Lokale Cauchy'sche Theorie

2

2.1 Wegintegrale

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechung besagt für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Interval $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, dass

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

eine Stammfunktion von f auf (a, b) ist (und jede Stammfunktion sich hiervon nur um eine Konstante unterscheidet). Für die Übertragung in die komplexe Ebene benötigen wir einen geeigneten Integralbegriff.

Definition 2.1.1

Eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *Integrationsweg* (fortan auch einfach kurz *Weg* genannt); die Bildmenge $[\gamma] = \gamma([a, b])$ heißt *Träger* und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *Parameterintervall* des Wegs. Stimmen Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ überein, so nennen wir den Weg *geschlossen*. Ist $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ stetig, so definiert

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

das *Wegintegral*[1] von f über γ.

Dabei zerlegen die (endlich vielen) Sprungstellen von γ' das Parameterintervall in Teilintervalle, und wir verstehen das definierende Integral als Summe über diese Teile. So

[1] Der aus dem Begriff des Wegintegrals entwickelte Aufbau der Funktionentheorie heißt zu Ehren seines Pioniers „Cauchy'scher Standpunkt".

F. Bornemann, *Funktionentheorie*, Mathematik Kompakt, DOI 10.1007/978-3-0348-0974-0_2

lassen sich (wie etwa in Abb. 2.2) ganz bequem die auch praktisch bedeutsamen Wege mit „Ecken" benutzen.

Der entscheidende Punkt dieser Integraldefinition ist ihre Invarianz gegenüber einer Reparametrisierung $\phi : [a_1, b_1] \to [a, b]$ (d.h. gegenüber einer monoton wachsenden, stetig differenzierbaren Abbildung): Nach der Substitutionsregel gilt nämlich für den reparametrisierten Weg $\gamma_1 = \gamma \circ \phi$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\phi(t)))\,\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Wir nennen zwei solche Wege γ_1 und γ *äquivalent*. Insbesondere sehen wir, dass sich das Parameterintervall durch eine (z.B. affine) Reparametrisierung stets frei wählen lässt. Wenn also beispielsweise der Endpunkt von γ_1 mit dem Anfangspunkt von γ_2 übereinstimmt, können wir die Parameterintervalle in der Form $[a, b]$ und $[b, c]$ wählen und beide Wege nacheinander als einen Weg $\gamma : [a, c] \to \mathbb{C}$ durchlaufen, für den dann

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \qquad (f : [\gamma] \to \mathbb{C} \text{ stetig})$$

gilt; wir schreiben $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ und sprechen vom *Summenweg*. Durchlaufen wir den Weg γ in umgekehrter Richtung, also von seinem Endpunkt zum Anfangspunkt, so ensteht ein Weg γ_1, der für das Parameterintervall $[0, 1]$ durch $\gamma_1(t) = \gamma(1 - t)$ beschrieben wird. Hier gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\gamma'(1-t)\,dt$$

$$= -\int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Wir nennen dieses γ_1 den *Umkehrweg* und schreiben $\gamma_1 = -\gamma$.

Spezialfälle

- Der geschlossene Weg $\gamma(\theta) = \zeta + re^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) umläuft die Kreislinie $\partial B_r(\zeta)$ einmal im positiven Umlaufsinn; wir schreiben (und berechnen)

$$\int_{\partial B_r(\zeta)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f(\zeta + re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta. \tag{2.1.1}$$

Hieran lesen wir sofort ab, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{dz}{z} = 1. \tag{2.1.2}$$

- Die (orientierte) Strecke, die $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ verbindet, wird durch den Weg

  $$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \qquad (t \in [0,1])$$

  beschrieben; wir bezeichnen sie mit $[z_0, z_1]$. Das Wegintegral ist

  $$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = (z_1 - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))\,dt; \tag{2.1.3}$$

  der Umkehrweg ist $-[z_0, z_1] = [z_1, z_0]$.
- Es bezeichne $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ das von den Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene aufgespannte kompakte Dreieck. Wir definieren

  $$\partial\Delta = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$$

  als den geschlossenen Weg, welcher den Rand des Dreiecks in der durch die Reihenfolge z_1, z_2, z_3 gegebenen Orientierung durchläuft.

Definition 2.1.2
Ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig (Sterngebiet)* bezüglich des *Zentrums* $z_* \in U$, falls $[z_*, z] \subset U$ für alle $z \in U$. *Konvexe* Gebiete sind sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte.

Standardabschätzung Wegintegrale lassen sich effektiv wie folgt abschätzen:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt \leq \max_{t\in[a,b]} |f(\gamma(t))| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Im Integral über $|\gamma'|$ erkennen wir die Definition der Länge von γ wieder. Wir halten diese nützliche Abschätzung in Form eines Lemmas fest.

Lemma 2.1.3 *Es sei γ ein Weg und $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \|f\|_\gamma \cdot L(\gamma), \qquad \|f\|_\gamma = \max_{z\in[\gamma]} |f(z)|. \tag{2.1.4}$$

Hierbei ist $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ die (euklidische) Länge von $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

2.2 Stammfunktionen

Besitzt die stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F \in H(U)$, so gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechung

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

für jeden Weg $\gamma : [a,b] \to U$. Der Wert des Integrals hängt dann also nur von den Endpunkten des Weges ab, ist aber ansonsten *wegunabhängig*. Für einen *geschlossenen* Weg γ erhalten wir somit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Dieser Spezialfall reicht bereits für die Wegunabhängigkeit: Teilen sich γ_1 und γ_2 Anfangs- und Endpunkt, so ist $\gamma_1 - \gamma_2$ ein geschlossener Weg.

Beispiel
Der Definitionsbereich U von z^n $(n \in \mathbb{Z})$ ist für $n \geq 0$ ganz $\mathbb{C}$, für $n < 0$ die *punktierte* komplexe Ebene $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $n \neq -1$ besitzt z^n die Stammfunktion $z^{n+1}/(n+1)$, so dass für jeden *geschlossenen* Weg in U

$$\int_\gamma z^n\,dz = 0 \qquad (n \neq -1). \tag{2.2.1}$$

Das Wegintegral (2.1.2) von z^{-1} zeigt hingegen, dass es geschlossene Wege γ in $\mathbb{C}^\times$ gibt, für die

$$\int_\gamma z^{-1}\,dz \neq 0;$$

daher besitzt z^{-1} in $\mathbb{C}^\times$ *keine* Stammfunktion.

Die Wegunabhängigkeit ist nicht nur notwendig, sondern nützlicherweise auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion:

Satz 2.2.1 *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:*

(i) *f besitzt eine holomorphe Stammfunktion;*
(ii) *für jeden geschlossenen Weg in U gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{2.2.2}$$

Ist (ii) erfüllt, so liefert nämlich

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (\gamma_z \textit{ verbindet ein festes } z_* \in U \textit{ mit } z) \tag{2.2.3}$$

eine Stammfunktion von f. Ist U ein Sterngebiet, so ist (ii) äquivalent zu:

(ii′) *für jedes kompakte Dreieck $\Delta \subset U$ gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Beweis Da wir „(i) ⇒ (ii)" bereits zu Beginn des Abschnitts bewiesen haben, wenden wir uns „(ii) ⇒ (i)" zu. Zur Definition (2.2.3) der Funktion F denken wir uns jedes $z \in U$ durch einen irgendwie gewählten Weg γ_z mit dem Anfangspunkt z_* verbunden;[2] Ziel ist es, $F'(w) = f(w)$ für $w \in U$ zu zeigen. Dazu wählen wir $B = B_r(w) \subset U$ und erhalten für $z \in B$, indem wir die Voraussetzung (ii) auf den geschlossenen Weg $-\gamma_z + \gamma_w + [w, z]$ anwenden,

$$F(z) = F(w) + \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Für $z \neq w$ ist daher nach (2.1.3)

$$\frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) = \frac{1}{z - w} \int_{[w,z]} \left(f(\zeta) - f(w)\right)\, d\zeta,$$

so dass die Standardabschätzung (2.1.4) wegen $L([w, z]) = |z - w|$ und wegen der Stetigkeit von f schließlich die Behauptung $F'(w) = f(w)$ liefert:

$$\left| \frac{F(z) - F(w)}{z - w} - f(w) \right| \le \max_{\zeta \in [w,z]} |f(\zeta) - f(w)| \to 0 \qquad (z \to w).$$

Für ein Sterngebiet U mit Zentrum z_* kann $\gamma_z = [z_*, z]$ gewählt werden. Dann ist $-\gamma_z + \gamma_w + [w, z]$ der orientierte Rand des Dreiecks $\Delta(z, z_*, w)$ und für z hinreichend nahe bei w gilt zudem $\Delta(z, z_*, w) \subset U$. Somit reicht die Voraussetzung (ii′) bereits aus, um (i) zu zeigen. □

[2] Wegen der Wegunabhängigkeit definiert *jeder* solche Weg tatsächlich *dasselbe* F.

2.3 Lokaler Integralsatz

Wegunabhängigkeit ist lokal *äquivalent* zur Holomorphie. Wir beginnen mit der für den Aufbau der Theorie grundlegenden Richtung dieser Äquivalenz.

Lemma 2.3.1 (Goursat-Pringsheim) *Es sei $f \in H(U)$. Dann gilt für jedes kompakte Dreieck $\Delta \subset U$, dass*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Beweis Wir unterteilen Δ durch Halbierung seiner Seiten in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^4$ und orientieren den Rand der Teildreiecke im gleichen Umlaufsinn wie bei Δ selbst (siehe Abb. 2.1). Dann gilt

$$J = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\,dz,$$

da die Seiten im Inneren von Δ genau zweimal in jeweils entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und sich die zugehörigen Wegintegrale also gegenseitig aufheben. Bezeichnen wir mit Δ_1 dasjenige Teildreieck, das den betragsgrößten Beitrag zur Summe liefert, so gilt

$$|J| \le 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \right|.$$

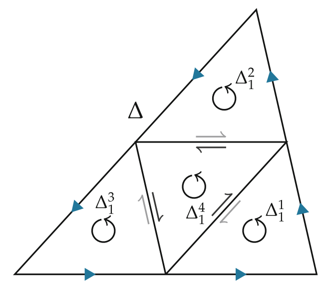
Weiter ist der Umfang $L(\partial\Delta_1) = 2^{-1}L$, wenn wir mit $L = L(\partial\Delta)$ denjenigen des Ausgangsdreiecks bezeichnen. Iterativ konstruieren wir so eine Folge *kompakter* Dreiecke $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$ mit $L(\partial\Delta_n) = 2^{-n}L$, für die

$$|J| \le 4^n \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wegen der Kompaktheit (Cantor'scher Durchschnittssatz) ist der Schnitt aller Dreiecke der Folge nichtleer und enthält den (eindeutigen) Punkt $w \in \Delta$. Nach Voraussetzung ist f in w komplex differenzierbar, so dass gilt

$$f(z) = f(w) + f'(w)(z-w) + (z-w)\rho(z), \qquad \rho(z) = o(1) \text{ für } z \to w.$$

Abb. 2.1 Normalunterteilung eines Dreiecks Δ mit Umlaufsinn der Ränder



Der „Trick" ist nun, dass das lineare Polynom $z \mapsto f(w) + f'(w)(z - w)$ eine Stammfunktion besitzt und somit aus Satz 2.2.1

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} (z - w)\rho(z)\,dz$$

folgt. Weil für $z \in \Delta_n$ elementargeometrisch $|z - w| \le L(\partial\Delta_n)$ gilt, liefert die Standardabschätzung (2.1.4)

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} (z - w)\rho(z)\,dz\right| \le 4^{-n} L^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n} |\rho(z)|,$$

so dass $|J| \le L^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta_n} |\rho(z)| = o(1) \to 0$ für $n \to \infty$; also ist $J = 0$. □

Setzen wir das Goursat-Pringsheim'sche Lemma 2.3.1 mit Satz 2.2.1 zusammen, so gelangen wir zum ersten fundamentalen Ergebnis dieses Kapitels.

Satz 2.3.2 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete) *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich $z_* \in U$ sternförmiges Gebiet und $f \in H(U)$. Dann ist*

$$F(z) = \int_{[z_*,z]} f(\zeta)\,d\zeta \qquad (z \in U)$$

eine Stammfunktion von f in U, und es gilt für jeden geschlossenen Weg γ in U

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bemerkung 2.3.3 Für allgemeine Bereiche $U \subset \mathbb{C}$ und $f \in H(U)$ lässt sich der Satz zumindest *lokal* anwenden, da es zu jedem Punkt $w \in U$ eine sternförmige (sogar

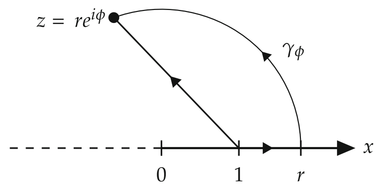


Abb. 2.2 Pfad zur Berechnung des Haupteils Log vom komplexen Logarithmus

konvexe) Umgebung $B = B_r(w) \subset U$ gibt. Somit besitzt f in B eine Stammfunktion $F_B \in H(B)$; F_B heißt *lokale* Stammfunktion von f.

Beispiel (Komplexer Logarithmus)
Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist zwar in der punktierten Ebene $\mathbb{C}^\times$ holomorph, besitzt dort aber nach Abschn. 2.2 *keine* Stammfunktion ($\mathbb{C}^\times$ ist also insbesondere *kein* Sterngebiet). Die Obstruktion liegt in jenen Wegen, welche die Singularität $z = 0$ umrunden: Um die Möglichkeit solcher Wege zu unterbinden, müssen wir aus der komplexen Ebene mehr als nur den Punkt $z = 0$ entfernen. So werden wir auf die längs der negativen reellen Achse *aufgeschnittene* komplexe Ebene[3]

$$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

geführt, ein *Sterngebiet* bezüglich des Zentrums $z_* = 1$. Es gilt $f \in H(\mathbb{C}^-)$ und der Cauchy'sche Integralsatz 2.3.2 liefert in $\mathbb{C}^-$ die Stammfunktion

$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (z \in \mathbb{C}^-).$$

Das so definierte Log $\in H(\mathbb{C}^-)$ heißt *Hauptzweig* des komplexen Logarithmus. Für $z = re^{i\phi} \in \mathbb{C}^-$ ist $r = |z| > 0$ und $\phi = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$; wir können daher den Wert von $\operatorname{Log} z$ bequem berechnen, indem wir die Wegunabhängigkeit nutzen und $[1, z]$ durch $[1, r] + W_\phi$ ersetzen, wobei W_ϕ den orientierten Kreisbogen von r zu $re^{i\phi}$ bezeichne (siehe Abb. 2.2):

$$\operatorname{Log} z = \int_{[1,r]} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{W_\phi} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^r \frac{d\rho}{\rho} + \int_0^\phi \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = \log r + i\phi.$$

Tatsächlich ist Log in $\mathbb{C}^-$ eine Rechtsinverse der Exponentialfunktion,

$$\exp(\operatorname{Log} z) = \exp(\log r + i\phi) = e^{\log r} e^{i\phi} = re^{i\phi} = z \qquad (z \in \mathbb{C}^-),$$

ebenso die in $\mathbb{C}^-$ holomorphen Funktionen $\operatorname{Log} z + 2\pi i n$ ($n \in \mathbb{Z}$), die *Nebenzweige* des komplexen Logarithmus. Wir schreiben $\log z$, wenn wir den Zweig nicht näher spezifizieren wollen. Mit Hilfe des Logarithmus lässt sich auch die komplexe Potenzfunktion definieren: Für den Exponenten $\alpha \in \mathbb{C}$ ist der in $\mathbb{C}^-$ *holomorphe* Hauptzweig gegeben durch $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$.

[3] Die Wahl der vom Ursprung ausgehenden Halbgeraden, entlang derer die komplexe Ebene aufgeschnitten wird, ist letztlich willkürlich und muss ggf. angepasst werden; so etwa, wenn wir mit dem komplexen Logarithmus für z in einer Umgebung der negativen reellen Achse operieren wollen – beispielsweise in (6.1.1).

2.4 Ketten, Zyklen und Zerlegungen

Es ist häufig zweckmäßig, Funktionen statt über einzelne Wege über Systeme von Wegen zu integrieren (wie sie etwa als getrennte Ränder eines Kreisrings auftreten).

Definition 2.4.1

Wir definieren eine *Kette* Γ von Wegen γ_j als endliche ganzzahlige Linearkombinationen der Form

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j \qquad (n_j \in \mathbb{Z}). \tag{2.4.1}$$

Eine Kette geschlossener Wege heißt *Zyklus*.[4] Die Schreibweise ist rein *formal*, und wir addieren zwei Ketten, indem wir ihre Koeffizienten addieren:

$$\Gamma_1 = \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = 2\gamma_2 - \gamma_3 + 5\gamma_4$$

führen beispielsweise auf die Summe

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \gamma_1 + 2\gamma_3 + 5\gamma_4.$$

Die Reihenfolge der Teilwege spielt dabei keine Rolle, so dass die Ketten unter dieser Addition eine *abelsche* Gruppe bilden. Der *Träger* ist $[\Gamma] = \bigcup_j [\gamma_j]$, die Länge $L(\Gamma) = \sum_j |n_j| L(\gamma_j)$ und wir integrieren über die Kette mittels

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \qquad (f : [\Gamma] \to \mathbb{C} \text{ stetig}).$$

Da die zugehörigen Integrale für alle stetigen Funktionen gleich sind, dürfen wir den Summenweg $\gamma_1 + \gamma_2$ aneinander angrenzender Wege γ_1 und γ_2 mit der genauso geschriebenen Kette *identifizieren*; Entsprechendes gilt für den Umkehrweg $-\gamma$. Allgemein identifizieren wir zwei Ketten Γ_1 und Γ_2, falls $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$ für alle auf den Trägern stetigen f und schreiben auch dann noch $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Gilt (2.4.1), so nennen wir Γ in die Wege γ_j *zerlegbar*.

Diese Begriffsbildung erlaubt uns eine einfache, aber wirkungsvolle Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete 2.3.2.

[4] Ketten und Zyklen sind Spezialfälle allgemeinerer Konzepte aus der *Homologietheorie* in der Algebraischen Topologie.

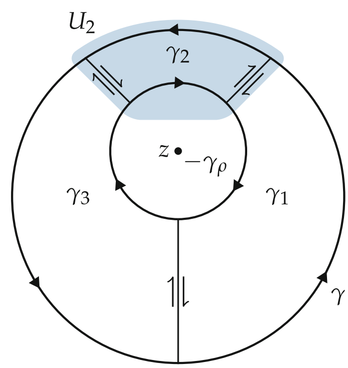


Abb. 2.3 Zerlegung des aus zwei Kreislinien gebildeten Zyklus $\Gamma = \gamma - \gamma_\rho$

Satz 2.4.2 (Cauchy'scher Integralsatz für zerlegbare Zyklen) *Es sei $f \in H(U)$. Ist der Zyklus Γ in geschlossene Wege γ_j zerlegbar, von denen jeder in einem eigens zugeordneten Sterngebiet $U_j \subset U$ getragen wird, so gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Beweis Wenden wir Satz 2.3.2 auf U_j an, so erhalten wir $\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0$. □

Beispiel (Zentrierung)
Wir betrachten $f \in H(U \setminus \{z\})$ für $z \in U$. Ist B eine offene Kreisscheibe mit $z \in B$ und $\overline{B} \subset U$, so gilt i. Allg.

$$\int_{\partial B} f(\zeta)\,d\zeta \neq 0.$$

Falls z nicht Mittelpunkt von B ist, macht die *direkte* Berechnung dieses Integrals typischerweise Schwierigkeiten. Der Cauchy'sche Integralsatz erlaubt aber, das Integral *indirekt* zu berechnen, indem wir ∂B durch eine *zentrierte* Kreislinie $\partial B_\rho(z)$ mit $B_\rho(z) \subset B$ ersetzen:

$$\int_{\partial B} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\partial B_\rho(z)} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{2.4.2}$$

Um das zu verstehen, bezeichnen wir die positiv durchlaufenen Kreislinien mit γ bzw. γ_ρ und zerlegen den Zyklus $\Gamma = \gamma - \gamma_\rho$ nach Abb. 2.3 in $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Da sich jeder der drei geschlossenen Wege γ_j offensichtlich in einem sternförmigen (ja sogar konvexen) Gebiet $U_j \subset U \setminus \{z\}$ befindet, liefert Satz 2.4.2 $\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ und damit sofort (2.4.2). Auf diese Weise bekommen wir beispielsweise aus (2.1.2)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1 \qquad (B \text{ offene Kreisscheibe mit } z \in B). \tag{2.4.3}$$

Die Zentrierung liefert eine Vorstufe des Riemann'schen Hebbarkeitssatzes 3.5.2:

Korollar 2.4.3 *Es sei $f \in H(U \setminus \{z\})$ für ein $z \in U$. Ist f um z beschränkt*[5], *so gilt*

$$\int_{\partial B} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \qquad (B \text{ offene Kreisscheibe mit } z \in B,\ \overline{B} \subset U).$$

Beweis Nach Voraussetzung gilt $\|f\|_{\partial B_\rho(z)} \leq M$ für hinreichend kleine ρ. Für solche ρ gilt mit Zentrierung gemäß (2.4.2) nach der Standardabschätzung (2.1.4)

$$\left| \int_{\partial B} f(\zeta)\, d\zeta \right| = \left| \int_{\partial B_\rho(z)} f(\zeta)\, d\zeta \right| \leq \|f\|_{\partial B_\rho(z)} \cdot 2\pi\rho \leq 2\pi\rho M.$$

Der Grenzübergang $\rho \to 0$ zeigt die Behauptung. □

2.5 Integralformeln

Das zweite fundamentale Ergebnis dieses Kapitels zeigt, wie *holomorphe* Funktionen bereits durch ganz „wenige" Funktionswerte festgelegt sind.

Satz 2.5.1 (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben) *Es sei B eine offene Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset U$. Dann gilt für $f \in H(U)$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (z \in B). \tag{2.5.1}$$

Beweis Wir fixieren $z \in B$ und betrachten die Funktion

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in U \setminus \{z\}; \\ f'(\zeta), & \zeta = z. \end{cases}$$

Es ist g holomorph in $U \setminus \{z\}$, darüber hinaus stetig in U und daher beschränkt um z. Nach Korollar 2.4.3 gilt $\int_{\partial B} g(\zeta)\, d\zeta = 0$, so dass mit (2.4.3)

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z)$$

und somit die Behauptung folgt. □

[5] „um X" = in einer offenen Umgebung von X

Mit Hilfe der Parametrisierung (2.1.1) bringen wir (2.5.1) für zentrierte Kreisscheiben in die äquivalente Form der *Mittelwertgleichung*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta \qquad (\overline{B}_r(z) \subset U); \tag{2.5.2}$$

woraus sofort die *Mittelwertungleichung* $|f(z)| \le \|f\|_{\partial B_r(z)}$ folgt (vgl. Aufgabe 8 in Kap. 1).

Jetzt können wir die angekündigte Umkehrung von Satz 1.5.2 beweisen.

Korollar 2.5.2 (Entwicklungssatz) *Jedes $f \in H(U)$ ist durch Potenzreihen darstellbar.*[6] *Ist nämlich $B_r(z_0) \subset U$, so gilt für $z \in B = B_\rho(z_0)$ $(0 < \rho < r)$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{2.5.3a}$$

Insbesondere ist $f^{(n)} \in H(U)$, und es gelten die Cauchy'schen Integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (z \in B, n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.5.3b}$$

Beweis Für festes $z \in B = B_\rho(z_0)$ konvergiert die geometrische Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

gleichmäßig in $\zeta \in \partial B$. Also dürfen wir Wegintegration und Reihenbildung in (2.5.1) vertauschen und erhalten die behauptete Taylorentwicklung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^n.$$

Da eine Potenzreihe nach Satz 1.5.2 gliedweise differenziert werden darf, ist f *beliebig oft* komplex differenzierbar. Aus der Taylor'schen Formel (1.5.5) gelangen wir nach Zentrierung gemäß (2.4.2) schließlich zu (2.5.3b). □

[6] Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, die sich um jeden Punkt des Bereichs $U \subset \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, wird (komplex) *analytisch* genannt. Der Entwicklungssatz 2.5.2 und Satz 1.5.2 besagen, dass Holomorphie und Analytizität einer Funktion äquivalente Eigenschaften sind. Beide Begriffe werden daher oft synonym verwendet.

Beispiel
Wegen $\cos 0 = 1 \neq 0$ ist $\tan z = \sin z / \cos z$ in einer Umgebung von $z_0 = 0$ holomorph und lässt sich als ungerade Funktion somit in eine Potenzreihe der Form

$$\tan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z + \frac{2z^3}{3!} + \frac{16z^5}{5!} + \frac{272z^7}{7!} + \cdots \qquad (z \in B_R(0)) \tag{2.5.4}$$

entwicklen. Ihr Konvergenzradius $R > 0$ ist dabei ganz einfach durch den größten Kreis $B_R(0)$ bestimmt, in dem $\tan z$ noch holomorph ist. Als Quotient zweier ganzer Funktionen ist $\tan z$ in $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners $\cos z$ holomorph: also überall bis auf $z \in \pi/2 + \pi\,\mathbb{Z}$ (siehe Aufgabe 18). So erhalten wir unmittelbar $R = \pi/2$, ohne dass irgendeine Kenntnis über die Koeffizienten A_{2n+1} nötig gewesen wäre. Setzen wir dieses R in die Cauchy-Hadamard'sche Formel (1.5.2) ein, so gelangen wir ohne jede nennenswerte Rechnung zu

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{|A_{2n+1}|}{(2n+1)!}} = \frac{2}{\pi},$$

ein Ergebnis, das mit reellen Techniken nicht (zumindest nicht *so* einfach) zu erhalten gewesen wäre. Durch eine Verfeinerung unserer Überlegungen werden wir später eine wesentlich genauere Asymptotik zeigen können:[7]

$$\frac{A_{2n+1}}{(2n+1)!} \simeq 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2} \qquad (n \to \infty). \tag{2.5.5}$$

Bemerkung 2.5.3 Der Entwicklungssatz führt uns noch auf einen weiteren, „Weierstraß'schen" Beweis für die Existenz *lokaler* Stammfunktionen holomorpher Funktionen: Dazu entwicklen wir $f \in H(U)$ in $B = B_r(z_0) \subset U$ zunächst in die Potenzreihe (1.5.1) und bilden dann aus den Stammfunktionen der Glieder die (nach dem Wurzelkriterium ebenfalls in B konvergente) Reihe

$$F_B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1} \qquad (z \in B).$$

Nach Satz 1.5.2 ist $F_B \in H(B)$; gliedweise Differentiation liefert $F_B' = f$ in B.

[7] Mit einem Koeffizientenvergleich lässt sich aus $\frac{d}{dz}\tan z = 1 + \tan^2 z$ eine Rekursionsformel für die A_{2n+1} gewinnen, nämlich

$$A_1 = 1, \qquad A_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{2n}{2j-1} \cdot A_{2j-1} \cdot A_{2n-2j+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Hiermit wird die Anzahl A_{2n+1} *alternierender* Permutationen der Ordnung $2n+1$ beschrieben; $\tan z$ ist also die zugehörige (exponentiell) *erzeugende Funktion*. Das Studium der Singularitäten solcher erzeugender Funktionen in der komplexen Ebene ist eine zentrale Methode der *analytischen Kombinatorik*, um zur asymptotischen Abzählung diskreter Objekte zu gelangen; mehr dazu in Abschn. 4.3.

Da holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind, folgt aus der Existenz lokaler Stammfunktionen von f, dass f holomorph sein muss. Lokale Anwendung von Satz 2.2.1 liefert daher sofort die folgende Umkehrung des Goursat-Pringsheim'schen Lemmas 2.3.1:

Lemma 2.5.4 (Satz von Morera) *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig auf einem Bereich $U \subset \mathbb{C}$, und es gelte für jedes kompakte Dreieck $\Delta \subset U$*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Dann ist $f \in H(U)$.

2.6 Aufgaben

1. Es sei $g : \hat{U} \to U$ holomorph mit (stetiger) Ableitung g'; es sei $\hat{\gamma}$ ein Integrationsweg in $\hat{U}$ und $\gamma = g \circ \hat{\gamma}$ der Bildweg in U. Zeige die Transformationsformel

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\hat{\gamma}} f(g(\zeta))g'(\zeta)\, d\zeta \qquad (f : [\gamma] \to \mathbb{C} \text{ stetig}).$$

2. Zeige für $f, g \in H(U)$ und γ geschlossener Weg in U die *partielle Integration*

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)\, dz = -\int_{\gamma} f(z)g'(z)\, dz.$$

3. Zeige, dass die Standardabschätzung (2.1.4) strikt ist, falls $|f(z)| < \|f\|_{\gamma}$ für ein $z \in [\gamma]$. Folgere die Ungleichung

$$|e^z - 1| < |z| \qquad (z \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re} z < 0).$$

Hinweis: Integriere die Exponentialfunktion entlang von $[0, z]$.

4. Es sei $p(z)$ ein komplexes Polynom. Zeige für $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \overline{p(\zeta)}\, d\zeta = r^2\, \overline{p'(z)}.$$

Vergleiche mit $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} p(\zeta)\, d\zeta$.

5. Berechne das Integral

$$\int_{\gamma} z e^{z^2}\, dz$$

für den Weg, welcher 0 und $1 + i$ entlang der Parabel $y = x^2$ verbindet.

6. Es sei $f \in H(U)$ und $\Pi \subset U$ ein (nicht unbedingt sternförmiges) abgeschlossenes Polygon. Fasse den Rand $\partial\Pi$ als einen geschlossenen Polygonzug auf und zeige

$$\int_{\partial\Pi} f(z)\,dz = 0.$$

Hinweis: Abb. 2.1 sollte der Inspiration dienen.

7. Es sei $f \in H(U)$ und B eine offene Kreisscheibe mit $\overline{B} \subset U$. Berechne für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial B$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

8. Berechne:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz, \qquad \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2i-z)(z-i/2)}, \qquad \frac{1}{i}\int_{|z|=1/2} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)}\,dz.$$

9. Zähle für $f : U \to \mathbb{C}$ möglichst viele zu $f \in H(U)$ äquivalente Eigenschaften auf.

10. Berechne für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}+ni\theta}\,d\theta.$$

11. Eine auf dem Bereich U definierte Funktion f, die (2.5.2) erfüllt, besitzt die *Mittelwerteigenschaft*. Zeige: Für $f \in H(U)$ besitzen $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ und $\overline{f}$ die Mittelwerteigenschaft.

12. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Log}(\exp z) = z$?

13. Welche der Ausdrücke i^i, $\log i$ und $\log(-1)$ sind für die Hauptzweige von Logarithmus und Potenzfunktion definiert? Berechne ggf. ihre Werte.

14. Berechne $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{Im} \operatorname{Log}(x + i\varepsilon)$ für $x \in \mathbb{R}$.

15. Definiere eine *holomorphe* Wurzelfunktion, für die $\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{-1} = i$.

16. Berechne die m-te Stammfunktion f von Log in $\mathbb{C}^-$ (d.h. $f^{(m)}(z) = \operatorname{Log}(z)$).

17. Zeige, dass die Gleichung $e^z = 1$ im geschlossenen Streifen $-\pi \le \operatorname{Im} z \le \pi$ nur die Lösung $z = 0$ besitzt. Bestimme sämtliche Lösungen in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Nutze den Hauptzweig des Logarithmus und die Periodizität von e^z.

18. Folgere aus Aufgabe 17, dass die Funktion $\sin z$ in der komplexen Ebene genau die Nullstellen $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ besitzt. Bestimme die Nullstellen von $\cos z$ in $\mathbb{C}$.

19. Zeige: $1/(1+z^2)$ hat in $\mathbb{E}$ eine eindeutige Stammfunktion f mit $f(0) = 0$; ferner:
    (i) $f(x) = \arctan(x)$ für $x \in (-1, 1)$;
    (ii) mit Hilfe von (1.2.2):

$$f(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \in \mathbb{E});$$

    Hinweis: $z \mapsto (1+iz)/(1-iz)$ bildet $\mathbb{E}$ biholomorph auf $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^-$ ab.
    (iii) mit Hilfe von (ii): f ist Rechtsinverse von tan, d.h. $\tan(f(z)) = z$ für $z \in \mathbb{E}$.
    Wir nennen $f(z) = \operatorname{Arctan}(z)$ Hauptzweig der komplexen Arkustangensfunktion.

20. Für $f \in H(\mathbb{C})$ und festes $w \in \mathbb{C}$ definiere $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w}, & z \neq w; \\ f'(w), & z = w. \end{cases}$$

    Benutze den Entwicklungssatz 2.5.2, um $g \in H(\mathbb{C})$ zu zeigen.

21. Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ sind definiert durch die Rodrigues-Formel

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{2.6.1}$$

    Leite aus der Cauchy'schen Integralformel die Schläfli'sche Integraldarstellung

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z)} \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{2^n (\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta \qquad (r > 0)$$

    her und daraus mit der speziellen Wahl $r = \sqrt{|z^2 - 1|}$ das erste Laplace'sche Integral

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos\theta)^n \, d\theta \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

22. Es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}^\times$. Zeige:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_1^n + \cdots + a_k^n|} = \max_{j=1,\ldots,k} |a_j|.$$

http://www.springer.com/978-3-0348-0974-0

Funktionentheorie
Bornemann, F.
2016, XII, 152 S. 18 Abb.,
ISBN: 978-3-0348-0974-0
A product of Birkhäuser Basel