremo in seguito, è esattamente equivalente alla richiesta che i coefficienti $g_{\mu\nu}$ della forma quadratica – la cosiddetta “metrica” della varietà spazio-temporale – si trasformino come le componenti di un tensore covariante di rango due, ossia che:

$$g'_{\alpha\beta}(x') = g_{\mu\nu}(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \tag{2.18}$$

(si veda in particolare il Capitolo 3).

Se assumiamo che la geometria dello spazio-tempo soddisfi le due precedenti ipotesi otteniamo allora un modello di tipo Riemanniano: un modello che estende alle varietà con quattro (o più) dimensioni il metodo suggerito da Gauss per descrivere in modo intrinseco la geometria delle superfici bidimensionali.

È opportuno ricordare, a questo proposito, che le proprietà geometriche di una generica ipersurperficie n-dimensionale Σ_n possono essere descritte in due modi. Un modo si basa su di un approccio *estrinseco*, che consiste nell'immergere Σ_n in una varità (Euclidea o pseudo-Euclidea) esterna $\mathcal{M}_D$, con $D > n$, parametrizzata dalle coordinate X^A e con elemento di linea

$$ds^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B, \qquad A, B = 1, \ldots, D. \tag{2.19}$$

Consideriamo, per semplicità, il caso $D = n+1$. L'ipersuperficie Σ_n può essere rappresentata come un sottospazio di $\mathcal{M}_{n+1}$ individuato da una relazione che collega tra loro le $n+1$ coordinate X^A, ossia da una relazione del tipo $f(X^A) = 0$. Possiamo pensare, come esempio, alla superficie bidimensionale S_2 di una sfera di raggio $a =$ costante, che immaginiamo immersa nello spazio Euclideo tridimensionale $\mathcal{R}_3$, parametrizzato dalle coordinate Cartesiane X^i, $i = 1, 2, 3$. La superficie data è individuata dalla relazione tra le coordinate X^i data da

$$f(X^i) \equiv X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - a^2 = 0. \tag{2.20}$$

Ma c'è anche un secondo, possibile approccio, di tipo *intrinseco*, che descrive la geometria di Σ_n senza far riferimento alle coordinate X^A dello spazio esterno, utilizzando invece un sistema di coordinate ξ^μ definite sull'ipersuperficie stessa. A questo scopo si considerano le equazioni parametriche

$$X^A = X^A(\xi^\mu) \qquad \mu = 1, \ldots, n, \tag{2.21}$$

che descrivono l'immersione di Σ_n in $\mathcal{M}_{n+1}$, e si scrive l'elemento di linea (2.19) ristretto all'ipersuperficie Σ_n, imponendo cioè che le coordinate X^A soddisfino le equazioni parametriche (2.21):

$$ds^2 = \left[\eta_{AB}\frac{\partial X^A(\xi)}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial X^B(\xi)}{\partial \xi^\nu}\right] d\xi^\mu d\xi^\nu = g_{\mu\nu}(\xi) d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{2.22}$$

La variabile $g_{\mu\nu}(\xi)$, definita dai termini in parentesi quadra dell'equazione precedente, è la cosiddetta "metrica indotta" sull'ipersuperficie.

Si può quindi descrivere la geometria di Σ_n facendo unicamente riferimento alle sue coordinate intrinseche ξ^μ, a patto di definire su Σ_n un elemento di linea che – a differenza di quanto avviene per $\mathcal{M}_{n+1}$ – non è in generale Euclideo (o pseudo-Euclideo). Prendiamo ancora, come semplice esempio, la superficie sferica S_2 immersa in $\mathcal{R}_3$. Se scegliamo come coordinate intrinseche su S_2 i due angoli delle coordinate sferico-polari, $\xi^\mu = \{\theta,\varphi\}$, le equazioni parametriche $X^i(\xi^\mu)$ che collegano le coordinate Cartesiani di $\mathcal{R}_3$ a quelle di S_2 sono allora date da

$$X_1 = a\sin\theta\cos\varphi, \qquad X_2 = a\sin\theta\sin\varphi, \qquad X_3 = a\cos\theta. \tag{2.23}$$

Differenziando queste relazioni, e sostituendo nell'elemento di linea Euclideo di $\mathcal{R}_3$, si ottiene l'elemento di linea sulla superficie sferica nella forma seguente:

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \tag{2.24}$$

Rispetto alle coordinate intrinseche $\{\theta,\varphi\}$ della sfera abbiamo quindi una geometria non-Euclidea, descritta dalla metrica Riemanniana $g_{\mu\nu}(\theta,\varphi)$ con componenti

$$g_{11} = a^2, \qquad g_{22} = a^2\sin^2\theta, \qquad g_{12} = g_{21} = 0. \tag{2.25}$$

Le due ipotesi presentate all'inizio di questa sezione permettono dunque di determinare in modo intrinseco le proprietà geometriche dello spazio-tempo, introducendo su di esso una struttura metrica Riemanniana che generalizza la descrizione usata da Gauss per le superfici, indipendentemente dal numero di dimensioni attribuite alla varietà spazio-temporale.

È opportuno osservare, però, che le due precedenti ipotesi non sono le uniche possibili: ci sono altre ipotesi, meno restrittive, che portano a strutture geometriche più generali. Ad esempio, potremmo sostituire la prima ipotesi con la richiesta che l'elemento di linea invariante ds sia una forma omogenea di grado uno nei differenziali delle coordinate. Questo ci permetterebbe di esprimere ds, in generale, come $ds = F(x,dx)$, dove la funzione F soddisfa alla condizione

$$F(x,\lambda dx) = \lambda F(x,dx), \tag{2.26}$$

qualunque sia il parametro λ. Come esempio di intervallo che soddisfa questa condizione possiamo considerare, in particolare l'espressione:

$$ds = \left(dx_1^4 + dx_2^4 + \dots\right)^{1/4}. \tag{2.27}$$

La condizione (2.26) caratterizza una struttura geometrica nota sotto il nome di *geometria di Finsler*, diversa da quella di Riemann e più generale di quest'ultima. Il postulato (2.16), che caratterizza la geometria di Riemann, soddisfa infatti la condizione (2.26) come caso particolare, per cui la geometria di Riemann è un caso particolare di quella di Finsler (analogamente, la geometria di Minkowski è un caso particolare di quella di Riemann, e quindi di quella di Finsler). Viceversa, esistono intervalli ds – come quello definito in Eq. (2.27) – che soddisfano alle ipotesi di Finsler ma non a quelle di Riemann.

In vista di questi (ed altri) possibili tipi di struttura geometrica, che includono i modelli di Riemann e Minkowski all'interno di schemi con livello di generalità crescente, diventa lecito chiedersi quale sia il modello geometrico più appropriato da applicare alla varietà che rappresenta lo spazio-tempo fisico in cui viviamo. Il principio di general-covarianza ci dice che la geometria di Minkowski va generalizzata, ma non ci dice come. C'è qualche altro principio che ci può fornire indicazioni utili al riguardo?

Una risposta a questa domanda verrà presentata nella sezione successiva.

2.2 Il principio di equivalenza

Se vogliamo formulare una teoria relativistica della gravitazione allargando il principio di relatività, e generalizzando la geometria dello spazio-tempo di Minkowski, dobbiamo scegliere una struttura geometrica che sia compatibile con le proprietà dell'interazione gravitazionale.

Una delle proprietà più caratteristiche (e più importanti) di tale interazione è riassunta dal cosiddetto "principio di equivalenza", che si puòformulare come segue:

l'interazione gravitazionale è sempre localmente eliminabile,

dove *localmente* significa in un punto dato dello spazio-tempo e nel suo intorno infinitesimo. Tale proprietà è basata sul fatto che gli effetti dell'interazione gravitazionale sono indistinguibili, *localmente*, da quelli di un sistema accelerato, per cui gli effetti gravitazionali possono essere localmente eliminati semplicemente applicando un'accelerazione di intensità e segno appropriato.

È importante sottolineare che questa completa eliminazione dell'interazione, per qualunque sistema fisico dato, è possibile solo in virtù dell'*universalità* dell'accoppiamento gravitazionale. Come ben noto sin dai tempi di Galileo, infatti, tutti i corpi rispondono ad un campo gravitazionale esterno con la stessa accelerazione, il che significa che il rapporto tra la "carica" gravitazionale (cioè la massa gravitazionale) e la massa inerziale ha lo stesso valore per tutti i corpi.

La gravitazione è l'unica, tra le interazioni fondamentali, a godere di questo tipo di universalità. Per l'interazione elettromagnetica, ad esempio, il principio di equivalenza non è valido, perché corpi con cariche diverse rispondono in maniera diversa ai campi applicati: scegliendo un opportuno sistema accelerato possiamo eliminare localmente la forza che agisce su di una certa carica, ma non su *tutte* le altre cariche del sistema, che in generale sono soggette ad accelerazioni diverse. Perciò l'interazione elettromagnetica *non è* localmente eliminabile, al contrario di quella gravitazionale.

Se vogliamo rappresentare l'interazione gravitazionale introducendo nello spazio-tempo una struttura geometrica diversa da quella di Minkowski dobbiamo dunque richiedere – in accordo al principio di equivalenza – che gli effetti di questa nuova struttura siano localmente elminabili, ossia che la nuova geometria possa sempre ridursi, localmente, a quella di Minkowski.

Questa proprietà non è soddisfatta, in generale, dalla geometria di Finsler, mentre è sempre soddisfatta dalla geometria di Riemann. Infatti, se l'elemento di linea soddisfa alle proprietà (2.16), (2.17), è sempre possibile scegliere un opportuno sistema di coordinate, detto "sistema localmente inerziale", rispetto al quale la metrica di Riemann $g_{\mu\nu}$ si riduce localmente a $\eta_{\mu\nu}$ in corripondenza di un punto dato, e la geometria, nell'intorno di quel punto, ritorna ad essere di tipo Minkowskiano.

Per visualizzare geometricamente questa proprietà possiamo ricordare l'esempio della superficie sferica S_2, introdotto nella sezione precedente. La geometria intrinseca di S_2 non è Euclidea; in ogni punto di S_2, però, possiamo sempre introdurre un piano tangente, e approssimare la geometria della sfera, nell'intorno di quel punto, con la geometria Euclidea del piano. Allo stesso modo, se abbiamo uno spazio-tempo di Riemann a quattro dimensioni, possiamo sempre introdurre in ogni punto uno spazio-tempo "piatto" tangente dotato della metrica di Minkowski, e approssimare localmente la geometria di Riemann con quella tangente di Minkowski.

Per illustrare in modo più esplicito la riduzione locale di una metrica di Riemann alla forma Minkowskiana consideriamo una metrica g che soddisfa alle condizioni (2.16), (2.17), e mostriamo che possiamo sempre trovare una trasformazione di coordinate $x \to x'(x)$ tale che la metrica trasformata coincida con quella di Minkowski in un punto dato x_0, ossia che: $g'(x_0) = \eta$. Per mostrarlo possiamo prendere, per semplicità, un sistema di coordinate x' che coincida con x nel punto di riferimento x_0.

Consideriamo la trasformazione di coordinate inversa, $x = x(x')$, e sviluppiamola in serie di Taylor attorno a $x' = x_0$:

$$\begin{aligned} x^\mu(x') \simeq x_0^\mu + \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)_{x'=x_0} (x'^\nu - x_0^\nu) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right)_{x'=x_0} (x'^\alpha - x_0^\alpha)(x'^\beta - x_0^\beta) + \cdots \end{aligned} \tag{2.28}$$

Tale trasformazione risulta localmente determinata al primo ordine, nell'intorno di x_0, qualora siano noti i 16 coefficienti (costanti) della matrice

$$I^\mu{}_\nu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right)_{x'=x_0} . \tag{2.29}$$

La trasformazione della metrica per un generico cambio di coordinate, d'altra parte, è fissata dall'Eq. (2.18). Se valutiamo tale trasformazione nel punto $x' = x = x_0$, ed imponiamo la condizione $g'(x_0) = \eta$, otteniamo

$$g'_{\alpha\beta}(x_0) = I^\mu{}_\alpha I^\nu{}_\beta \, g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.30}$$

Poiché la metrica di partenza $g_{\mu\nu}$ è nota dappertutto, questa condizione fornisce un sistema di 10 equazioni per le 16 incognite che sono le componenti della matrice $I^\mu{}_\nu$. Tale sistema ammette sempre soluzioni (non tutte nulle) per i coefficienti $I^\mu{}_\nu$, per cui è sempre possibile determinare, nell'intorno del punto scelto, una trasformazione di coordinate che riduca in quel punto la metrica di partenza in forma Minkowskiana.

Si noti che il sistema di equazioni (2.30) non fissa completamente i coefficienti $I^\mu{}_\nu$, ma piuttosto determina una classe di soluzioni che dipende da $16 - 10 = 6$ parametri. La trasformazione di coordinate che ci porta alla metrica di Minkowski viene quindi definita a meno di 6 gradi di libertà arbitrari. Questa arbitrarietà corrisponde, fisicamente, alla possibilità di cambiare localmente sistema di riferimento, anche dopo aver fissato $g = \eta$, mediante una generica trasformazione di Lorentz. Tale trasformazione dipende appunto da 6 parametri e, come ben noto, non modifica la metrica di Minkowski.

Più in generale, se non avessimo imposto la coincidenza dei due sistemi di coordinate in x_0, avremmo determinato la trasformazione a meno di altri 4 parametri costanti, $x^\mu(x_0)$, che avrebbero sostituito il termine di ordine zero dello sviluppo di Taylor (2.28), e che si sarebbero aggiunti ai 6 parametri precedenti. E infatti le trasformazioni più generali che preservano la geometria di Minkowski sono quelle del gruppo di Poincarè, che include oltre alle trasformazioni di Lorentz anche le traslazioni, e che dipende appunto da $6 + 4 = 10$ parametri.

In conclusione possiamo dire che la geometria Riemanniana, grazie alle sue proprietà locali, si presenta come uno strumento idoneo a descrivere una struttura spazio-temporale che ingloba e generalizza quella della relatività ristretta in modo compatibile con il principio di equivalenza, e risulta quindi adatta, per lo meno in linea di principio, ad un'eventuale rappresentazione geometrica dell'interazione gravitazionale. Alcuni utili aspetti del formalismo e delle tecniche di calcolo da usare per lo studio delle varietà Riemanniane verrano presentati nel prossimo capitolo.

Esercizi Capitolo 2

2.1. Moto relativistico in un campo gravitazionale centrale
Ricavare l'equazione del moto (2.8) combinando le equazioni (2.5) e (2.6) che definiscono, rispettivamente, le costanti h e α.

2.2. Pseudo-sfera a quattro dimensioni
Si consideri una ipersuperficie a 4 dimensioni (con segnatura pseudo-Euclidea, $g_{\mu\nu} = (+,-,-,-)$), parametrizzata dalle coordinate intriseche $x^\mu = (ct, x^i)$, e immersa in uno spazio-tempo di Minkowski a 5 dimensioni con coordinate z^A, $A = 0,1,2,3,4$. L'ipersuperficie è descritta dalle seguenti equazioni parametriche

$$\begin{aligned} z^0 &= \frac{c}{H}\sinh(Ht) + \frac{H}{2c}e^{Ht}x_i x^i, \\ z^i &= e^{Ht}x^i, \\ z^4 &= \frac{c}{H}\cosh(Ht) - \frac{H}{2c}e^{Ht}x_i x^i, \end{aligned} \tag{2.31}$$

dove H è una costante. Si verifichi che tale ipersuperficie rappresenta una pseudo-ipersfera (o iperboloide) a 4 dimensioni, e si determini la sua metrica intrinseca, ovvero la metrica indotta su questa ipersuperficie dalle equazioni di immersione (2.31).

Soluzioni

2.1. Soluzione
Ponendo

$$\dot{r} = r'\dot{\varphi}, \qquad r' = \frac{dr}{d\varphi}, \tag{2.32}$$

possiamo riscrivere l'Eq. (2.5) nel modo seguente,

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{h^2}{r^4}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2}\dot{\varphi}^2 - \frac{r^2}{c^2}\dot{\varphi}^2\right), \tag{2.33}$$

e ricavare quindi $\dot{\varphi}^2$ nella forma:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{h^2}{r^4}\left[1 + \frac{h^2}{r^4c^2}\left(r'^2 + r^2\right)\right]^{-1}. \tag{2.34}$$

È conveniente inoltre ricavare l'inverso di γ^2 dall'Eq. (2.6):

$$\frac{1}{\gamma^2} \equiv 1 - \frac{1}{c^2}\left(r'^2 + r^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{c^4}{\left(\alpha + \frac{GM}{r}\right)^2}. \tag{2.35}$$

Sostituendo $\dot{\varphi}^2$, ed invertendo la relazione precedente, otteniamo:

$$\frac{1}{c^4}\left(\alpha + \frac{GM}{r}\right)^2 = 1 + \frac{h^2}{r^4c^2}\left(r'^2 + r^2\right). \tag{2.36}$$

Sostituiamo ora la variabile r con la variabile $u = 1/r$, tale che $r' = -u'/u^2$, e deriviamo rispetto a φ entrambi i membri dell'equazione precedente. Otteniamo così una condizione che si può scrivere:

$$u'\left(u'' + u\right) = u'\left(\frac{r_0\alpha}{2h^2} + \frac{r_0^2c^2}{4h^2}u\right), \tag{2.37}$$

dove $r_0 = 2GM/c^2$. Questa condizione ammette la soluzione banale $u' = 0$, ossia $r = \text{cost}$, che descrive una traiettoria circolare nel piano dell'orbita. Se escludiamo il caso di orbite circolari, e supponiamo $u' \neq 0$, possiamo dividere per u' e arriviamo infine all'equazione

$$u'' + u = \frac{r_0\alpha}{2h^2} + \frac{r_0^2c^2}{4h^2}u, \tag{2.38}$$

che con le definizioni (2.9) si riduce esattamente all'equazione del moto (2.8).

2.2. Soluzione

Elevando al quadrato le coordinate z^A definite in Eq. (2.31), e contraendole con la metrica di Minkowski della varietà a 5 dimensioni, si trova facilmente che l'ipersuperficie considerata soddisfa l'equazione

$$\eta_{AB}z^Az^B = \left(z^0\right)^2 - \left(z^1\right)^2 - \left(z^2\right)^2 - \left(z^3\right)^2 - \left(z^4\right)^2 = -\frac{c^2}{H^2} = \text{cost.} \tag{2.39}$$

Questa equazione descrive una pseudo-sfera a 4 dimensioni di raggio $R = c/H$ (si confronti infatti questo risultato con l'Eq. (2.20) che descrive una superficie sferica bidimensionale). A causa del carattere pseudo-Euclideo della metrica esterna, le sezioni spazio-temporali di questa ipersuperficie – ad esempio, le sezioni con $z^2 = z^3 = z^4 = 0$ – rappresentano iperboli anziché cerchi. L'ipersuperficie considerata può quindi essere interpretata come un iperboloide di rotazione a 4 dimensioni.

La sua metrica intrinseca $g_{\mu\nu}$, indotta dalle equazioni parametriche $z^A = z^A(x^\mu)$, è definita, in accordo all'Eq. (2.22), come

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial z^A}{\partial x^\mu}\frac{\partial z^B}{\partial x^\nu}\eta_{AB}. \tag{2.40}$$

Derivando rispetto a x^μ le relazioni $z^A(x^\mu)$ fornite dalle equazioni (2.31) otteniamo facilmente

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z^0}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{\partial z^i}{\partial t}\right|^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z^4}{\partial t}\right)^2 = 1, \\ g_{ij} &= \frac{\partial z^0}{\partial x^i}\frac{\partial z^0}{\partial x^j} - \frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial z^l}{\partial x^j}\delta_{kl} - \frac{\partial z^4}{\partial x^i}\frac{\partial z^4}{\partial x^j} = -\delta_{ij}e^{2Ht}, \\ g_{0i} &= 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

L'elemento di linea intrinseco dell'iperboloide a 4 dimensioni, nelle coordinate prescelte, è dunque dato da

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - e^{2Ht} |d\boldsymbol{x}|^2 . \tag{2.42}$$

Esso rappresenta una possibile parametrizzazione della cosiddetta geometria di de Sitter (si veda ad esempio il testo [2] della Bibliografia finale), che ha importanti applicazioni in un contesto cosmologico (si veda ad esempio il testo [22]).

http://www.springer.com/978-88-470-5689-3

Relatività Generale e Teoria della Gravitazione
Gasperini, M.
2015, XIX, 363 pagg. 10 figg., Hardcover
ISBN: 978-88-470-5689-3