

# 2 Das klassische Skalarfeld

---

## Übersicht

2.1	Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder . . . . .	37
2.2	Das Noether-Theorem und Erhaltungsgrößen . . . . .	57
2.3	Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	72

---

Die Theorie eines einzelnen Skalarfeldes ohne Wechselwirkungen ist die einfachste nicht-triviale Feldtheorie. Trotzdem können wir an diesem Beispiel viele grundlegende Prinzipien und Ideen besprechen, die auch für die komplizierteren (und realistischeren) Modelle von Feldern mit Spin noch gültig sein werden oder zumindest nur einer Ergänzung bedürfen. Auch für die Behandlung wechselwirkender Theorien werden unsere Erkenntnisse aus diesem Kapitel noch relevant sein, da wir einen störungstheoretischen Ansatz verfolgen, dem stets die wechselwirkungsfreie Theorie als Ausgangspunkt dient. Auf geht's also zu der Konstruktion unserer ersten Quantenfeldtheorie!

## 2.1 Lagrange- und Hamilton-Formalismus für Felder

Als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Quantenfeldtheorien ist es naheliegend, klassische Feldtheorien zu untersuchen. In der sogenannten kanonischen Quantisierung (siehe Kapitel 3) werden dann die klassischen Felder zu Feldoperatoren erhoben. In der funktionalen oder Pfadintegralquantisierung (siehe Abschnitt 5.1) werden wir sogar direkt mit den klassischen Feldern arbeiten. Die kanonische Quantisierung wird zunächst im Hamilton-Formalismus durchgeführt, während die funktionale Quantisierung im Endeffekt den Lagrange-Formalismus verwendet. Selbst wenn man im Hamilton-Formalismus quantisiert, ist es allerdings sehr praktisch, die Theorie selbst im Lagrange-Formalismus zu definieren, da man hier eine manifest Lorentz-kovariante Notation verwenden kann. In dieser wird sofort klar, welche Terme auftreten können und welche im Widerspruch

zur speziellen Relativitätstheorie stehen. Im Hamilton-Formalismus hingegen ist die Zeit gegenüber den Ortskoordinaten ausgezeichnet, und diese Zusammenhänge sind versteckt („nicht manifest“). Wir werden daher mit dem Lagrange-Formalismus für Felder beginnen und dann durch Legendre-Transformation zum Hamilton-Formalismus übergehen.

### 2.1.1 Von der klassischen Mechanik zu klassischen Feldern

Man kann Feldtheorien als Grenzfall vieler einzelner gekoppelter Freiheitsgrade in der klassischen Mechanik ansehen. Die Wirkung in der Mechanik für  $N$  Freiheitsgrade  $q_i$ ,  $i = 1 \dots N$  ist zunächst ein Funktional der Koordinatenfunktionen  $q_i(t)$ :

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1(t) \dots q_N(t), \dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_N(t)), \quad (2.1)$$

wobei  $L$  die Lagrange-Funktion ist, die wir ohne explizite Zeitabhängigkeit annehmen. In der klassischen Mechanik ist

$$L = T - V \quad (2.2)$$

die Differenz von kinetischer und potenzieller Energie, und dieser Zusammenhang wird sich leicht verändert auch in der Feldtheorie wiederfinden.

**Bewegungsgleichungen aus der Wirkung** Die Bewegungsgleichungen erhält man durch infinitesimale Variation der Wirkung nach den Koordinaten  $q_i$ , wobei  $\dot{q}_i$  entsprechend mitvariiert wird:

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \delta q_i(t). \quad (2.3)$$

Oft schreibt man

$$\delta q_i \equiv \epsilon h_i, \quad \delta \dot{q}_i \equiv \epsilon \dot{h}_i. \quad (2.4)$$

Dabei gibt  $h$  eine beliebige glatte Deformation unseres Pfades an, und  $\epsilon$  ist ein kleiner Parameter. Daraus ergibt sich

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t) + \epsilon h_i(t), \quad \dot{q}_i(t) \rightarrow \dot{q}_i(t) + \epsilon \dot{h}_i(t). \quad (2.5)$$

Da wir die Bewegung zwischen zwei Punkten  $q(t_1)$  und  $q(t_2)$  betrachten, variieren wir den Ort zu diesen Zeiten nicht:

$$h_i(t_1) = h_i(t_2) = 0. \quad (2.6)$$

Der in der klassischen Mechanik physikalisch realisierte Pfad ist gerade jener, für den die Wirkung stationär unter kleinen Variationen weg von dieser klassischen Lösung ist.<sup>1</sup> Konkret bedeutet das, dass wir den Ansatz für die Variation Gl. (2.5) in die Wirkung Gl. (2.1) einsetzen und in  $\epsilon$  entwickeln:

$$S[q + \delta q] = S[q + \epsilon h] = S[q] + \delta S + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.7)$$

Stationarität bedeutet dann einfach, dass die lineare Ordnung in  $\epsilon$  (oder  $\delta q$ ,  $\delta \dot{q}$ ) verschwinden soll:

$$\delta S = 0. \quad (2.8)$$

In der Darstellung durch die Lagrange-Funktion kann man schreiben

$$\delta L = \text{Randterm} = \text{totale Zeitableitung}. \quad (2.9)$$

## AUFGABE 12

■ Zeigt durch Variation der Wirkung, dass der physikalisch realisierte klassische Pfad der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.10)$$

gehört. Das sind die *Euler-Lagrange-Gleichungen* für  $N$  Freiheitsgrade.

● Für die Herleitung setzt man am besten die Darstellung der Wirkung durch die Lagrange-Funktion ein.

► Wir betrachten die Variation der Lagrange-Funktion (und verwenden die Summenkonvention für doppelte Indizes):

$$L(q + \epsilon h, \dot{q} + \epsilon \dot{h}) = L(q, \dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{h}_i + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.11)$$

Wir haben hier die Taylor-Entwicklung in  $\epsilon$  durchgeführt, wobei uns der lineare Teil interessiert. Diese lineare Variation der Lagrange-Funktion kann man durch partielles Integrieren (bzw. die Produktregel) umschreiben zu

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \dot{h}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \epsilon h_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon h_i \right) - \epsilon h_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.12)$$

Die totale Zeitableitung wird im Wirkungsintegral zu

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon h_i \right) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon h_i \right|_{t_1}^{t_2} \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>In der Behandlung der Quantentheorie durch Pfadintegrale wird klar, wieso der klassische Limes gerade diese Eigenschaft hat.

und verschwindet damit, wegen  $h_i(t_1) = h_i(t_2) = 0$ . Aus dem Rest kann man  $\epsilon h_i$  ausklammern und erhält damit in linearer Ordnung in  $\epsilon$ :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \epsilon h_i(t) \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.14)$$

Da die Variation  $h$  beliebig war, folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen.

**Feldtheorie auf einem diskreten Raumgitter** In der Feldtheorie werden die Koordinaten  $q_i$  nicht mit Raumkoordinaten, sondern mit Werten der Felder identifiziert. Die Korrespondenz lautet

$$q_i(t) \longleftrightarrow \phi(\mathbf{x}_i, t). \quad (2.15)$$

Der Wert des Feldes  $\phi$  an jeder Stelle  $\mathbf{x}_i$  im Raum entspricht also der abstrakten Koordinate eines mechanischen Freiheitsgrades, und der Index  $i$ , der im mechanischen Bild die Koordinaten durchzählt, wird in der Feldtheorie zum Index, der die Raumpunkte  $\mathbf{x}$  markiert. Dieses Bild kommt genau so in vielen Mechaniklehrbüchern vor, wenn Kontinuumsmechanik (zum Beispiel die schwingende Saite) im Lagrange-Formalismus behandelt wird. Die linearisierte Version der schwingenden Saite wird dann auch exakt einer freien skalaren Feldtheorie in einer Raumdimension entsprechen, wobei – wie gesagt – die Auslenkung der Saite dem Wert des Feldes an dem entsprechenden Punkt im Raum entspricht. Man erhält die Lagrange-Funktion für die schwingende Saite, indem man benachbarte Massenpunkte durch eine Kraft koppelt, die proportional zur relativen Auslenkung  $q_i - q_{i-1}$  ist. Im Hamilton- oder im Lagrange-Formalismus ergibt sich dies automatisch, wenn man einen Term  $\propto (q_i - q_{i-1})^2$  in das Potenzial schreibt. Diese Kopplung benachbarter Freiheitsgrade hat die Form einer Differenz benachbarter Auslenkungen und wird im Kontinuumslimit daher zu einer *Ableitung*. Wir können also schon erahnen, dass im Kontinuumslimit Ableitungen für die Propagation von Wellen durch den Raum verantwortlich sind.

Der Nachteil der Diskretisierung ist, dass die Lorentz-Symmetrien, die wir unserer relativistischen Feldtheorie zugrunde legen wollen, von einem diskreten Gitter nicht beherzigt werden können. Im Grenzwert Gitterabstand  $a \rightarrow 0$  gewinnt man aber mit etwas Zutun wieder eine vollständig Lorentz-symmetrische Theorie. Am einfachsten macht man sich das Prinzip in einer Raumdimension klar. Wir zählen die äquidistanten Gitterpunkte  $x_i$  mit  $i \in \mathbb{Z}$ . Dabei ist der Gitterabstand  $x_i - x_{i-1} = a$ , und  $x_0 = 0$ . Die Auslenkung des Massenpunktes am Ort  $x_i$  zum Zeitpunkt  $t$  schreiben wir als  $\phi(x_i, t)$ . Die kinetische Energie jedes einzelnen Massenpunktes ist (im Lagrange-Formalismus) einfach gegeben durch

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2(x_i, t), \quad (2.16)$$

und die gesamte kinetische Energie ist

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2(x_i, t). \quad (2.17)$$

Das Potenzial ist, wie oben motiviert:

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t))^2. \quad (2.18)$$

Die sich daraus ergebende Lagrange-Funktion  $L = T - V$  beschreibt eine ein-dimensionale Kette unendlich vieler durch eine lineare Kraft an ihre Nachbarn gekoppelte Massenpunkte. Da die Kraft nur Unterschiede zwischen Nachbarn berücksichtigt, kann diese Kette beliebig von  $\phi = 0$  wegdriften, da es keine Rückstellkraft für die einzelnen Elemente gibt. Diese können wir nun noch durch einen weiteren Potenzialterm  $\propto \phi^2$  einführen und erhalten

$$V = \sum_i \frac{1}{2} [k(\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t))^2 + \tilde{k}\phi^2(x_i)] . \quad (2.19)$$

Mit diesem quadratischen Potenzial für jeden Massenpunkt erhalten wir ein System *gekoppelter harmonischer Oszillatoren*. Diese Tatsache wird später sehr wichtig, da wir freie Felder genau in Analogie zum harmonischen Oszillator quantisieren können.

Um zum Kontinuumslimites überzugehen, müssen wir allerlei Größen so skalieren, dass sie im Grenzwert  $a \rightarrow 0$  endlich bleiben. Zum Beispiel müssen wir die Summen in der Kombination  $\sum_i a$  schreiben, damit wir  $\sum_i a \rightarrow \int dx$  erhalten. Beginnen wir mit dem Differenzenterm. Er lässt sich zu einem Differenzenquotienten umschreiben

$$\sum_i \frac{1}{2} k (\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t))^2 = \sum_i a^2 \frac{1}{2} k \left( \frac{\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t)}{a} \right)^2 . \quad (2.20)$$

Um die Summe in der Form  $\sum_i a$  zu bringen, können wir einen Faktor  $\sqrt{a}$  in die Definition des Feldes ziehen. Den Faktor  $k$  absorbieren wir gleich mit:

$$\phi \longrightarrow \phi / \sqrt{ak} \quad (2.21)$$

und erhalten als Zwischenschritt

$$T = \sum_i \frac{1}{2} \frac{m}{ak} \dot{\phi}^2(x_i, t) \quad (2.22)$$

$$V = \sum_i a \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t)}{a} \right)^2 + \frac{\tilde{k}}{a^2 k} \phi^2(x_i) \right] . \quad (2.23)$$

Es fällt auf, dass uns der kinetische Energieterm  $T$  im Kontinuumslimit um die Ohren fliegt. Das ist aber auch kein Wunder, denn wir haben jedem einzelnen Massenpunkt eine fixe Masse  $m$  gegeben, und im Grenzwert  $a \rightarrow 0$  erhalten wir so eine unendliche Massendichte! Was wir aber physikalisch wollen (siehe Gitarrensaite) ist eine konstante Massendichte. Wir müssen daher die *Masse pro Länge* konstant halten:

$$\rho = \frac{m}{a} = \text{const.} \quad (2.24)$$

Aber auch die „Federspannungen“  $k$  und  $\tilde{k}$  müssen skaliert werden. Im Fall von  $\tilde{k}$  ist das besonders einsichtig, da sonst bei einer gegebenen Auslenkung  $\phi$  jeder Massenpunkt einen endlichen Anteil zur potenziellen Energie beiträgt und im Grenzwert  $a \rightarrow 0$  wiederum beliebig viele Massenpunkte pro Längeneinheit vorhanden sind. Wir schreiben  $k = k_0/a$  und  $\tilde{k} = \tilde{k}_0 a$  und erhalten

$$T = \sum_i a \frac{1}{2} \frac{\rho}{k_0} \dot{\phi}^2(x_i, t) \quad (2.25)$$

$$V = \sum_i a \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\phi(x_i, t) - \phi(x_{i-1}, t)}{a} \right)^2 + \frac{\tilde{k}_0}{k_0} \phi^2(x_i) \right]. \quad (2.26)$$

Wir nehmen endlich den Grenzwert  $a \rightarrow 0$  und schreiben die Summen zu Integralen um. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} T &= \int dx \frac{1}{2} \frac{\rho}{k_0} \dot{\phi}^2(x, t) \\ V &= \int dx \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right)^2 + \frac{\tilde{k}_0}{k_0} \phi^2(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Hier haben die Zeitableitungen und Ortsableitungen noch unterschiedliche Vorfaktoren. Wollen wir zu einer einfachen relativistischen Notation in natürlichen Einheiten übergehen, müssen wir die Zeitvariable so skalieren, dass der (einheitenlose!) Vorfaktor  $\rho/k_0 \rightarrow 1$  wird. Es war ja auch nicht zu erwarten, dass mit beliebigen Anfangsparametern genau die Grenzgeschwindigkeit  $c = 1$  resultiert. Wir nehmen  $t' = t/\sqrt{\rho/k_0}$ , und in der neuen Zeitvariable geschrieben verschwindet so der Vorfaktor des Terms  $\dot{\phi}^2$ , und die Grenzgeschwindigkeit ist  $c = 1$ . Nach diesen Manipulationen können wir tatsächlich schreiben:

$$L = T - V = \int dx \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \phi^2], \quad (2.28)$$

wobei wir die Konstante  $M^2 = \tilde{k}_0/k_0$  eingeführt haben und eine zweidimensionale Metrik

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

verwenden, die einfach eine gekürzte Version von Gl. (1.53) ist.

**Aufgemerkt!****Wir betrachten lokale Feldtheorien**

Eine wichtige Sache fällt uns auf: Die Integranden sind im Kontinuumslimites *lokal* im Feld und seiner Ableitung, das heißt, sie hängen nur von den Feldern und deren Ableitungen bei *einer* Zeit- und Ortskoordinate ab. Wir können daher den Integranden in der Lagrange-Funktion  $L$  als Funktion des Feldes und seiner Ableitung an einem Raumzeitpunkt  $x^\mu$  schreiben und führen dazu die *Lagrange-Dichte*  $\mathcal{L}$  mit

$$S = \int dt L = \int dt \int dx \mathcal{L} \equiv \int d^2x \mathcal{L} \quad (2.30)$$

ein. In unserem Beispiel lautet sie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2. \quad (2.31)$$

Es handelt sich also um einen Lorentz-Skalar der, über die Raumzeit integriert, die Wirkung ergibt. Wir haben somit durch geschicktes Skalieren der Parameter aus einem System gekoppelter Massenpunkte eine relativistische Feldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen gewonnen.

In der Feldtheorie bezeichnet man üblicherweise  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  insgesamt als *kinetischen Term*. Aus der Sicht der Lagrange-Funktion ist aber der räumliche Anteil  $\partial_i \phi \partial^i \phi$  streng genommen ein Potenzialterm, während  $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$  der kinetischen Energie entspricht. Dies wird deutlich, wenn wir die Hamilton-Dichte Gl. (2.70) herleiten.

**AUFGABE 13**

■ Welche Energieeinheiten haben  $S$ ,  $L$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\partial_\mu$ ,  $\phi$  und  $M$  in dieser Feldtheorie in  $1 + 1$  Dimensionen? Wie ist die Situation in  $d$  Dimensionen?

► Die Wirkung  $S$  ist immer einheitenlos, da wir  $\hbar = 1$  setzen. Das Zeitintegral  $\int dt$  hat  $[dt] = -1$ . Damit ist  $[L] = 1$ , was auch so sein muss, wegen  $L = T - V$ . Das Raumzeitintegral hat  $[d^d x] = -d$ , und damit hat die Lagrange-Dichte  $[\mathcal{L}] = d$ . Die Raumzeit-Ableitung hat immer  $[\partial_\mu] = 1$ . Da der Term  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$  in der Lagrange-Dichte ohne einheitenbehafteten Vorfaktor auftaucht, hat  $[\phi^2] = d - 2$  und  $[\phi] = d/2 - 1$ . Auffällig ist, dass das Feld  $\phi$  in  $d = 2$  einheitenlos ist. In  $d = 4$  hat das Feld Einheiten der Energie.  $M$  muss die gleichen Einheiten besitzen wie  $\partial_\mu$ , also  $[M] = 1$ . Dieser Parameter spielt die Rolle einer Masse. Achtung: Diese Masse  $M$  entspricht dem Massenparameter der Wellengleichung und damit später der Masse der resultierenden Teilchen, und hat nichts mit der Masse der gekoppelten Massenpunkte in unserer mechanischen Konstruktion zu tun.

Man kann den Übergang vom diskreten System zur Feldtheorie ganz genau so

in 3+1 Dimensionen vollziehen. Die Form der Lagrangedichte ändert sich dabei nicht, nur zählt nun  $\mu = 0 \dots 3$  und der volle metrische Tensor kommt zum Einsatz. Die Skalierung der verschiedenen Faktoren, Felder und Integrale wird sich bei der Herleitung ändern. Wir überlassen es dem geneigten Leser, dies auszuprobieren. Als Anhaltspunkt kann die Energiedimension der Felder dienen, die wir gerade allgemein ermittelt haben.

---

**Wechselwirkungen** Die Bewegungsgleichungen, die aus einer in den Feldern quadratischen Wirkung wie Gl. (2.31) resultieren, sind linear. Damit gilt das Superpositionsprinzip: Zwei Wellenpakete können sich ungestört treffen, durchlaufen und wieder trennen. Das ändert sich, sobald wir zu den harmonischen Oszillatoren z. B. einen Potenzialterm  $V \sim \phi^4$  hinzufügen. Generell bezeichnet man daher Terme in der Lagrange-Dichte mit mehr als zwei Feldern als Wechselwirkungsterme. Die Vorstellung von sich kreuzenden Wellen, die sich gegenseitig stören, überträgt sich leicht verändert in die Quantentheorie: Kommen höhere Potenzen von Feldern in der Lagrange-Dichte vor, so können Teilchen miteinander wechselwirken. In manchen Fällen ist es nützlich, Terme mit einem oder zwei Feldern als Wechselwirkung aufzufassen. Darauf werden wir bei der Besprechung der Renormierung (Abschnitt 6) näher eingehen.

#### Treffen sich zwei Photonen. . .

Habt ihr auch in der Schule gelernt, dass sich Lichtstrahlen im Vakuum kreuzen, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen? Das ist tatsächlich nicht ganz richtig, da das elektromagnetische Feld Teil einer wechselwirkenden Feldtheorie, der Quantenelektrodynamik, ist. Der Effekt ist aber bei Radiowellen und dem sichtbaren Licht so klein, dass man ihn im Alltag und bei vielen technischen Anwendungen komplett vernachlässigen kann.

**Oberflächenterme** Das Prinzip der stationären Wirkung überträgt sich fast unverändert auf die Feldtheorie. Wir wollen aber die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  in Gl. (2.31) statt der Lagrange-Funktion  $L$  als Ausgangspunkt nehmen. Die Feldvariation hat nun eine Raumzeitabhängigkeit

$$\phi(\mathbf{x}, t) \longrightarrow \phi(\mathbf{x}, t) + \epsilon \eta(\mathbf{x}, t). \quad (2.32)$$



Wir werden dann wieder durch partielles Integrieren die Ableitungen von der Variation  $\eta$  wegschaffen. Statt totaler Zeitableitungen tauchen dabei Viererdivergenzen<sup>2</sup> auf, z. B.

$$(\partial^\mu f)(\partial_\mu g) = \underbrace{\partial^\mu (f \partial_\mu g)}_{\text{Viererdiv.}} - f \square g. \quad (2.33)$$

Raumzeitintegrale über Divergenzen in 4 Dimensionen entsprechen gemäß dem Gauß'schen Gesetz gerade vierdimensionalen Randtermen (Oberflächenterme)

$$\int_{\partial V} dn_\mu F^\mu = \int_V d^4x \partial_\mu F^\mu. \quad (2.34)$$

Hier bezeichnet  $\partial V$  den Rand des Raumzeit-Volumens und  $dn_\mu$  ein infinitesimales Oberflächenelement, welches in Richtung des Normalenvektors zeigt. Da wir die Raumzeit nicht begrenzen, handelt es sich hier aber um Oberflächenterme in der Unendlichkeit, sowohl räumlich als auch zeitlich gesehen. Diese werden wir wieder vernachlässigen. Warum dies erlaubt ist, ist eine etwas subtile Frage. Die physikalische Intuition erscheint klar – die Randbedingungen an unendlich weit entfernten Punkten sollten die Bewegungsgleichungen für beobachtbare Vorgänge in einer lokalen relativistischen Theorie nicht beeinflussen. Man kann also annehmen, dass man in jeder Berechnung einer theoretischen Vorhersage Wellenpakete endlicher Ausdehnung verwendet und Vorhersagen in endlichen Zeiträumen berechnet. Wenn wir später die Felder im Zuge der kanonischen Quantisierung zu Feldoperatoren machen, kann man aber nicht sinnvoll davon sprechen, dass die Operatoren einen räumlich oder zeitlich beschränkten Träger haben und außerhalb verschwinden. Hier kann man nur davon ausgehen, dass *Erwartungswerte* von Viererdivergenzen vernachlässigt werden können und damit Oberflächenterme zwar nicht unbedingt auf Operatorlevel, aber doch für alle betrachteten Zustände verschwinden.

### Das starke CP-Problem

Eine wichtige Ausnahme tritt in der Quantenchromodynamik auf, in der die Topologie der Eichgruppe  $SU(3)$  Vakuumlösungen mit überall nicht-verschwindendem  $\langle A_\mu \rangle$  erlaubt, in die das Vakuum unvermeidlich hineintunnelt. Diese Tatsache führt zu dem sogenannten *starken CP-Problem*. Abhilfe könnten die (noch) hypothetischen *Axionen* schaffen. Diese Teilchen tragen im Falle ihrer Existenz auch zur Dunklen Materie bei.

<sup>2</sup>Divergenz ist hier nicht im Sinne einer Polstelle oder Unendlichkeit zu verstehen, sondern als relativistische Verallgemeinerung der Divergenz in der Vektoranalysis  $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ .

Lange Rede, kurzer Sinn: Wir werden von jetzt an, mit ganz wenigen Ausnahmen, Oberflächenterme und Viererdivergenzen in der Lagrange-Dichte vernachlässigen.

**Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder** Nach dieser Vorrede wollen wir nun das Variationsprinzip anwenden, um die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Dichte zu gewinnen. Bevor wir zu unserem konkreten Beispiel des freien Skalarfeldes kommen, wollen wir aber erst die allgemeinen Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder aus der Lagrange-Dichte herleiten. Dabei wollen wir nur annehmen, dass die Lagrange-Dichte eine Funktion von  $\phi$  und  $\partial_\mu \phi$  ohne höhere Ableitungen ist. Die Herleitung ist damit fast identisch mit jener in der klassischen Mechanik.

## AUFGABE 14

■ Leitet aus dem Variationsprinzip  $\delta S = 0$  die Bewegungsgleichungen für eine allgemeine Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  her.

● Geht davon aus, dass die Feldvariation  $\delta\phi = \epsilon\eta$  auf dem Rand des betrachteten Volumens verschwindet.

► Wir fordern wieder  $\delta\mathcal{L} = 0$ , bis auf Viererdivergenzen. Es ist

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\epsilon\eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\epsilon\partial_\mu \eta. \quad (2.35)$$

Partielles Integrieren ergibt

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\epsilon\eta + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\epsilon\eta \right) - \epsilon\eta\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}. \quad (2.36)$$

Der zweite Term ist eine Viererdivergenz und wird unter dem Integral zu einem Oberflächenterm  $\propto \eta$ . Da laut Annahme  $\eta$  auf dem Rand des Volumens verschwindet, kann er vernachlässigt werden. Soll die Variation nun für beliebige  $\eta$  innerhalb des Volumens verschwinden, folgt die Bedingung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (2.37)$$

Dies ist die Euler-Lagrange-Gleichung für das reelle Skalarfeld.

### Aufgemerkt!

Die Euler-Lagrange-Gleichung für ein reelles Skalarfeld lautet

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (2.38)$$

Voraussetzung für ihre Anwendung ist, dass keine höheren Ableitungen von  $\phi$  in  $\mathcal{L}$  vorkommen. Sollte das der Fall sein, kann einfach direkt das Variationsprinzip  $\delta S = 0$  angewendet werden, oder man schreibt  $\mathcal{L}$  vorher durch partielles Integrieren um. Achtung: Stehen die Indizes der Ableitung anders als die im Ausdruck, wird dennoch abgeleitet:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.39)$$

aber auch

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial^\nu\phi) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(g^{\nu\rho}\partial_\rho\phi) = g^{\nu\mu}. \quad (2.40)$$

## AUFGABE 15

■ Leitet durch Variation des Feldes Gl. (2.32) die Bewegungsgleichung von  $\phi$  aus der Lagrange-Dichte Gl. (2.31) „von Hand“ her. Hier kann man  $\delta S = 0$  oder, wie wir oben gesehen haben,  $\delta\mathcal{L} = 0$  bis auf Viererdivergenzen fordern. Ermittelt dann zum Vergleich die Bewegungsgleichungen anhand der Euler-Lagrange-Gleichung.

► Wir setzen

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi + \epsilon\eta, \partial_\mu\phi + \epsilon\partial_\mu\eta) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \delta\mathcal{L} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.41)$$

und konkret eingesetzt bedeutet das

$$\delta\mathcal{L} = \epsilon\partial_\mu\eta\partial^\mu\phi - \epsilon M^2\eta\phi. \quad (2.42)$$

Partielles Integrieren (bzw. eigentlich die Anwendung der Produktregel) ergibt

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\epsilon\phi\partial^\mu\eta) - \epsilon\eta\partial_\mu\partial^\mu\phi - \epsilon M^2\eta\phi. \quad (2.43)$$

Der erste Term ist eine Viererdivergenz und wird vernachlässigt. Es bleibt

$$\delta\mathcal{L} \sim -\epsilon\eta(\square + M^2)\phi \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.44)$$

Wir finden also die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\square + M^2)\phi = 0, \quad (2.45)$$

die wir bereits in der Einführung kennengelernt hatten. Vergleichen wir nun mit der Euler-Lagrange-Gleichung: Es ist

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -M^2\phi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi. \quad (2.46)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet also  $-M^2\phi = \partial_\mu\partial^\mu\phi$ , und wir erhalten wieder die Klein-Gordon-Gleichung.

Tutorium Quantenfeldtheorie

Was Sie schon immer über QFT wissen wollten, aber  
bisher nicht zu fragen wagten

Edelhäuser, L.; Knochel, A.

2016, XII, 539 S. 50 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-37675-7