Vorwort

Die Theorie der holomorphen Funktionen einer komplexen Veränderlichen gehört zu den *Klassikern* des Curriculums, exemplarisch in Nützlichkeit und Eleganz. Leider wird sie in manchen mathematischen Studiengängen, nicht zuletzt durch den Bologna-Prozess, zugunsten „moderneren" Stoffes an den Rand gedrängt, so dass funktionentheoretische Methoden von Studierenden der Physik und Elektrotechnik heute zuweilen besser beherrscht werden als von solchen der Mathematik.

Letzterem möchte ich entgegenwirken und versuchen, auf knappem Raum nachhaltig für die Funktionentheorie und ihre methodische Kraft zu werben. Ich kann der überwältigenden Fülle exzellenter Lehrbücher zwar kaum Wesentliches hinzufügen, dafür aber die Stoffauswahl zeitgemäß und möglichst ökonomisch für die typischen Bedarfe einer zweistündigen Vorlesung im zweiten Studienjahr und eines anschließenden Seminars kompilieren: „Die größte Schwierigkeit bei der Planung eines Lehrbuches der Funktionentheorie liegt in der Auswahl des Stoffes. Man muß sich von vornherein entschließen, alle Fragen wegzulassen, deren Darstellung zu große Vorbereitungen verlangt." So schrieb es 1950 der berühmte Münchener Mathematiker Constantin Carathéodory [12] im Vorwort seines rund 300-seitigen Lehrbuches.

Mein Motto war dabei: „Funktionentheorie spart Rechnungen". Begriffliche Beweise werden solchen mit elementaren, aber aufwändigen Rechnungen vorgezogen; der Fokus liegt dabei auf Ideen und Konzepten, kein Beweis ist länger als eine Seite. Die globale Theorie wird mit Homologie statt Homotopie begründet; die Beweise sind hier durchsichtiger und die Voraussetzungen in der Praxis einfacher zu überprüfen. Ich benutze nur ein Minimum der aus der Analysis bekannten topologischen Konzepte: offene, abgeschlossene und kompakte Mengen; Wege sind stets stückweise stetig-differenzierbar; Jordan-Kurven bleiben außen vor. Abbildungseigenschaften werden betont; Visualisierung und Computereinsatz gestreift. So bleibt auch etwas Platz für zusätzliche Anwendungen, wie die Singularitätenanalyse erzeugender Funktionen.

Die zweite Auflage enthält neben Korrekturen, Ergänzungen und weiteren Aufgaben jetzt auch weiterführendes Material aus dem Umfeld der „elementaren" Beweise der Picard'schen Sätze. Hierfür habe ich Abschn. 7.3 über ganze Funktionen endlicher Ordnung und Kap. 8 über die Theorie normaler Familien (auf Grundlage des extrem effektiven Reskalierungslemmas von Lawrence Zalcman) aufgenommen.

Mein Dank gilt Christian Ludwig (TU München) für die kenntnisreiche, geschmackvolle Gestaltung der Abbildungen und Bob Burckel (Kansas) für die detailgenaue, kritische Lektüre des gesamten Buches.

München, im Februar 2016 Folkmar Bornemann

Laboratorium der Mathematik

Zur Begleitung der Lektüre empfehle ich, sich mit Hilfe von Computer und Bibliothek ein Laboratorium aus folgenden Werkzeugen einzurichten:

Werkzeug 1: Rechenknecht Ich werde mich auf Ideen und Konzepte konzentrieren und daher nicht lange mit Rechnungen aufhalten, die aufgrund ihrer rein handwerklichen Natur auch von einem „Rechenknecht" übernommen werden könnten. Hierfür eignen sich Computeralgebrasysteme wie Maple oder Mathematica; zu letzterem gibt es über *Wolfram Alpha* einen freien „einzeiligen" Zugang im Internet. Um es gleich einmal auszuprobieren, hier eine kleine Aufgabe: Berechne die Umkehrfunktion von

$$z \mapsto \frac{a+z}{bz-1} \tag{1}$$

(es ist eine *Involution*) und zerlege $\sin(x+iy)$ in Real- und Imaginärteil.

Werkzeug 2: Formelsammlung Im Mai 2010 erschien nach über zehnjähriger Arbeit unter der Leitung des damals 85-jährigen Frank Olver das 1000-seitige und drei Kilogramm schwere *NIST Handbook of Mathematical Functions* [26]. Das US-amerikanische National Institute of Standards and Technology (NIST) hat eine freie Version (DLMF) dieser umfangreichen Formelsammlung mit zusätzlichen Features ins Internet gestellt: So gibt es drehbare dreidimensionale Visualisierungen komplexer Funktionen (z. B. der Sinusfunktion) oder eine Suchfunktion nach Formeln (z. B. Ungleichungen der Form $\sin ? \leq ?$).

Werkzeug 3: Lehrbuch X Um sich den Stoff zusätzlich aus einer weiteren Perspektive zeigen zu lassen, sollte ein zum eigenen Lernstil passendes Werk stets in Griffweite liegen. Gute Beispiele finden sich im Literaturverzeichnis: Neben dem unvergleichlichen Klassiker von Ahlfors [2] gibt es knappe Darstellungen (Jänich [18], Fischer/Lieb [15], Sarason [30], Kapitel 10–14 im Rudin [29]), ausführliche mit unterschiedlichen Schwerpunkten (historische Ausführungen bei Remmert/Schumacher [27], Beispiele bei Lang [21] und Bak/Newman [5], Anwendungen bei Ablowitz/Fokas [1]) und solche mit Besonderheiten (Computereinsatz bei Forst/Hoffmann [14], viel Geometrie bei Needham [25], Phasenportraits bei Wegert [36], Aufgaben bei Shakarchi [32] oder Alpay [3]).

Bei Interesse für die Geschichte der Funktionentheorie empfehle ich neben dem Lehrbuch von Remmert und Schumacher den Überblick von Stillwell [34], die historische Studien von Bottazzini [10], Smithies [33] und Verley [35] oder, erst kürzlich erschienen, die maßgebliche, umfassende Darstellung von Bottazzini/Gray [11].

http://www.springer.com/978-3-0348-0974-0

Funktionentheorie
Bornemann, F.
2016, XII, 152 S. 18 Abb.,
ISBN: 978-3-0348-0974-0
A product of Birkhäuser Basel