

Lineare Differenzialgleichungen – Systeme und Gleichungen höherer Ordnung



Was ist eine lineare Differenzialgleichung?
 Was ist ein System von Differenzialgleichungen?
 Wann existieren Lösungen?
 Wie löst man eine lineare Differenzialgleichung?
 Was bedeutet Variation der Konstanten?

2.1	Grundlagen	16
2.2	Systeme von Differenzialgleichungen	19
2.3	Differenzialgleichungen höherer Ordnung	27
	Zusammenfassung	34
	Aufgaben	36

Differenzialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) auftauchen. Sie spielen innerhalb der Mathematik und auch in vielen Anwendungen eine zentrale Rolle, etwa bei der Modellierung von dynamischen und parameterabhängigen Prozessen in Naturwissenschaften und Technik, aber auch in den Wirtschafts- und Lebenswissenschaften.

Im Zentrum unseres Interesses steht auch die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung solcher Gleichungen.

In diesem Kapitel wollen wir uns vor allem linearen Systemen 1. Ordnung, also mehreren skalaren linearen verkoppelten Differenzialgleichungen 1. Ordnung widmen. Die gesuchte Lösungsfunktion ist dann vektorwertig. Eine Differenzialgleichung heißt linear, wenn die gesuchte Lösungsfunktion und deren Ableitungen in der Gleichung nur linear auftreten.

Einen weiteren Schwerpunkt bilden skalare lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung. Bei solchen Gleichungen kommen nicht nur die erste Ableitung der gesuchten Lösungsfunktion, sondern auch höhere Ableitungen vor.

Wir werden erkennen, dass es einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Themen gibt. Ziel dieses Kapitels ist es, einen Apparat zur Lösung solcher Differenzialgleichungen zur Verfügung zu stellen. Dabei werden viele wichtige Methoden und Konzepte der Analysis und der linearen Algebra auch in Kombination verwendet.

Viele Grundlagen und Konzepte vor allem für skalare Differenzialgleichungen werden auch in Band 1, Kapitel 20 behandelt.

2.1 Grundlagen

Eine Differenzialgleichung ist eine Gleichung, in der eine Funktion als Unbekannte auftritt. Es treten in solchen Gleichungen sowohl diese Funktion als auch deren Ableitungen auf. Die Lösung beruht auf Integration. Die Lösungsfunktion ist daher abhängig von Integrationskonstanten.



Welche Funktion $y = y(x)$ erfüllt die Differenzialgleichung

$$y'(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ?$$

Beispiel Gesucht ist eine Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, für die

$$y'(x) = 5y(x)$$

gilt. Wir suchen also Funktionen $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, die abgeleitet ein Vielfaches von sich selbst ergeben. Diese Eigenschaft trifft genau für die Exponentialfunktion zu, denn die Ableitung der Funktion $y(x) = ce^{\lambda x}$ für $\lambda, c \in \mathbb{R}$ nach x ist $y'(x) = \lambda y(x)$. Hier ist speziell $\lambda = 5$ und $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir erhalten eine ganze Schar von Lösungsfunktionen $y(x) = ce^{5x}$, siehe Abbildung 2.1. ◀

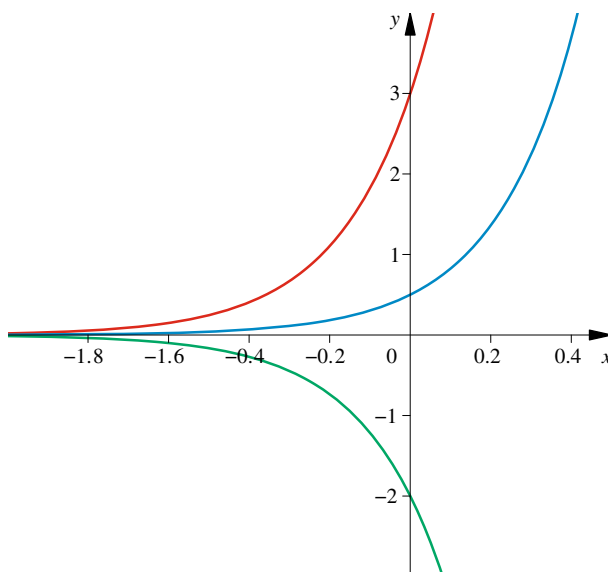


Abbildung 2.1 Die Lösungen $y(x) = ce^{5x}$ der Differenzialgleichung $y'(x) = 5y(x)$ für einige Werte $c \in \mathbb{R}$.

Eine Differenzialgleichung ist ein Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion und deren Ableitungen

Definition einer Differenzialgleichung 1. Ordnung

Eine **Differenzialgleichung 1. Ordnung** auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I,$$

wobei $y: I \rightarrow \mathbb{C}$, $y \in C^1(I)$ und $f: I \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir betrachten den allgemeineren Fall von komplexwertigen Funktionen $y = y(x)$ und $f = f(x, y(x))$. Wenn eine Unterscheidung zwischen reellen und komplexen Funktionen wesentlich ist, werden wir darauf hinweisen.

Als *Ordnung* einer Differenzialgleichung bezeichnet man die höchste vorkommende Ableitung der gesuchten Funktion y .

Genau genommen handelt es sich hier um eine **explizite Differenzialgleichung**. Falls die Auflösung der Gleichung nach der Ableitung $y'(x)$ nicht gelingt, nennt man die Differenzialgleichung **implizit**. Für $y \neq 0$ kann die implizite Differenzialgleichung

$$yy' - 6x \sin y = 0$$

als explizite Differenzialgleichung

$$y' = \frac{6x \sin y}{y}$$

geschrieben werden. Wir behandeln hier **gewöhnliche Differenzialgleichungen**, da die gesuchte Funktion $y = y(x)$

Beispiel: Modellierung von Wachstumsprozessen mithilfe von Differenzialgleichungen

Die Zunahme einer Bevölkerung oder allgemeiner einer Population ist zu Beginn eines biologischen Wachstumsprozesses meist proportional zum Bestand. Aufgrund beschränkter Ressourcen, wie etwa Nahrung und Lebensraum, kann die Population aber nicht beliebig wachsen, sondern wird eine gewisse Maximalgröße nicht überschreiten.

Problemanalyse und Strategie: Wir beschreiben die zeitliche Entwicklung einer Bevölkerung durch eine Funktion $x \rightarrow y(x)$, wobei $y(x)$ die Größe der Population zur Zeit x bezeichnet. Die Zunahme proportional zum Bestand wird mathematisch durch das **exponentielle Wachstum** beschrieben. Nach einer Zeitspanne Δx wird sich die Bevölkerung um

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$$

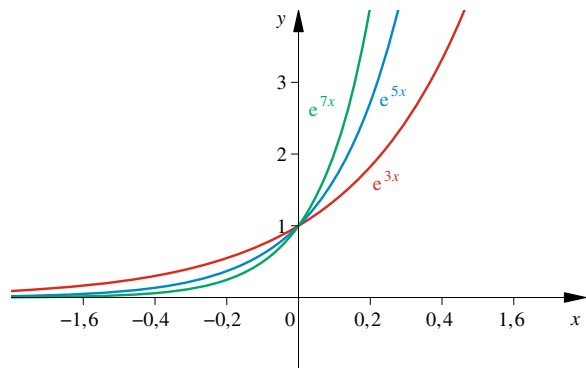
Individuen vermehrt haben. Solange genug Ressourcen vorhanden sind, wird dieser Zuwachs etwa proportional zur Zeitspanne Δx und zur Population $y(x)$ zu Beginn des Zeitintervalls $[x, x + \Delta x]$ sein. Also gilt mit einer Proportionalitätskonstanten $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Delta y \approx \lambda y(x) \Delta x.$$

Allerdings ist dieser Wachstumsprozess nur bei sehr kleinem Δx zutreffend modelliert, da während der Zeitspanne Δx immer wieder neue Individuen dazukommen. Aus $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \lambda y(x)$ und $\Delta x \rightarrow 0$ entsteht die Differenzialgleichung

$$y'(x) = \lambda y(x) \quad x \geq 0.$$

Eigentlich ist die Anzahl der Individuen ganzzahlig, aber wir machen hier die idealisierende Annahme, dass der Wachstumsprozess durch eine differenzierbare Funktion gut beschrieben werden kann.



Beim **logistischen Wachstum** wird angenommen, dass eine Population eine gewisse Maximalgröße $K > 0$ nicht überschreiten kann. Wenn wir annehmen, dass die Änderungsrate der Population $y'(x)$ sowohl proportional zum gerade vorhandenen Bestand $y(x)$ als auch noch zum verbleibenden Spielraum $K - y(x)$ ist, ergibt sich die logistische Gleichung

$$y'(x) = \lambda y(x)(K - y(x)), \quad x \geq 0.$$

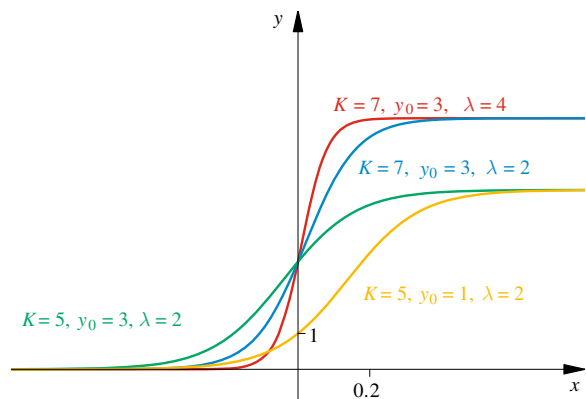
Lösung:

Die uns schon bekannte Lösung der Differenzialgleichung $y'(x) = \lambda y(x)$ ist $y(x) = ce^{\lambda x}$. Eigentlich existieren unendlich viele Lösungen. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ kann aus einer Zusatzbedingung also etwa der Angabe der Population für $x = 0$ berechnet werden. Durch diese Anfangsbedingung ist die Lösung eindeutig festgelegt. Eine exponentiell wachsende Population überschreitet für $x \rightarrow \infty$ jede vorgegebene Größe, was in der Praxis natürlich nur eine kurze beschränkte Zeit oder für sehr kleine Populationen zutreffen kann. Bei einer gewissen Größe der Population macht sich die Beschränktheit der Ressourcen bemerkbar, siehe Abbildung oben.

Durch Ableiten und Einsetzen in die logistische Gleichung überzeugen wir uns, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y(0)} - 1\right) e^{-\lambda K x}}$$

eine Lösung darstellt. In der untenstehenden Abbildung sieht man, dass diese Funktion streng monoton wachsend ist, falls die Anfangsbedingung $y(0) < K$ erfüllt ist.



nur von einer Variablen abhängt. Bei **partiellen Differenzialgleichungen** hängt $y = y(x)$ von mehreren Variablen $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ ab, und es können alle möglichen partiellen Ableitungen vorkommen.

Bei Differenzialgleichungen höherer Ordnung treten entsprechend auch höhere Ableitungen auf.

Definition einer Differenzialgleichung n -ter Ordnung

Eine allgemeine **Differenzialgleichung n -ter Ordnung** $n \in \mathbb{N}$ hat die Gestalt

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

für $x \in I \subseteq \mathbb{R}$. Dabei sind y eine n -mal stetig differenzierbare Funktion auf I also $y \in C^n(I)$ und $f: I \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion von $n+1$ Veränderlichen.

Unter einer **Lösung** y einer Differenzialgleichung auf einem Intervall $J \subseteq I$ versteht man eine (mehrfach) stetig differenzierbare Funktion $y: J \rightarrow \mathbb{C}$, die die Differenzialgleichung für jedes $x \in J$ erfüllt.

Beispiel Die Differenzialgleichung

$$y'(x) = y^2(x) \quad x \in I = \mathbb{R},$$

wird durch die Funktionen $y(x) = -\frac{1}{x+c}$ gelöst, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist. In diesem Fall hat die Funktion $y = y(x)$ an der Stelle $x = -c$ eine Singularität, d. h., die Lösung existiert nur auf dem Intervall $J = (-\infty, -c)$ oder auf dem Intervall $J = (-c, \infty)$, aber jedenfalls ist J verschieden von $I = \mathbb{R}$.

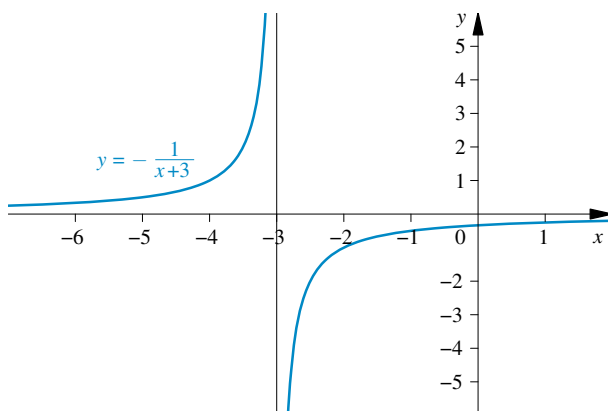


Abbildung 2.2 Die Lösung $y(x) = -\frac{1}{x+c}$ mit $c = 3$.

Das Anfangswertproblem stellt Bedingungen an die Lösung

Wie die Beispiele gezeigt haben, bekommen wir durch die zugrunde liegende Integration bei der Lösung von Differenzialgleichungen eine (oder mehrere) Integrationskonstanten. Die Lösung ist erst durch zusätzliche Bedingungen festgelegt. Dabei bestimmt die Ordnung die Anzahl der Bedingungen.

Definition eines Anfangswertproblems

Eine Differenzialgleichung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad x \in I$$

wird als **Anfangswertproblem** für die gesuchte Funktion y bezeichnet, falls zusätzlich n Bedingungen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

für ein $x_0 \in I$ vorgegeben sind.

Aufgrund der Ordnung n sind zur eindeutigen Festlegung der n Integrationskonstanten n Bedingungen notwendig. Durch die Angabe von *Anfangswerten* wird aus einer Schar von Lösungen eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung ausgewählt. Diese Schar von Lösungen mit allen Integrationskonstanten wird *allgemeine Lösung* der Differenzialgleichung genannt.

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass eine solche Lösung y unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion f immer existiert und zu gegebenen Anfangsbedingungen auch eindeutig ist.

Bei einem **Randwertproblem** werden ebenfalls n Bedingungen an die Lösungsfunktion oder deren Ableitungen vorgegeben, aber an mindestens zwei verschiedenen Stellen im Intervall I . Meist beziehen sich die Vorgaben auf die Randpunkte des Intervalls. Randwertprobleme werden in Kapitel 3 behandelt.

Beispiel Zur Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + y(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

seien die beiden Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 1$ vorgegeben. Dabei setzen wir voraus, dass die Ableitung der gesuchten Lösungsfunktion y' in den Randpunkten des abgeschlossenen Intervalls stetig fortsetzbar ist.

Wir werden sehen, dass sich die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung in der Form

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{2} \sin x$$

schreiben lässt. Aus

$$y(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 + 0 = 1$$

$$y'(0) = c_1 - c_2 \cdot 0 + 0 - 0 = 1$$

ergeben sich die beiden Integrationskonstanten zu $c_1 = 1$ und $c_2 = 1$, also

$$y(x) = \sin x + \cos x + \frac{x}{2} \sin x$$

siehe Abbildung 2.3.

Beispiel Betrachten wir die obige Differenzialgleichung 2. Ordnung, also

$$y''(x) + y(x) = \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = \pi$. Aus der allgemeinen Lösung dieser Differenzialgleichung

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{2} \sin x$$

mit den Bedingungen

$$y(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 + 0 = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{\pi}{4} = \pi$$

ergibt sich für die beiden Integrationskonstanten in diesem Fall $c_1 = \frac{\pi}{2}$ und $c_2 = 1$ und damit die Lösung

$$y(x) = \frac{3\pi}{4} \sin x + \cos x + \frac{x}{2} \sin x,$$

siehe Abbildung 2.3. ◀

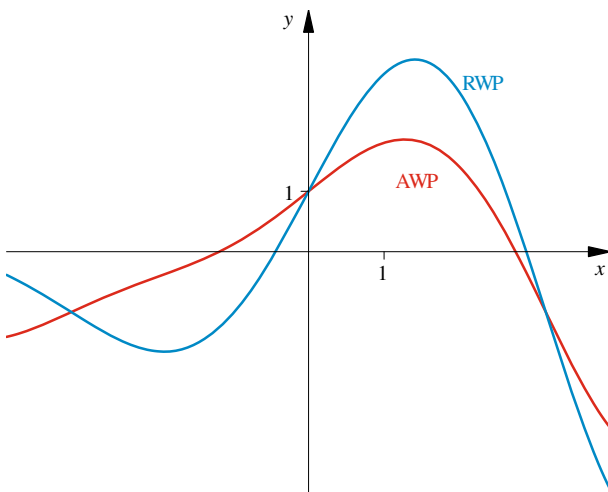


Abbildung 2.3 Die Lösung $y(x) = \sin x + \cos x + \frac{x}{2} \sin x$ des Anfangswertproblems (AWP) und die Lösung $y(x) = \frac{3\pi}{4} \sin x + \cos x + \frac{x}{2} \sin x$ des Randwertproblems (RWP) aus den obigen Beispielen.

2.2 Lineare Systeme von Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir lineare Systeme von gewöhnlichen Differenzialgleichungen. Lineare Differenzialgleichungen sind die einzige große Klasse von Differenzialgleichungen, für die es eine vollständige Theorie gibt. Diese Theorie ist im wesentlichen ein Teil der linearen Algebra und ermöglicht es, alle linearen Differenzialgleichungen vollständig zu lösen. Die Theorie linearer Differenzialgleichungen ist auch als erste Approximation bei der Untersuchung nichtlinearer Probleme sehr nützlich.

Definition eines linearen Systems von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Das System

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{C}$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ und $f: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ heißt **lineares System von Differenzialgleichungen**. Die Funktion f heißt **Inhomogenität**. Das System heißt **homogen**, falls f die Nullfunktion ist, andernfalls **inhomogen**.

Beispiel Das lineare Differenzialgleichungssystem mit $y = (y_1, y_2)^\top$

$$y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y_2'(x) = -y_1(x) + y_2(x)$$

ist homogen. Das lineare System

$$y_1'(x) = -y_1(x) + y_2(x) + e^{2x}$$

$$y_2'(x) = y_1(x) - 3y_2(x) + x$$

ist inhomogen mit der Inhomogenität $f(x) = (e^{2x}, x)^\top$. ◀

Mit dem Superpositionsprinzip werden aus Lösungen weitere Lösungen konstruiert

Wir interessieren uns vor allem für die durch die Linearität dieser Differenzialgleichungen bedingte spezielle Struktur der Lösungen und die Beschreibung der allgemeinen Lösung.

Für homogene lineare Differenzialgleichungen gilt das *Superpositionsprinzip*. Darunter versteht man in der Mathematik eine Grundeigenschaft homogener linearer Gleichungen, nach der alle Linearkombinationen von Lösungen weitere Lösungen der Gleichung ergeben.

Satz zum Superpositionsprinzip

Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen der homogenen Differenzialgleichung

$$y'(x) = A(x)y(x), \quad x \in I \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann ist jede Linearkombination

$$\alpha y_1 + \beta y_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

von y_1 und y_2 ebenfalls eine Lösung.

Beweis: Diese Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} (\alpha y_1(x) + \beta y_2(x))' &= \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x) \\ &= \alpha A(x)y_1(x) + \beta A(x)y_2(x) \\ &= A(x)(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)). \end{aligned}$$

■

Kommentar: Die Menge aller Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung $y'(x) = A(x)y(x)$ bildet einen linearen Vektorraum, genauer einen n -dimensionalen Unterraum des Vektorraums $C^1(I, \mathbb{C}^n)$ aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach \mathbb{C}^n . Der Begriff Vektorraum wird in Band 1, Kapitel 6 erklärt.

Auch Funktionen sind linear abhängig oder linear unabhängig

Die Begriffe *lineare Abhängigkeit* oder *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren im \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n kennen wir aus Band 1, Abschnitt 6.4. Im Folgenden werden diese Begriffe in ganz natürlicher Weise auf vektorwertige Funktionen übertragen.

Lineare Unabhängigkeit von Funktionen

Es seien y_1, y_2, \dots, y_n \mathbb{C}^n -wertige Funktionen. Diese n Funktionen heißen **linear unabhängig** auf $I \subseteq \mathbb{R}$, falls

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ nach sich zieht. Ansonsten heißen diese Funktionen **linear abhängig** auf I .

Ein nützliches Werkzeug zur Entscheidung, ob lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von n vektorwertigen Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n vorliegt, ist die **Wronski-Determinante**

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = \det \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) & y_{2,1}(x) & \dots & y_{n,1}(x) \\ y_{1,2}(x) & y_{2,2}(x) & \dots & y_{n,2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n}(x) & y_{2,n}(x) & \dots & y_{n,n}(x) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet $y_{j,i}$ die i -te Komponente der Funktion y_j , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ist die Wronski-Determinante $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$, so sind die Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n linear unabhängig auf dem ganzen Intervall I , was man wie folgt sieht.

Die Beziehung $\sum_{i=1}^n c_i y_i(x_0) = 0$ stellt ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten c_1, c_2, \dots, c_n dar. Da nach Voraussetzung die Determinante der Koeffizientenmatrix $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0)$ dieses homogenen Gleichungssystems von null verschieden ist, ist $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = 0$ die einzige Lösung von $\sum_{i=1}^n c_i y_i(x_0) = 0$. Daher ist $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ auch die einzige Lösung von $\sum_{i=1}^n c_i y_i(x) = 0$ für alle $x \in I$, und somit sind die Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n linear unabhängig auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Für homogene Systeme von linearen Differenzialgleichungen gilt die folgende Umkehrung.

Satz

Sind y_1, y_2, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen von

$$y'(x) = A(x)y(x), \quad x \in I,$$

so ist die Wronski-Determinante $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$ für jedes $x \in I$ von null verschieden.

Beweis: Wir führen diesen Beweis indirekt, d. h., wir nehmen das Gegenteil an und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Gäbe es eine Stelle $x_0 \in I$ mit $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$, so hätte das homogene System

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$

eine Lösung $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$. Sei nun

$$y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Wegen des Superpositionsprinzips ist $y = y(x)$ eine Lösung von

$$y'(x) - A(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = 0.$$

Da $y(x) = 0$ ebenfalls eine Lösung ist, würde aus der im nächsten Abschnitt vorgestellten Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für Anfangswertprobleme

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad x \in I,$$

folgen. Diese Gleichung würde aber einen Widerspruch zu linearer Unabhängigkeit von y_1, y_2, \dots, y_n darstellen, also unserer, indirekten Annahme zu Beginn, dass es eine Stelle $x_0 \in I$ mit $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$ gibt, widersprechen. Damit ist der Satz bewiesen. ■

?

Warum folgt im obigen Beweis aus $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$, dass das homogene System $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$ eine Lösung $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ hat?

Für n Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n von $y'(x) = A(x)y(x)$, $x \in I$, ist also die lineare Unabhängigkeit durch $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und die lineare Abhängigkeit durch $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = 0$ für alle $x \in I$ charakterisiert. Es tritt nicht der Fall auf, dass es zwei verschiedene Werte $x_0, x_1 \in I$ mit $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$ und $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_1) \neq 0$ gibt.

Fundamentalsystem und Fundamentalmatrix

Eine Menge von n linear unabhängigen Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n von $y'(x) = A(x)y(x)$ bildet ein **Fundamentalsystem**. Die zugehörige Matrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(x) & y_{2,1}(x) & \dots & y_{n,1}(x) \\ y_{1,2}(x) & y_{2,2}(x) & \dots & y_{n,2}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1,n}(x) & y_{2,n}(x) & \dots & y_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

heißt **Fundamentalmatrix**.

Beispiel Das System

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} y(x)$$

hat die beiden Lösungen

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Für die Wronski-Determinante $W[y_1, y_2]$ gilt

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ -e^{2x} & 2e^{-x} \end{pmatrix} = 3e^x \neq 0.$$

Die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bilden daher ein Fundamentalsystem, und die Fundamentalmatrix ist

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ -e^{2x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Satz

Jedes lineare Differenzialgleichungssystem

$$y'(x) = A(x)y(x)$$

besitzt ein Fundamentalsystem.

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = Yc,$$

wobei Y eine Fundamentalmatrix und $c \in \mathbb{C}^n$ ein beliebiger Vektor ist.

Beweis: Sei $x_0 \in I$ beliebig, aber fest. Mit der kanonischen Basis e_1, e_2, \dots, e_n von \mathbb{C}^n definieren wir die n Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y'_i(x) &= A(x)y_i & x &\in I, \\ y_i(x_0) &= e_i, & i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Wieder gibt es aufgrund der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen solcher Systeme, siehe nächsten Abschnitt, die

Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n . Diese bilden ein Fundamentalsystem, da

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Es sei y irgendeine Lösung von $y'(x) = A(x)y(x)$, und $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem. Für das Gleichungssystem

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0), \quad x_0 \in I$$

mit den Unbekannten c_1, c_2, \dots, c_n existiert eine Lösung, da die Determinante des Gleichungssystems als Wronski-Determinante wegen der linearen Unabhängigkeit von y_1, y_2, \dots, y_n von null verschieden ist. Die Funktion $z := \sum_{i=1}^n c_i y_i$ ist aufgrund des Superpositionsprinzips eine Lösung von $y'(x) = A(x)y(x)$ mit $z(x_0) = y(x_0)$ für alle $x \in I$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit solcher Systeme folgt $y(x) = z(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x)$. ■

Der Satz von Picard-Lindelöf sichert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir haben uns bis jetzt nicht überlegt, ob ein lineares System überhaupt lösbar ist. Die Eindeutigkeit der Lösung können wir allerdings nur bei Anfangswertproblemen erwarten und möglicherweise nur auf einem Intervall $J \subseteq I$.

In Band 1, Abschnitt 20.3 wurde die Existenz und Eindeutigkeit – der Satz von Picard-Lindelöf – für allgemeine Differenzialgleichungssysteme 1. Ordnung gezeigt. Wir werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels erkennen, dass dieses Resultat ausreichend ist, da Differenzialgleichungen höherer Ordnung und auch Systeme höherer Ordnung immer zu Differenzialgleichungen erster Ordnung transformiert werden können. D. h., jedes Anfangswertproblem hat zumindest in einer kleinen Umgebung des Anfangswerts genau eine Lösung unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen des Satzes erfüllt sind.

Wir werden den Satz von Picard-Lindelöf für den viel einfacheren Fall von Systemen linearer Differenzialgleichungen formulieren und die wesentlichen Ideen des Beweises für den allgemeinen Fall als Übersicht zusammenfassen.

Satz

Sind die Koeffizientenmatrix A und die Inhomogenität f stetig auf $I \subseteq \mathbb{R}$, so hat das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x)y(x) + f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für alle $x, x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ eine eindeutige Lösung.

Übersicht: Der Satz von Picard-Lindelöf

Dieser Satz ist grundlegend für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Er geht auf die Mathematiker Ernst Leopold Lindelöf (1870–1946) und Charles Émile Picard (1856–1941) zurück.

Satz von Picard-Lindelöf

Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{C}^n$, $a, b > 0$ setze $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ und $Q = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - y_0\|_\infty \leq b\}$. Ist die Funktion $F: I \times Q \rightarrow \mathbb{C}^n$ stetig, komponentenweise durch die positive Konstante R beschränkt und genügt sie bezüglich ihres zweiten Arguments einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitzkonstanten L , gilt also

$$|F_j(x, u) - F_j(x, v)| \leq L \sum_{k=1}^n |u_k - v_k|$$

für $j = 1, 2, \dots, n$, $x \in I$ und $u, v \in Q$, so hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

auf dem Intervall $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ mit $\alpha = \min\{a, b/R\}$ genau eine stetig differenzierbare Lösung $y: J \rightarrow Q$.

Die Existenz einer Lösung bekommen wir nur lokal, also in der Nähe von x_0 , im Satz ausgedrückt durch $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ für ein geeignetes $a \in \mathbb{R}$. Die Menge Q , in der $y(x)$ variiert, stellt in zwei Dimensionen geometrisch ein Rechteck, in drei Dimensionen einen Quader dar. Die Lipschitz-Stetigkeit im zweiten Argument von F ist verantwortlich für die Eindeutigkeit der Lösung. Die Basis des Beweises bildet der Banach'sche Fixpunktsatz. Drei Voraussetzungen sind zu erfüllen:

- Es wird ein **vollständiger metrischer Raum** M benötigt.
- Eine **Fixpunktgleichung** erhalten wir dadurch, dass das Anfangswertproblem in eine Integralgleichung auf dem Raum M umgeschrieben wird.
- Bei dem Operator in der Fixpunktgleichung muss es sich um eine **Kontraktion** handeln, d. h. Lipschitz-Stetigkeit des Operators mit einer Lipschitzkonstanten kleiner als eins.

Diese recht restriktiven Voraussetzungen garantieren die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes und liefern auch ein Verfahren, den Fixpunkt zu bestimmen.

Beweis: (i) Zunächst leiten wir eine Fixpunktgleichung her. Integration der Differenzialgleichung liefert

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x F(u, y(u)) du.$$

Wir setzen

$$(\mathcal{G}(y))(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x F(u, y(u)) du, \quad x \in I$$

und suchen einen Fixpunkt dieser Abbildung \mathcal{G} . Es wird ein metrischer Raum M benötigt, der durch \mathcal{G} in sich selbst abgebildet wird. Wir setzen $M = \{f \in C(J, \mathbb{C}^n) \mid \|f - y_0\|_\infty \leq b\}$, mit J und b wie in der Formulierung des Satzes. Für alle $f \in M$ gilt auch $f(J) \in Q$. Wir betrachten jetzt die Abbildung $\mathcal{G}: M \rightarrow C(J, \mathbb{C}^n)$.

(ii) Wir zeigen: $\mathcal{G}(M) \subseteq M$, M ist ein vollständiger metrischer Raum. Für alle $x \in J$ und $j = 1, 2, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned} |(\mathcal{G}f)_j(x) - y_{j0}| &= \left| \int_{x_0}^x |F(u, f(u))_j| du \right| \\ &\leq R \left| \int_{x_0}^x du \right| \leq R \frac{b}{R} = b. \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathcal{G}f \in M$ und damit $\mathcal{G}: M \rightarrow M$. Der Raum $C(J, \mathbb{C}^n)$ ist mit der Supremumsnorm $\|f - g\|_\infty = \max_{j=1,2,\dots,n} |(f - g)_j|$ für alle $f, g \in M$ ein vollständiger Raum, also ein Banachraum. M ist als abgeschlossene Teilmenge dieses Raumes selbst ein vollständiger metrischer Raum. Wir suchen eine Lösung $y \in M$ der Fixpunktgleichung

$$\mathcal{G}(y) = y.$$

(iii) Wir zeigen nun, dass der Operator \mathcal{G}^m für hinreichend großes m eine Kontraktion ist. Der Versuch, diese Bedingung direkt für $m = 1$ nachzuweisen, liefert

$$|(\mathcal{G}f)_j(x) - (\mathcal{G}g)_j(x)| \leq Ln|x - x_0|\|f - g\|_\infty.$$

Das n kommt wegen der Abschätzung der auftretenden Komponenten $|f_k(u) - g_k(u)|$ durch $\|f - g\|_\infty$ ins Spiel. Nur im Fall $Ln|J| < 1$ ist \mathcal{G} sicher eine Kontraktion. Die folgende Abschätzung jedoch kann mittels vollständiger Induktion nach m für alle $x \in J$, $j = 1, 2, \dots, n$, $f, g \in M$ und $m \in \mathbb{N}$ gezeigt werden:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{G}^m f)_j(x) - (\mathcal{G}^m g)_j(x)| &\leq \frac{Ln|x - x_0|^m}{m!} \|f - g\|_\infty \\ &\leq \frac{Ln|J|^m}{m!} \|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Da die Fakultät schneller wächst als jede Potenz, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass \mathcal{G}^m für jedes $m \geq m_0$ eine Kontraktion ist.

(iv) Als Letztes weisen wir die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes für \mathcal{G} nach. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz existiert für jedes m ein Fixpunkt $u_m \in M$. Mithilfe der Kontraktionseigenschaften von \mathcal{G}^m gelingt es zu zeigen, dass $u_m = u_{m+1} = y$ für jedes $m \geq m_0$. Somit gilt

$$y = \mathcal{G}^{m+1} y = \mathcal{G}(\mathcal{G}^m y) = \mathcal{G}y.$$

■

Beweisidee:

Wir formen das Anfangswertproblem in eine äquivalente Integralgleichung um. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x)y(x) + f(x) \\ \int_{x_0}^x y'(u) du &= \int_{x_0}^x (A(u)y(u) + f(u)) du \\ y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x (A(u)y(u) + f(u)) du. \end{aligned}$$

Für diese Fixpunktgleichung definieren wir induktiv mittels **Picard-Iteration** die Funktionenfolge

$$\begin{aligned} y_0(x) &:= y(x_0) \\ y_1(x) &:= y(x_0) + \int_{x_0}^x (A(u)y_0(u) + f(u)) du \\ y_{n+1}(x) &:= y(x_0) + \int_{x_0}^x (A(u)y_n(u) + f(u)) du. \end{aligned}$$

Diese Folge $y_n(x)$ konvergiert gegen die Lösung $y(x)$,

$$y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$$

Die so erhaltene Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems ist als Grenzwert der Folge $y_n(x)$ eindeutig bestimmt. ■

Kommentar: Bei linearen Differenzialgleichungen ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nicht nur lokal – wie im allgemeinen Fall – sondern global für alle $x \in I$ gesichert.

Beispiel Wir lösen das skalare Anfangswertproblem $y'(x) = y(x)$ mit $y(x_0) = y(0) = 1$ mittels Picard-Iteration:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1 \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x 1 du = 1 + x \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x (1 + u) du = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \\ y_3(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Diese unendliche Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$. ◀

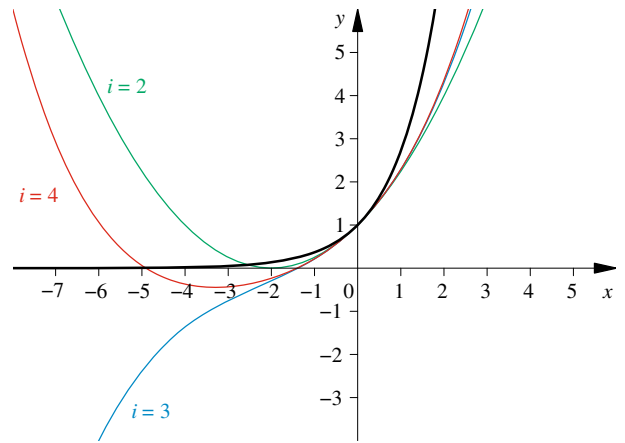


Abbildung 2.4 Konvergenz der Picard-Iterierten y_i für $i = 2, 3, 4$ zur Grenzfunktion $y(x) = e^x$.

Die Lösung von linearen Systemen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich als Matrixexponentialfunktion schreiben

Im Fall der Differenzialgleichung

$$y'(x) = Ay(x), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

kann ein Fundamentalsystem immer mithilfe der *Matrixexponentialfunktion* angegeben werden. Die Matrixexponentialfunktion und deren grundlegende Eigenschaften werden im Folgenden zusammengefasst.

Zur Erinnerung: Im Fall $n = 1$, also für $y'(x) = ay(x)$, $a \in \mathbb{C}$ und einer Anfangsbedingung $y(x_0) \in \mathbb{C}$ ist die Lösung $y(x) = y(x_0)e^{ax}$. Motiviert durch dieses Beispiel machen wir für die Lösungen des Systems mit konstanten Koeffizienten den Ansatz

$$y(x) = v e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n.$$

Durch Differenzieren und Einsetzen in das lineare System erhalten wir

$$\lambda v e^{\lambda x} = A v e^{\lambda x} \iff \lambda v = A v.$$

Das kommt uns aus der linearen Algebra sehr bekannt vor: $y(x) = v e^{\lambda x}$ löst die Differenzialgleichung genau dann, wenn λ ein Eigenwert von A ist und v ein zugehöriger Eigenvektor. Ist die konstante Matrix A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und Eigenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n , so sind alle $v_i e^{\lambda_i x}$, $i = 1, 2, \dots, n$, linear unabhängige Lösungen. Daher ist die Matrix

$$Y(x) = (v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, v_n e^{\lambda_n x})$$

eine Fundamentalmatrix von $y'(x) = Ay(x)$. Den Zusammenhang dieser Darstellung von $Y(x)$ mit der Matrixexponentialfunktion leiten wir nach der folgenden Definition her.

Definition der Matrixexponentialfunktion

Sei A eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Die Matrixexponentialfunktion ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$e^{Ax} = I + Ax + \frac{A^2 x^2}{2!} + \frac{A^3 x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x^k}{k!}.$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Falls zwei $n \times n$ -Matrizen A und B kommutieren, also $AB = BA$ gilt, so folgt

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Diese Eigenschaft kann in analoger Weise wie für die skalare Exponentialfunktion e^a , $a \in \mathbb{C}$, mithilfe der Cauchy'schen Produktreihe zweier unendlicher Reihen gezeigt werden, siehe Band 1, Abschnitt 10.3. Daraus resultieren einige weitere Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion e^A .

1. $e^{A(x+z)} = e^{Ax} e^{Az}$ für alle $x, z \in \mathbb{R}$.
2. e^{Ax} ist regulär und $(e^{Ax})^{-1} = e^{-Ax}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
3. Die Abbildung $x \mapsto e^{Ax}$ ist differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$ und es gilt $(e^{Ax})' = A e^{Ax}$.

Aus der letzten Eigenschaft folgt, dass die Matrixexponentialfunktion e^{Ax} eine Fundamentalmatrix der Differenzialgleichung $y'(x) = Ay(x)$ ist.

Die explizite Berechnung von e^{Ax} erfolgt allgemein unter Verwendung der Jordan'schen Normalform J der Matrix A . Es gilt

$$A = T J T^{-1},$$

wobei die $n \times n$ -Transformationsmatrix T , deren Spalten die Eigenvektoren und Hauptvektoren von A sind, regulär ist. Es gilt

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T J T^{-1} x)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T J^k T^{-1} x^k}{k!} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k x^k}{k!} T^{-1}. \end{aligned}$$

Wie leicht zu erkennen ist, genügt es also e^{Jx} zu berechnen.

Falls wie in dem motivierenden Beispiel zu Beginn dieses Abschnitts die Matrix A diagonalisierbar ist mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und Eigenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n so folgt

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= T e^{Jx} T^{-1} \\ &= T \operatorname{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k x^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k x^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k x^k}{k!} \right) T^{-1} \\ &= T \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}) T^{-1}, \end{aligned}$$

und mit $T e^{Jx} T^{-1}$ ist auch $T e^{Jx} = (v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, v_n e^{\lambda_n x})$ eine Fundamentalmatrix $Y(x)$. Die Berechnung von T^{-1} ist also nicht unbedingt notwendig.

?

Warum ist mit $T e^{Jx} T^{-1}$ auch $T e^{Jx} = (v_1 e^{\lambda_1 x}, v_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, v_n e^{\lambda_n x})$ eine Fundamentalmatrix $Y(x)$ für $y'(x) = Ay(x)$?

Falls A nicht diagonalisierbar ist, hat die Jordan'sche Normalform J die allgemeine Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & J_k \end{pmatrix}.$$

Dabei ist jeder Jordanblock J_i , $i = 1, 2, \dots, k$, eine $m_i \times m_i$ -Matrix der Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_i & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mu_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_i \end{pmatrix},$$

wobei $\mu_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ein Eigenwert von J ist. Der Fall $J_i = (\mu_i)$ ist zugelassen. Ein Eigenwert μ_i kann in mehreren Blöcken auftreten. Zu jedem Jordanblock J_i gehören ein Eigenvektor und $m_i - 1$ Hauptvektoren. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ ist gleich der Anzahl der Jordanblöcke, in denen der Eigenwert λ auftritt. Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts ist gleich der Summe der Dimensionen aller Jordanblöcke, in denen der Eigenwert λ auftritt.

Wir berechnen e^{Jx} für einen $m \times m$ -Jordanblock

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Für diesen $m \times m$ -Jordanblock, der dem Eigenwert λ entspricht, gilt

$$e^{Jx} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & x & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Sachverhalt ist eine Konsequenz aus der Darstellung $J = \lambda I + N$, wobei die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine $m \times m$ **nilpotente Matrix** darstellt, d. h. eine Matrix, für die gilt: $N^k = \mathbf{0}$ für alle $k \geq m$, $m \in \mathbb{N}$.

?

Überprüfen Sie diese Eigenschaften für die Matrix N der Dimension 4.

Daher folgt

$$e^{Nx} = I + xN + \frac{x^2}{2}N^2 + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}N^{m-1}.$$

Beispiel Sei $A = TJT^{-1}$ eine 3×3 -Matrix mit Jordan'scher Normalform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und Transformationsmatrix $T = [\mathbf{v}, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2]$, wobei \mathbf{h}_i , $i = 1, 2$, die entsprechenden Hauptvektoren zum Eigenvektor \mathbf{v} sind. Es ist

$$e^{Jx} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die Fundamentalmatrix $Y(x) = Te^{Jx}$ hat die Spalten

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \mathbf{v} e^{\lambda x}, \\ \mathbf{y}_2(x) &= (x\mathbf{v} + \mathbf{h}_1) e^{\lambda x}, \\ \mathbf{y}_3(x) &= \left(\frac{x^2}{2}\mathbf{v} + x\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 \right) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel werden alle möglichen Fälle von Eigenwerten einer 2×2 -Matrix A berücksichtigt.

Beispiel Betrachten wir speziell das lineare zweidimensionale Differenzialgleichungssystem $\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x)$:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ und die entsprechenden Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung \mathbf{y} dieses homogenen Systems ist

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{3x} + c_2 \mathbf{v}_2 e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ ist eine doppelter Eigenwert von A mit Eigenvektor \mathbf{v} und Hauptvektor \mathbf{h} ,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung \mathbf{y} dieses homogenen Systems ist

$$\mathbf{y}(x) = c_1 \mathbf{v} e^{2x} + c_2 (x\mathbf{v} + \mathbf{h}) e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von A sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 + i \\ \lambda_2 &= \overline{\lambda_1} = 2 - i \end{aligned}$$

und die entsprechenden Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \mathbf{v} + i\mathbf{u}$$

$$\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \mathbf{v} - i\mathbf{u}.$$

Die allgemeine Lösung \mathbf{y} dieses homogenen Systems ist mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= c_1 \mathbf{v}_1 e^{(2+i)x} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{(2-i)x} \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 e^{2x} (\cos x + i \sin x) + c_2 \mathbf{v}_2 e^{2x} (\cos x - i \sin x). \end{aligned}$$

Durch Linearkombination der beiden konjugiert komplexen Fundamentallösungen erhält man zwei linear unabhängige, reelle Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= \frac{(\mathbf{v}_1 e^{(2+i)x} + \mathbf{v}_2 e^{(2-i)x})}{2} \\ &= e^{2x} (\mathbf{v} \cos x - \mathbf{u} \sin x), \\ \mathbf{y}_2(x) &= \frac{(\mathbf{v}_1 e^{(2+i)x} - \mathbf{v}_2 e^{(2-i)x})}{2i} \\ &= e^{2x} (\mathbf{u} \cos x + \mathbf{v} \sin x). \end{aligned}$$

Kommentar: Eine typische $n \times n$ -Matrix A ist diagonalisierbar, hat also n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – nicht alle notwendigerweise verschieden – und n Eigenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n . Die Matrix A kann als $A = TDT^{-1}$ geschrieben werden mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ und $T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Das lineare Differenzialgleichungssystem

$$y'(x) = Ay(x) = TDT^{-1}y(x),$$

lässt sich mit der Koordinatentransformation $z(x) := T^{-1}y(x)$ oder $y(x) = Tz(x)$ entkoppeln. Aus

$$Tz'(x) = y'(x) = TDT^{-1}y(x) = TDT^{-1}Tz(x)$$

folgt $z'(x) = Dz(x)$ oder

$$z'_1(x) = \lambda_1 z_1(x)$$

$$z'_2(x) = \lambda_2 z_2(x)$$

$$\vdots$$

$$z'_n(x) = \lambda_n z_n(x)$$

mit allgemeiner Lösung $z_i(x) = c_i e^{\lambda_i x}$, $c_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Durch Rücktransformation $y(x) = Tz(x)$ gelangt man wieder zu der schon über die Matrixexponentialfunktion bekannten Lösung des Systems $y(x)' = Ay(x)$.

Die Methode der Variation der Konstanten löst das inhomogene Problem

Ist eine spezielle Lösung y_p einer inhomogenen, linearen Differenzialgleichung $y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$ bekannt, so kann jede weitere Lösung y als

$$y = y_h + y_p$$

geschrieben werden, vgl. Band 1, Abschnitt 20.2. Dabei wird y_p als *Partikulärlösung*, also als eine spezielle Lösung der inhomogenen und y_h als die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung bezeichnet.

?

Überlegen Sie sich, dass $y = y_h + y_p$ immer eine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $y(x) = A(x)y(x) + f(x)$ ist und dass umgekehrt jede Lösung in dieser Form dargestellt werden kann.

Mithilfe einer Fundamentalmatrix Y des homogenen Problems lässt sich die allgemeine inhomogene Lösung ausdrücken durch

$$y = Yc + y_p, \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Wie findet man nun eine solche spezielle Lösung y_p ?

Man variiert die Konstante, was zum Ansatz

$$y_p(x) = Y(x)c(x)$$

für die Partikulärlösung $y_p(x)$ führt. Der konstante Vektor c wird also als von x abhängige Funktion $c(x)$ angesetzt. Dieser Ansatz $y_p(x) = Y(x)c(x)$ und die entsprechende elementweise Ableitung $y'_p(x) = Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x)$ werden in die Differenzialgleichung $y'(x) = Ay(x) + f(x)$ eingesetzt, was

$$\begin{aligned} y'_p(x) &= Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x) \\ &= A(x)Y(x)c(x) + Y(x)c'(x) \\ &= A(x)Y(x)c(x) + f(x) \end{aligned}$$

liefert. Nach Umformen und Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} Y(x)c'(x) &= f(x), \\ c'(x) &= Y^{-1}(x)f(x), \\ c(x) &= c(x_0) + \int_{x_0}^x Y^{-1}(u)f(u) du. \end{aligned}$$

Für eine Partikulärlösung $y_p(x_0) = 0$ ist $c(x_0) = 0$. Das Integral über den Vektor $Y^{-1}(u)f(u)$ ist komponentenweise aufzufassen.

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x)y(x) + f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y_0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y^{-1}(u)f(u) du,$$

wobei $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist.

?

Wir sind zu Beginn dieses Abschnitts von der allgemeinen Lösung einer inhomogenen Differenzialgleichung $y(x) = Y(x)c + y_p(x)$ ausgegangen. Verifizieren Sie, dass $c = Y^{-1}(x_0)y_0$ folgt, falls $y(x_0) = y_0$ gilt.

Beispiel Betrachten wir die einfache lineare, skalare Differenzialgleichung

$$y'(x) = qy(x) + a, \quad q \in \mathbb{R},$$

mit konstanter Inhomogenität $a \in \mathbb{R}$ und einer bei $x_0 = 0$ gegebenen Anfangsbedingung $y(0)$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist $y_h(x) = e^{qx}c$, und mithilfe der Variation der Konstanten machen wir für die Partikulärlösung den Ansatz $y_p(x) = e^{qx}c(x)$. Durch Ableiten

und Einsetzen in die gegebene Gleichung und anschließender Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= q e^{qx} c(x) + e^{qx} c'(x) \\ &= q e^{qx} c(x) + a \\ e^{qx} c'(x) &= a \\ c'(x) &= a e^{-qx} \\ c(x) &= -\frac{a}{q} e^{-qx} \\ y_p(x) &= e^{qx} \left(-\frac{a}{q} \right) e^{-qx} = -\frac{a}{q} \end{aligned}$$

und für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung folgt

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{qx} c - \frac{a}{q}.$$

Es überrascht in diesem Fall nicht, dass die Partikulärlösung konstant ist. Falls eine Anfangsbedingung $y(0)$ gegeben ist, kann die Konstante c als Funktion von dieser ausgedrückt werden. ▶

Auch die Ansatzmethode kann das inhomogene Problem lösen

Oft wird auch ein geeigneter **Ansatz** verwendet, um eine Partikulärlösung zu bekommen. Der entsprechende Ansatz richtet sich natürlich nach der Art der Inhomogenität. Die Inhomogenität f einer Differenzialgleichung wird auch als *rechte Seite* bezeichnet, daher spricht man bei dieser Methode auch vom *Ansatz vom Typ der rechten Seite*.

Beispiel Wir wollen das folgende zweidimensionale Anfangswertproblem $y'(x) = A y(x) + f(x)$ lösen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 1 - x + 2e^x \\ -2x \end{pmatrix}$$

und die Anfangsbedingung $y(x_0 = 0) = (3, 0)^T$ gegeben sind. Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$ und die Eigenvektoren $v_1 = (1, -i)^T$, $v_2 = (1, i)^T$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung ergibt sich zu

$$y(x) = c_1 v_1 e^{(1+2i)x} + c_2 v_2 e^{(1-2i)x},$$

und die entsprechende reelle Darstellung ist

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \sin 2x & -\cos 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Da die Inhomogenität $f(x)$ in diesem Beispiel gemäß

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 - x \\ -2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^x$$

aufgespalten werden kann, wählen wir als Ansatz für die Partikulärlösung

$$y_p(x) = a + bx + e^x d \quad a, b, d \in \mathbb{C}^2.$$

Nach Ableiten, Einsetzen und Koeffizientenvergleich erhalten wir als Partikulärlösung

$$y_p(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix},$$

und schließlich ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung in reeller Darstellung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = (3, 0)^T$ ergibt $c_1 = 3$ und $c_2 = 1$. Zusammenfassend erhalten wir für die allgemeine Lösung

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^x \cos 2x + e^x \sin 2x + x \\ 3e^x \sin 2x - e^x \cos 2x + e^x \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Kommentar: Falls die Komponenten von $f(x)$ Polynome sind, so macht man einen Polynomansatz für die Partikulärlösung. Falls in $f(x)$ Terme von der Form $e^{\mu x}$, $\mu \in \mathbb{R}$, auftreten, so wählt man als Ansatz für die Partikulärlösung $d e^{\mu x}$, $d \in \mathbb{C}^n$. Falls $f(x)$ trigonometrische Polynome $a \cos vx + b \sin vx$, $a, b, v \in \mathbb{R}$, enthält, passt als Ansatz ebenfalls eine Funktion vom gleichen Typ.

2.3 Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Zu Beginn dieses Kapitels haben wir eine ganz allgemeine Differenzialgleichung n -ter Ordnung und auch das dazugehörige Anfangswertproblem definiert. Im Folgenden betrachten wir eine lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung.

Definition einer linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung

Eine **lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung**, ($n \in \mathbb{N}$) ist eine Gleichung

$$\begin{aligned} a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) \\ + \dots + a_0(x) y(x) = f(x) \end{aligned}$$

für jedes $x \in I$, mit stetigen Funktionen $a_j: I \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a_n(x) \neq 0$, für $x \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Falls $f(x) = 0$ für alle x liegt eine **homogene** Differenzialgleichung vor, sonst eine **inhomogene**. Die Funktion $f(x)$ wird als **Inhomogenität** oder **rechte Seite** bezeichnet.

Die gesuchte Lösungsfunktion y und deren Ableitungen treten in dieser Gleichung linear auf, werden also nur mit Funktionen der unabhängigen Variablen x multipliziert.

Eine Differenzialgleichung höherer Ordnung ist auch ein lineares System 1. Ordnung

Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen folgen direkt aus dem allgemeinen Satz von Picard-Lindelöf für Differenzialgleichungen 1. Ordnung. Neue Variablen u_1, u_2, \dots, u_n erlauben es nämlich, diese Differenzialgleichung höherer Ordnung in ein System 1. Ordnung umzuschreiben,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= y(x) \\ u_2(x) &= y'(x) = u_1'(x) \\ u_3(x) &= y''(x) = u_2'(x) \\ &\vdots \\ u_n(x) &= y^{(n-1)}(x) = u_{n-1}'(x) \\ u_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -\frac{1}{a_n(x)} \left(a_{n-1}(x)u_n + a_{n-2}(x)u_{n-1}(x) + \dots + a_0(x)u_1(x) - f(x) \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten dadurch das System

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{g}(x)$$

von Differenzialgleichungen 1. Ordnung, wobei

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Es können daher alle Resultate, die im vorigen Abschnitt für Systeme 1. Ordnung hergeleitet wurden, auf lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung übertragen werden.

Dabei wird eine (in)homogene Differenzialgleichung höherer Ordnung in ein (in)homogenes System 1. Ordnung überführt.

Das Superpositionsprinzip gilt, jede Linearkombination von Lösungen der homogenen Differenzialgleichung ist wieder eine Lösung der homogenen Gleichung. Die Menge aller Lösungen der homogenen Differenzialgleichung ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Die linear unabhängigen Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem also

eine Basis dieses Vektorraums. Die n Lösungen sind genau dann linear unabhängig, wenn die Wronski-Determinante

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) &= \\ &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

an einer Stelle $x \in I$ nicht verschwindet.

Die allgemeine inhomogene Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $y_h(x)$ der homogenen und einer speziellen Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differenzialgleichung. Eine Partikulärlösung kann wieder mittels der Methode der Variation der Konstanten oder mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite berechnet werden.

Die charakteristische Gleichung entspricht dem charakteristischen Polynom einer Matrix

Betrachten wir nun den einfachen Spezialfall einer linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Motiviert durch die Lösung $y(x) = y(x_0)e^{\lambda x}$ der einfachen skalaren linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung $y'(x) = \lambda y(x)$, versuchen wir es auch in diesem Fall mit $y(x) = e^{\lambda x}$ als Ansatz für die allgemeine homogene Gleichung, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ noch unbekannt ist.

Beispiel Für die Differenzialgleichung

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$$

benötigen wir die ersten drei Ableitungen unserer Ansatzfunktion $y(x) = e^{\lambda x}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x}, \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x}, \\ y'''(x) &= \lambda^3 e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

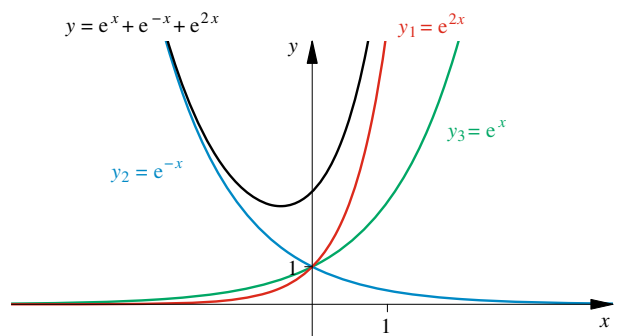


Abbildung 2.5 Drei Fundamentallösungen für $y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ und eine Linearkombination $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^x$ mit $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung führt zum Ausdruck

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)e^{\lambda x} = 0.$$

Da die Exponentialfunktion nie null wird, muss

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

gelten. Wir finden drei mögliche Werte für λ und daher auch drei Lösungsfunktionen, $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x}$ und $y_3(x) = e^x$. Jede Linearkombination dieser Funktionen ist ebenfalls eine Lösung. Die Funktionen y_1 , y_2 und y_3 bilden ein Fundamentalsystem also jede Lösung y von $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ lässt sich als Linearkombination von y_1 , y_2 , y_3 schreiben. ◀

Im allgemeinen Fall einer linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung ($n \in \mathbb{N}$) mit konstanten Koeffizienten auf $I \subseteq \mathbb{R}$, also

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = f(x)$$

mit einer auf I stetigen Funktion f und $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots, n$, liefert der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ ebenfalls ein Fundamentalsystem für die homogene Differenzialgleichung. Entsprechendes Ableiten und Einsetzen führt auf

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x} = 0.$$

Die Gleichung $p(\lambda) = 0$ wird als **charakteristische Gleichung** einer Differenzialgleichung n -ter Ordnung bezeichnet. Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann eine Lösung der Differenzialgleichung, wenn λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Kommentar: Die Lösungen dieser charakteristischen Gleichung $p(\lambda) = 0$ entsprechen genau den Eigenwerten der Matrix A , die man erhält, wenn die skalare homogene Differenzialgleichung n -ter Ordnung in ein n -dimensionales System 1. Ordnung $\mathbf{u}'(x) = A\mathbf{u}(x)$ transformiert wird. Die charakteristische Gleichung entspricht daher dem charakteristischen Polynom einer Matrix, wie wir es in Band 1, Abschnitt 14.3 kennengelernt haben.



Schreiben Sie die Differenzialgleichung

$$y'''(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$$

aus obigem Beispiel in ein dreidimensionales System 1. Ordnung $\mathbf{u}'(x) = A(x)\mathbf{u}(x)$ um. Was sind die Eigenwerte der Matrix A ?

Falls das charakteristische Polynom n verschiedene Nullstellen $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, n$ hat, erhält man n linear unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}.$$

Jede beliebige Lösung y kann als Linearkombination dargestellt werden.

Falls eine Nullstelle λ der charakteristischen Polynoms die Vielfachheit $m > 1$ hat, sind die Funktionen

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x}, \dots, y_m(x) = x^{m-1} e^{\lambda x}$$

m linear unabhängige Lösungen der Differenzialgleichung. Die lineare Unabhängigkeit kann durch Berechnung der Wronski-Determinante nachgewiesen werden.

Falls das charakteristische Polynom eine komplexe Nullstelle $\lambda = a + ib$ hat, wissen wir schon, dass

$$e^{\lambda x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

eine komplexwertige Lösung ist. Aufspalten dieser Lösung in Realteil und Imaginärteil zeigt, dass $\operatorname{Re}(e^{\lambda x})$ und $\operatorname{Im}(e^{\lambda x})$ reelle Lösungen der Differenzialgleichung sind, die dem Paar $a \pm ib$ konjugiert komplexer Nullstellen entsprechen. Falls diese komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms die Vielfachheit m hat, sind die Funktionen

$$x^j e^{ax} \cos bx \quad \text{und} \quad x^j e^{ax} \sin bx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

$2m$ linear unabhängige reelle Lösungen der Differenzialgleichung.

Zusammenfassend: Da das Polynom $p(\lambda)$ – nach Vielfachheiten gezählt – genau n Nullstellen hat, existieren auch im Fall mehrfacher Nullstellen n linear unabhängige Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n und jede Lösung y der homogenen Differenzialgleichung höherer Ordnung lässt sich mit $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ wieder schreiben als

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten bekommt man auch hier eine Partikulärlösung, also eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

Betrachten wir zunächst den Fall einer skalaren Differenzialgleichung der 2. Ordnung, also

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung und schreiben wir die skalare Differenzialgleichung 2. Ordnung in ein zweidimensionales System 1. Ordnung mithilfe der Transformation $\mathbf{u}(x) = (y(x), y'(x))^T$, so erhalten wir

$$\mathbf{u}'(x) = A(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{g}(x),$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz für die Partikulärlösung u_p dieses Systems 1. Ordnung unter Verwendung der Methode der Variation der Konstanten ist

$$u_p(x) = Y(x)c(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix},$$

Es gilt

$$u_p'(x) = Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + g(x)$$

und da $Y'(x)c(x) = A(x)Y(x)c(x)$ erfüllt ist, erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a_2(x)} \end{pmatrix}$$

zur Berechnung der Unbekannten $c_1'(x)$ und $c_2'(x)$. Da die Determinante der Koeffizientenmatrix die Wronski-Determinante ist und sie wegen der linearen Unabhängigkeit von y_1 und y_2 nicht null ist, hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Durch Integration erhält man die gesuchten Funktionen c_1 und c_2 und daraus die Partikulärlösung u_p . Für skalare Differenzialgleichungen der Ordnung $n > 2$ kann man in gleicher Art und Weise vorgehen.

Beispiel Die charakteristische Gleichung der Differenzialgleichung

$$y''(x) + y(x) = \frac{2}{\cos x}$$

lautet $\lambda^2 + 1 = 0$, und sie hat die Lösungen $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$. Daher ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung in reeller Schreibweise

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Für die Partikulärlösung der homogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$. Nach obigen Überlegungen ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem zur Berechnung der gesuchten Funktionen:

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x &= 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x &= \frac{2}{\cos x}. \end{aligned}$$

Nach Lösen des Gleichungssystems und Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1(x) &= 2 \ln(|\cos x|) \\ c_2(x) &= 2x, \end{aligned}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2 \ln(|\cos x|) \cos x + 2x \sin x. \quad \blacktriangleleft$$

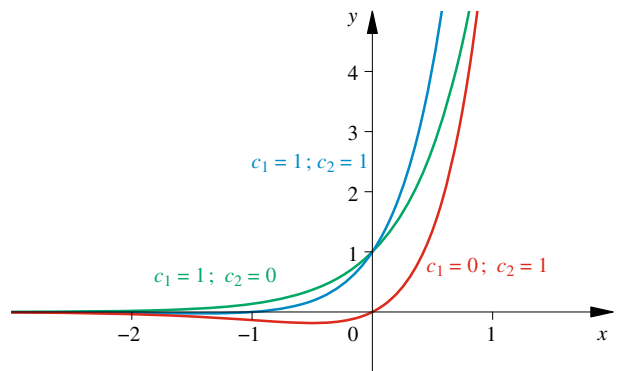


Abbildung 2.6 Drei Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$ für einige Werte $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Das Phänomen der Resonanz beachten

Die partikuläre Lösung kann auch wieder mithilfe von speziellen Ansätzen gefunden werden. Es ist aber zu beachten, dass der Ansatz für die Partikulärlösung mit x^k multipliziert werden muss, falls in der Inhomogenität $f(x)$ auch $e^{\mu x}$ vorkommt und μ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Dieser Fall wird als **Resonanz** bezeichnet. Von Resonanz spricht man auch, wenn in der charakteristischen Gleichung der (homogenen) Differenzialgleichung eine mehrfache Nullstelle auftritt.

Beispiel Die Differenzialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = e^{2x}$$

weist die doppelte Nullstelle $\lambda = 2$ der charakteristischen Gleichung auf. Daher ist die allgemeine homogene Lösung

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},$$

und als Ansatz für die partikuläre Lösung würde man $y_p(x) = c e^{2x}$ verwenden. Aber Achtung! Hier liegt Resonanz vor, denn e^{2x} kommt sowohl in der homogenen Lösung als auch in der Inhomogenität vor. Der richtige Ansatz ist hier

$$y_p(x) = cx^2 e^{2x}.$$

Ableiten und Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert $c = \frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung ist daher

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}. \quad \blacktriangleleft$$

Es sei $p(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Differenzialgleichung

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x).$$

Für $f(x) = e^{\mu x}$, $\mu \in \mathbb{C}$, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

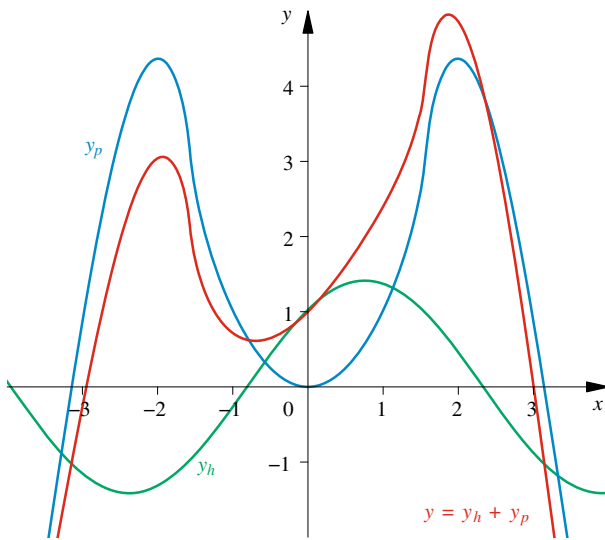


Abbildung 2.7 Die allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ der Differentialgleichung $y''(x) + y(x) = \frac{2}{\cos x}$, eine Partikulärlösung $y_p(x)$ und die Lösung $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ für $c_1 = c_2 = 1$.

1. Fall: $p(\mu) \neq 0$, d. h., μ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Man macht den Ansatz

$$y_p(x) = c e^{\mu x}$$

mit einer zu bestimmenden Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$a_2 c \mu^2 e^{\mu x} + a_1 c \mu e^{\mu x} + a_0 c e^{\mu x} = e^{\mu x}.$$

Daher ist $y_p(x)$ eine Partikulärlösung, falls

$$c p(\mu) = 1$$

gilt. Für $p(\mu) \neq 0$ ist daher $c = \frac{1}{p(\mu)}$ eindeutig bestimmt.

2. Fall: $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) \neq 0$, d. h., μ ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. In diesem Fall von Resonanz funktioniert der Ansatz

$$y_p(x) = c x e^{\mu x}$$

mit einer zu bestimmenden Konstante $c \in \mathbb{C}$. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$c x e^{\mu x} p(\mu) + c e^{\mu x} p'(\mu) = e^{\mu x}.$$

Wegen $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) \neq 0$ ist $y_p(x)$ für

$$c = \frac{1}{p'(\mu)}$$

eine Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung.

3. Fall: $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) = 0$, d. h., μ ist eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Wieder liegt Resonanz vor. In diesem Fall funktioniert der Ansatz

$$y_p(x) = c x^2 e^{\mu x},$$

wobei $c \in \mathbb{C}$ eine zu bestimmende Konstante ist. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(p(\mu)x^2 + 2p'(\mu)x + p''(\mu))c e^{\mu x} = e^{\mu x}.$$

Wegen $p(\mu) = 0$, $p'(\mu) = 0$ ist $y_p(x)$ für

$$c = \frac{1}{p''(\mu)}$$

eine Lösung.

Beispiel Ein *harmonischer Oszillator*, ein klassisches Problem in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen, ist ein eindimensional schwingendes System mit einer Schwingungsfrequenz $\omega_0 \in \mathbb{R}$ und einer eventuell vorhandenen meist periodischen Anregung $f(x) = e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$, von außen, genügt also der Differentialgleichung

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = e^{i\omega x} = (\cos \omega x + i \sin \omega x).$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2.$$

Daher tritt für $\omega^2 \neq \omega_0^2$ keine Resonanz auf. In diesem Fall ist

$$y_p(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega x} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

eine komplexe Partikulärlösung. Durch Trennung in Real- und Imaginärteil folgt, dass

$$y_p(x) = \frac{\cos \omega x}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

eine Partikulärlösung von

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \cos \omega x$$

ist und dass

$$y_p(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

eine Partikulärlösung von

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin \omega x$$

darstellt. Im nichtresonanten Fall schwingt die Partikulärlösung mit konstanter Amplitude, also konstanter maximaler Auslenkung, und mit der Frequenz ω der periodischen äußeren Kraft.

Für $\omega = \pm \omega_0$ tritt Resonanz auf. Sei etwa $\omega = \omega_0$. Wegen $p'(\lambda) = 2\lambda$ gilt $p'(i\omega_0) \neq 0$ und

$$y_p(x) = \frac{x}{2i\omega_0} e^{i\omega_0 x} = \frac{x}{2\omega_0} \sin \omega_0 x - i \frac{x}{2\omega_0} \cos \omega_0 x$$

ist eine komplexe Partikulärlösung. Durch Trennung in Real- und Imaginärteil folgt, dass

$$y_p(x) = \frac{x}{2\omega_0} \sin \omega_0 x$$

eine Partikulärlösung von

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \cos \omega_0 x$$

ist und dass

$$y_p(x) = -\frac{x}{2\omega_0} \cos \omega_0 x$$

eine Partikulärlösung von

$$y''(x) + \omega_0^2 y(x) = \sin \omega_0 x$$

ist. Im resonanten Fall schwingt die Partikulärlösung mit der Frequenz ω der periodischen Anregung, aber mit linear in der Zeit x wachsender Amplitude. ◀

Verallgemeinerung: Im allgemeinen funktioniert dieses Ansatzverfahren für lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und Inhomogenitäten der Bauart

$$f(x) = (d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n) e^{\mu x},$$

mit $\mu \in \mathbb{C}$ und $d_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, n$. Wie zuvor hängt der Ansatz davon ab, ob Resonanz auftritt. Es ist

$$y_p(x) = x^m (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n) e^{\mu x},$$

falls μ eine m -fache Nullstelle für $m = 1, 2, \dots, n$ von $p(\mu)$ ist.

Die unbekannten Koeffizienten c_i , $i = 0, \dots, n$, werden durch Einsetzen in die Differenzialgleichung und Koeffizientenvergleich bestimmt.

Kommentar: Ist die Inhomogenität f aus mehreren Funktionen zusammengesetzt, so bestimmt man für jeden Teil mittels Ansatz eine Partikulärlösung und setzt diese zur Gesamtlösung zusammen (Superposition).

Wir wollen jetzt eine Klasse von linearen Differenzialgleichungen betrachten, deren Koeffizienten nicht konstant sind, sondern von der Variablen x abhängen können.

Durch Variablensubstitution zu einer Differenzialgleichung höherer Ordnung

Aus der **Euler'schen Differenzialgleichung**

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + \dots + a_2 x^2 y^{(2)}(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

wird nach der Variablensubstitution $x = e^t$ eine lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Mithilfe der Notation

$$y(e^t) = z(t) \quad \text{oder} \quad y(x) = z(\ln x)$$

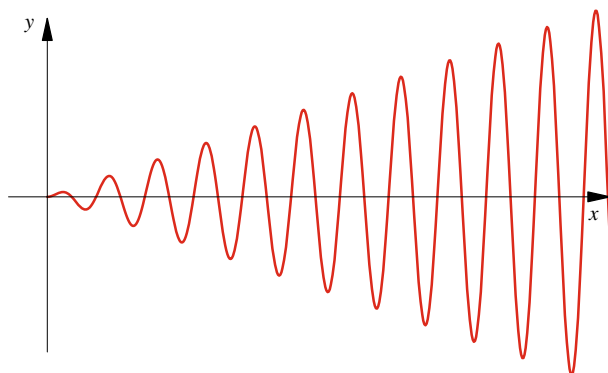
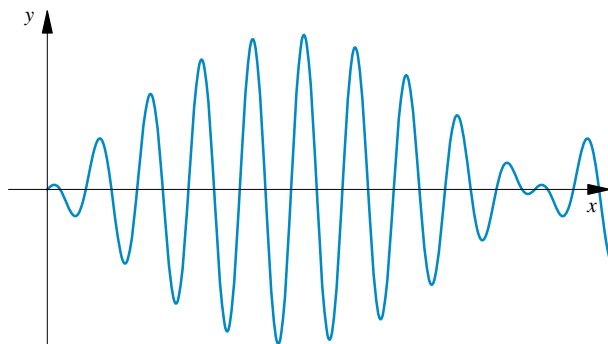
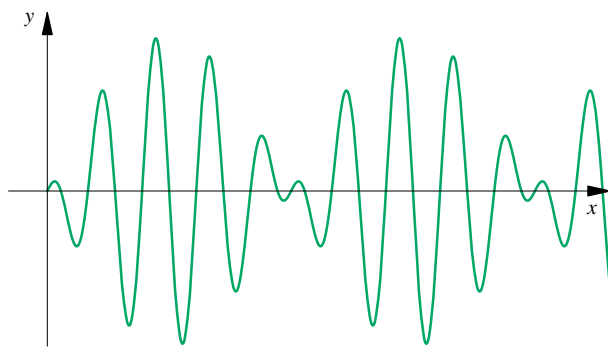


Abbildung 2.8 Die Lösungen des harmonischen Oszillators für $\omega_0 = 1$ und verschiedene Frequenzen ω der periodischen Anregung. ($\omega = 0.8$ grün, $\omega = 0.9$ blau, $\omega = 1.0$ rot)

folgt für die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y'(e^t) e^t = y'(x)x \implies x y'(x) = z'(t), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \dots = y''(x)x^2 + \frac{dz}{dt} \implies x^2 y''(x) = z''(t) - z'(t), \\ &\dots \end{aligned}$$

Beispiel Betrachten wir die Euler'sche Differenzialgleichung für $n = 3$, also

$$x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) - 6x y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Die oben beschriebene Vorgehensweise führt mit

$$\begin{aligned} x y'(x) &= z'(t) \\ x^2 y''(x) &= z''(t) - z'(t) \\ x^3 y'''(x) &= z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t) \end{aligned}$$

auf die lineare homogene Differenzialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z'''(t) - 7z'(t) + 6z(t) = 0,$$

deren Lösung

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-3t}$$

ist. Nach Rücksubstitution $t = \ln x$, $x \neq 0$, erhalten wir die allgemeine Lösung der obigen homogenen Euler'schen Differenzialgleichung 3. Ordnung

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x^3}.$$

Falls die Euler'sche Differenzialgleichung inhomogen ist, kann wieder mithilfe der Methode der Variation der Konstanten oder der Ansatzmethode eine Partikulärlösung berechnet werden. ◀

Kommentar: Jede Lösung $z(t)$ der zur Euler'schen Differenzialgleichung zugehörigen Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist eine Linearkombination von allen $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir haben ursprünglich die Substitution $x = e^t$ oder $t = \ln x$ gewählt. Eine Rücksubstitution führt auf $e^{\lambda \ln x} = x^\lambda$. Daraus folgt, dass jede Lösung $y(x)$ der homogenen Euler'schen Differenzialgleichungen als Linearkombination von x^λ dargestellt werden kann und sich daher auch mit dem Ansatz $y(x) = x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, berechnen lässt.

Beispiel Zur Berechnung einer Lösung für das Anfangswertproblem

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1,$$

wählen wir – wie gerade hergeleitet – den Ansatz

$$y(x) = x^\lambda$$

mit noch unbekannten $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda x^{\lambda-1}, \\ y''(x) &= \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \end{aligned}$$

und erhalten nach Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + x \lambda x^{\lambda-1} - x^\lambda = x^\lambda (\lambda^2 - 1) = 0.$$

Der Faktor x^λ verschwindet nur für $x = 0$. Aus $(\lambda^2 - 1) = 0$ folgt $\lambda = \pm 1$, die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x}, \quad x \neq 0,$$

und nach Einsetzen der Anfangsbedingungen erhalten wir schließlich

$$y(x) = 2x + \frac{1}{x}. \quad \blacktriangleleft$$

Was ist zu beachten, wenn bei der Euler'schen Differenzialgleichung ein λ als mehrfache Nullstelle auftritt?

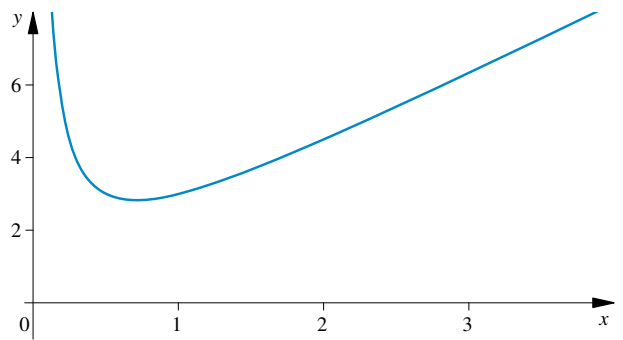


Abbildung 2.9 Die Lösung der Euler'schen Differenzialgleichung $x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x) = 0$ mit $y(1) = 3$ und $y'(1) = 1$.

Wir erinnern uns an die ursprüngliche Substitution

$$t = \ln x \quad \text{und} \quad y(x) = z(t).$$

Erhält man etwa eine m -fache Lösung λ der charakteristischen Gleichung der Differenzialgleichung für $z(t)$, dann wären

$$z_1(t) = e^{\lambda t}, \quad z_2(t) = t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad z_m(t) = t^{m-1} e^{\lambda t}$$

m Fundamentallösungen. Für die ursprüngliche Euler'sche Differenzialgleichung folgt daraus, dass

$$y_1(x) = x^\lambda, \quad y_2(x) = \ln x x^\lambda, \quad \dots, \quad y_m(x) = (\ln x)^{m-1} x^\lambda$$

die entsprechenden Fundamentallösungen darstellen.

Für jedes mehrfache Auftreten einer Nullstelle kommt also ein Faktor $\ln x$ dazu.

Übersicht über einige Typen von Differenzialgleichungen

Im Folgenden sind einige der wichtigsten Typen von Differenzialgleichungen zusammengefasst. Wie wir schon wissen sind Differenzialgleichungen Gleichungen, in denen eine gesuchte Funktion und deren Ableitung(en) vorkommen.

- Bei einer *gewöhnlichen* Differenzialgleichung hängt die gesuchte Lösungsfunktion nur von einer Variablen ab, und daher treten auch nur Ableitungen nach dieser einen Variablen auf. Wir beschäftigen uns in diesem Buch ausschließlich mit dieser Klasse von Differenzialgleichungen.
- Hängt die Lösung von mehreren Unbekannten ab, z. B. Ort und Zeit, und treten in der Gleichung partielle Ableitungen nach mehr als einer der Unbekannten auf, so spricht man von einer *partiellen* Differenzialgleichung. Mithilfe von partiellen Differenzialgleichungen werden sehr viele Anwendungsprobleme modelliert. Ein wichtiges Beispiel ist die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung thermischer Veränderungen eines Körpers durch Wärmeleitung, aber

auch die Ausbreitung eines gelösten Stoffes durch Diffusion.

- Bei einer *skalaren* Differenzialgleichung ist die gesuchte Funktion eindimensional, es liegt nur eine einzige Gleichung vor.
- Man spricht von einem *System* von Differenzialgleichungen, wenn die Lösungsfunktion vektorwertig ist. Ein System kann in speziellen Fällen entkoppelt werden, d. h., wir haben es dann mit mehreren skalaren Gleichungen zu tun, die einzeln behandelt werden können.
- Eine Differenzialgleichung heißt *linear*, wenn sie sich als eine Linearkombination in der Form

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

schreiben lässt. Ansonsten spricht man von einer nichtlinearen Differenzialgleichung. In Kapitel 3 lernen wir einige typische nichtlineare Klassen mit speziellen strukturellen Eigenschaften kennen. Oft ist man bei nichtlinearen Differenzialgleichungen auf numerische Näherungsverfahren angewiesen, siehe Kapitel 18.

Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben exponentielles Wachstum einer Spezies, radioaktiven Zerfall oder auch die Zinsrechnung.

Lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten modellieren etwa ein Faden- oder Federpendel im Fall kleiner Auslenkungen.

- Eine Differenzialgleichung heißt *autonom*, wenn die unabhängige Variable x in der Gleichung nicht explizit auftritt. Eine autonome Differenzialgleichung beschreibt eine Situation, in der die Ableitungen der gesuchten Funktion y nur von ihrem lokalen Zustand selbst abhängen und nicht von zusätzlichen x -abhängigen Koeffizienten. Ansonsten spricht man von einer *nichtautonomen* Diffe-

renzialgleichung. Der Grund für die Bezeichnung *autonom* liegt darin, dass solche Differenzialgleichungen in der Mechanik das Verhalten von Systemen beschreiben, die nicht explizit zeitabhängig sind.

- Bei einem *Anfangswertproblem* sind zusätzliche Bedingungen an die Lösung an einer Stelle vorgegeben, meistens am Beginn des Intervalls auf dem die Lösungsfunktion gesucht wird. Im Gegensatz dazu werden bei *Randwertproblemen* zusätzliche Bedingungen an mehr als einer Stelle der gesuchten Lösungsfunktion vorgegeben, meist eben an den Rändern des betrachteten Intervalls.
- Eine Differenzialgleichung heißt *explizit*, wenn sie sich in der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

schreiben lässt. Falls die betrachtete Differenzialgleichung nicht explizit nach $y^{(n)}(x)$ aufgelöst werden kann, so wird sie als *implizit* bezeichnet.

- Bei *stochastischen* Differenzialgleichungen treten in der Gleichung stochastische Prozesse auf, siehe Kapitel 19. Sie sind eigentlich keine Differenzialgleichungen im obigen Sinn, können aber als solche interpretiert werden.
- Bei *Algebra-Differenzialgleichungen* oder auch *differenzial-algebraischen Gleichungen* sind zu den Differenzialgleichungen zusätzlich algebraische Bedingungen vorgegeben.
- Es gibt auch *Delay-Differenzialgleichung*. Hier treten neben einer Funktion und ihren Ableitungen zu einem Zeitpunkt auch noch Funktionswerte bzw. Ableitungen aus der Vergangenheit auf.
- Bei einer *Integro-Differenzialgleichung* kommen in der Gleichung nicht nur die Funktion und deren Ableitung(en) vor, sondern auch noch Integrationen der gesuchten Funktion.

Zusammenfassung

Bei einer Differenzialgleichung ist ein Zusammenhang zwischen einer gesuchten Funktion und deren Ableitungen gegeben. Wir haben uns in diesem Kapitel mit linearen Systemen 1. Ordnung und linearen Differenzialgleichungen höherer Ordnung befasst.

Definition einer Differenzialgleichung n -ter Ordnung

Eine allgemeine **Differenzialgleichung n -ter Ordnung** $n \in \mathbb{N}$ hat die Gestalt

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

für $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, $y: I \rightarrow \mathbb{C}$ eine n -mal stetig differenzierbare Funktion, d. h. $y \in C^n(I)$ und $f: I \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion von $n+1$ Veränderlichen.

Eine (mehrfach) stetig differenzierbare Funktion $y: J \subseteq I \rightarrow \mathbb{C}$, die die Differenzialgleichung für jedes $x \in J$ erfüllt, heißt **Lösung** einer Differenzialgleichung. Mit der **allgemeinen Lösung** ist ein Ausdruck gemeint, der unter Verwendung von Integrationskonstanten die Gesamtheit aller Lösungen darstellt.

Durch zusätzliche Vorgabe von Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, also Bedingungen an die Lösungsfunktion y und entsprechende Ableitungen an einer Stelle $x_0 \in I$, erhalten wir ein **Anfangswertproblem**.

Sehr ausführlich haben wir uns mit linearen Systemen von Differenzialgleichungen 1. Ordnung auseinandergesetzt.

Definition eines linearen Systems von Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Das System

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{C}$ für $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ und $f: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ heißt **lineares System von Differenzialgleichungen**. Die Funktion f heißt **Inhomogenität**. Das System heißt **homogen**, falls f die Nullfunktion ist, andernfalls **inhomogen**.

Für lineare Differenzialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**, also jede Linearkombination von Lösungen des homogenen Systems ist wieder eine Lösung. Die Menge aller Lösungen von $y'(x) = A(x)y(x)$ bildet einen n -dimensionalen Vektorraum.

Eine Menge von n linear unabhängigen Lösungen bildet ein **Fundamentalsystem**, das in der **Fundamentalmatrix** Y zusammengefasst wird. Jedes lineare Differenzialgleichungssystem besitzt ein Fundamentalsystem.

Die **Wronski-Determinante** $W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \det Y$ entscheidet über die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit. Dabei folgt die lineare Unabhängigkeit der Lösungsvektoren y_1, y_2, \dots, y_n , falls $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. Für linear abhängige Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n von $y'(x) = A(x)y(x)$ ist $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = 0$ für jedes $x \in I$.

Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines linearen Systems von Differenzialgleichungen ist eine Folgerung aus dem allgemeinen Satz von Picard-Lindelöf.

Für die Lösung von Systemen mit konstanter Koeffizientenmatrix A spielt die **Matrixexponentialfunktion** e^{Ax} zur Berechnung einer Fundamentalmatrix eine zentrale Rolle. Im Fall $A = TJT^{-1}$ ist Te^{Jx} eine Fundamentalmatrix für $y' = Ay$, wobei J die Jordan'sche Normalform von A ist und T die entsprechende Transformationsmatrix.

Die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung y_h der homogenen Differenzialgleichung und einer speziellen Lösung, also einer Partikulärlösung y_p der inhomogenen Gleichung zusammen, d. h., es gilt $y = y_h + y_p$. Eine Partikulärlösung findet man durch die **Methode der Variation der Konstanten** aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y_h(x) = Y(x)c$, indem man den Ansatz $y_p(x) = Y(x)c(x)$ differenziert und in das inhomogene System einsetzt. Eine alternative Möglichkeit ist durch die **Ansatzmethode** gegeben.

Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) = f(x), \quad x \in I,$$

mit stetigen Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ und $a_j: I \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $a_n(x) \neq 0$, für $x \in I$, lassen sich durch die Koordinatentransformation

$$u_i(x) := y^{(i-1)}(x)$$

in ein System 1. Ordnung umschreiben,

$$u'(x) = A(x)u(x) + g(x)$$

wobei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Wir können damit alle Resultate, die wir für Systeme 1. Ordnung hergeleitet haben, auf lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung übertragen.

Ableiten und Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ in eine lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 = f(x)$$

führt auf die **charakteristische Gleichung**

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

mit Nullstellen λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung ist eine Linearkombination von $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$, falls λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ verschieden sind. Bei einer k -fachen Nullstelle λ sind $x e^{\lambda x}$, $x^2 e^{\lambda x}$, \dots , $x^{k-1} e^{\lambda x}$, k Fundamentallösungen. **Resonanz** tritt auf, wenn die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = 0$ entweder mehrfache Nullstellen hat oder in der Inhomogenität f ein Term $e^{\mu x}$ auftritt und $p(\mu) = 0$ ist.

Die **Euler'sche Differenzialgleichung** ist eine lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung mit in spezieller Weise von x abhängigen Koeffizienten,

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + \dots + a_2 x^2 y^{(2)}(x) + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Hier kommt man zu einer Lösung durch die Transformation $x = e^t$ und $y(x) = z(t)$.

Aufgaben

Die Aufgaben gliedern sich in drei Kategorien: Anhand der *Verständnisfragen* können Sie prüfen, ob Sie die Begriffe und zentralen Aussagen verstanden haben, mit den *Rechenaufgaben* üben Sie Ihre technischen Fertigkeiten und die *Beweisaufgaben* geben Ihnen Gelegenheit, zu lernen, wie man Beweise findet und führt.

Ein Punktesystem unterscheidet leichte Aufgaben ●, mittelschwere ●● und anspruchsvolle ●●● Aufgaben. Lösungshinweise am Ende des Buches helfen Ihnen, falls Sie bei einer Aufgabe partout nicht weiterkommen. Dort finden Sie auch die Lösungen – betrügen Sie sich aber nicht selbst und schlagen Sie erst nach, wenn Sie selber zu einer Lösung gekommen sind. Ausführliche Lösungswege, Beweise und Abbildungen finden Sie auf der Website zum Buch.

Viel Spaß und Erfolg bei den Aufgaben!

Verständnisfragen

2.1 ● Welche der folgenden skalaren Differenzialgleichungen 1. Ordnung sind linear?

- a) $y(x)y'(x) - 2x = 0$ c) $xy'(x) + 3y(x) = e^x$
 b) $y'(x) + xy(x) = 0$ d) $y' + (\tan x)y = 2 \sin x$

2.2 ● Gibt es eine reelle 2×2 -Matrix A mit

$$e^A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}?$$

2.3 ●● Die Funktionen $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = |x|^3$ sind linear unabhängig auf $(-1, 1)$, aber $W[y_1, y_2](x) = 0$. Wie ist das möglich?

2.4 ● Welche der folgenden Funktionen

- a) $y(x) = (2e^x + e^{-x}, e^{2x})^\top$
 b) $y(x) = (2e^x + e^{-x}, e^x)^\top$
 c) $y(x) = (2e^x + e^{-x}, xe^x)^\top$
 d) $y(x) = (e^x + 3e^{-x}, e^x + 3e^{-x})^\top$

kann eine Lösung einer Differenzialgleichung

$$y'(x) = Ay(x)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sein?

2.5 ● Formulieren Sie die Differenzialgleichungen

- a) $y'' - (y')^2 y \sin x = \cosh x - y^2$,
 b) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$,

jeweils als ein System 1. Ordnung.

Rechenaufgaben

2.6 ● Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 4x, \quad y(0) = 1.$$

2.7 ● Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{cx}{1+x}, \quad x \in I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Lösung der Differenzialgleichung

$$x(1+x)y'(x) - y(x) = 0$$

ist.

2.8 ●● Berechnen Sie e^A für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.9 ●● Geben Sie für die lineare Differenzialgleichung

$$y'(x) = A_i y(x), \quad i = 1, 2, 3$$

mit den folgenden zweidimensionalen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

jeweils eine Fundamentalmatrix an.

2.10 ●● Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die Differenzialgleichung $y' = A_i y$, $i = 1, 2, 3$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & -17 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.11 ● Berechnen Sie jeweils die Lösungen der Differenzialgleichungen zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$:

- a) $y''(x) = -y(x)$, b) $y''(x) = y(x)$.

2.12 ●● Wie muss die rechte Seite f gewählt werden, damit bei der linearen Differenzialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) + 2y(x) = f(x)$$

Resonanz auftritt?

2.13 •• Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) = x(1 + y(x)),$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

2.14 •• Betrachten Sie den allgemeinen harmonischen Oszillator mit Reibung, aber ohne äußere Anregung

$$y''(x) + 2by'(x) + cy(x) = 0, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie in Abhängigkeit von b, c jeweils ein Fundamentalsystem an.

2.15 •• Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = \cos x$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 1.1$. Wählen Sie für die Partikulärlösung den Ansatz

$$y_p(x) = d \cos(x + \delta).$$

2.16 •• Gesucht ist eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(x) + y'(x) = x + 1.$$

2.17 •• Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung 3. Ordnung

$$y'''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 9e^x.$$

2.18 •• Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1, \lambda \in \mathbb{R}$$

mithilfe eines Potenzreihenansatzes.

2.19 •• Die Methode der sukzessiven Approximation oder auch Picard-Iteration ist nicht das einzige Iterationsverfahren um (approximative) Lösungen von Anfangswertproblemen zu erhalten. Ein klassisches Vorgehen ist, beim Startpunkt x_0 eine Taylorreihe der Lösung y zu finden. Die Idee ist durch Differenzieren der Differenzialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

nach x die Werte $y^{(n)}(x_0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ zu bestimmen. Geben Sie die Formeln für die gesuchten Werte $y^{(n)}(x_0)$ für $n = 1, 2, 3$ an. Betrachten Sie die Differenzialgleichung

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Um die Koeffizienten der der Taylorreihe von y bei x_0 zu berechnen, ist es geschickt mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$ zu arbeiten. Geben Sie eine Rekurrenz für die Koeffizienten y_n an. Konvergiert die Taylorreihe? Geben Sie das Konvergenzintervall an.

2.20 •• Eine Gleichung der Gestalt

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)y^\gamma(x)$$

mit $\gamma \in \mathbb{R}$ und a, b stetigen Funktionen auf I heißt *Bernoulli'sche Differenzialgleichung*. Zeigen Sie, dass für $\gamma \neq 0$ oder $\gamma \neq 1$, der Ansatz $z(x) = y^{1-\gamma}(x)$ auf eine lineare Differenzialgleichung führt.

2.21 •• Eine Gleichung der Gestalt

$$y'(x) = q(x) + p(x)y(x) + r(x)y^2(x),$$

wobei q, p und r stetige Funktionen auf I sind und $r(x) \neq 0$ für jedes $x \in I$, heißt *Riccati'sche Differenzialgleichung*. Beweisen Sie, dass die Gleichung durch den Ansatz $y(x) = u(x) + v(x)$ in eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung in $v(x)$ überführt werden kann, falls eine spezielle Lösung $u(x)$ bekannt ist.

2.22 •• Die logistische Gleichung

$$y'(x) = \lambda y(x)(K - y(x)) = \lambda K y(x) - \lambda y^2(x),$$

die wir zu Beginn dieses Kapitels kennengelernt haben, ist eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung mit $\gamma = 2$. Lösen Sie die logistische Differenzialgleichung und verifizieren Sie, dass

$$y(x) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-\lambda K x}}$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ist.

Beweisaufgaben

2.23 •• Sei $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ eine Fundamentalmatrix für das lineare System $y'(x) = A(x)y(x)$. Zeigen Sie

- Die Matrix $X \in C^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix, wenn es eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $X(x) = Y(x)B$ für alle $x \in I$.
- Die Matrix $X(x) := Y(x)(Y(x_0))^{-1}$ ist ein *Hauptfundamentalsystem*, d. h. ein Fundamentalsystem $Y(x)$ mit der Eigenschaft $Y(x_0) = I_n$.

2.24 ••

- Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = BA$. Zeigen Sie $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ und $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
- Im allgemeinen gilt *nicht* $e^{A+B} = e^A e^B$. Geben Sie ein Gegenbeispiel an.

2.25 •• Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie:

- $\det e^A = e^{\text{Sp } A}$
- $e^{A^T} = (e^A)^T$
- Aus $A^T = -A$ (d. h. A ist schief-symmetrisch) folgt, dass e^{Ax} orthogonal ist und $\det e^{Ax} = 1$.

2.26 •

a) Zeigen Sie, dass die $m \times m$ -Matrix N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nilpotent ist, d. h., das $N^k = \mathbf{0}$ für alle $k \geq m$, $m \in \mathbb{N}$ gilt.

- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte einer solchen nilpotenten Matrix N .
 c) Lösen Sie die Differenzialgleichung $y' = Ny$ für $m = 3$.

2.27 •• Gegeben sei eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y''(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

eine eindeutige Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

2.28 •• Für die Wahl $q(x) = 2x$, $p(x) = (1 - 2x)$ und $r(x) = -1$ lässt sich eine spezielle Lösung dieser Riccati'schen Gleichung besonders einfach finden. Berechnen Sie die dieser Gleichung entsprechende Bernoulli'sche Differenzialgleichung und lösen Sie diese.

2.29 •• Beweisen Sie: Erfüllt eine Funktion F die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf für jedes a . $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ und $Q = \mathbb{C}^n$, dann existiert eine auf ganz \mathbb{R} definierte eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = F(x, y(x))$ und $y(x_0) = y_0$.

2.30 ••• Beweisen Sie den **Satz von Liouville**: Die Wronski-Determinante $W(x)$ erfüllt die skalare Differenzialgleichung

$$W'(x) = \text{Sp } A(x)W(x), \quad x \in I,$$

daher gilt für $x, x_0 \in I$

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{Sp } A(u) du}.$$

Antworten der Selbstfragen

S. 16

Die Lösungsfunktion $y(x) = -\cos x + c$ erhält man durch Integration, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Integrationskonstante ist.

S. 20

Die Wronski-Determinante ist die Determinante der Koeffizientenmatrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems zur Berechnung von $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$. Da diese Determinante an der Stelle x_0 null ist, existiert eine vom Nullvektor verschiedene Lösung für das homogene Gleichungssystem.

S. 24

Es gilt

$$\begin{aligned} (Te^{Jx}T^{-1})' &= TJ e^{Jx}T^{-1} \\ &= TJT^{-1}Te^{Jx}T^{-1} = ATe^{Jx}T^{-1} \end{aligned}$$

und daher auch

$$\begin{aligned} (Te^{Jx})' &= TJ e^{Jx} \\ &= TJT^{-1}Te^{Jx} = ATe^{Jx}. \end{aligned}$$

S. 25

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S. 26

$y_p + y_h$ ist eine Lösung von $y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$, da

$$\begin{aligned} y_p'(x) + y_h'(x) &= A(x)y_p(x) + f(x) + A(x)y_h(x) \\ &= A(x)(y_p(x) + y_h(x)) + f(x). \end{aligned}$$

Sind umgekehrt y_p und y Lösungen der inhomogenen Gleichung, so gilt mit $z := y - y_p$

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) - y_p'(x) \\ &= A(x)y(x) + f(x) - A(x)y_p(x) - f(x) \\ &= A(x)(y(x) - y_p(x)) = Az(x). \end{aligned}$$

Also ist z eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

S. 26

Einsetzen von $x = x_0$ in

$$y(x) = Y(x)c + Y(x) \int_{x_0}^x Y^{-1}(u) f(u) du$$

führt zu

$$y(x_0) = Y(x_0)c + Y(x_0) \int_{x_0}^{x_0} Y^{-1}(u) f(u) du = y_0$$

$$y(x_0) = Y(x_0)c = y_0 \implies c = Y^{-1}(x_0)y_0.$$

S. 29

Wir setzen

$$u_1(x) = y(x)$$

$$u_2(x) = y'(x) = u_1'(x)$$

$$u_3(x) = y''(x) = u_2'(x)$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= u_3'(x) = 2y''(x) + y'(x) + 2y(x) \\ &= 2u_3(x) + u_2(x) + 2u_1(x) \end{aligned}$$

und erhalten das System

$$u'(x) = Au(x),$$

von Differenzialgleichungen 1. Ordnung, wobei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Durch Nullsetzen berechnen wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Diese Eigenwerte entsprechen genau den Lösungen der charakteristischen Gleichung der gegebenen Differenzialgleichung 3. Ordnung.

Grundwissen Mathematikstudium

Höhere Analysis, Numerik und Stochastik

Brokate, M.; Henze, N.; Hettlich, F.; Meister, A.;

Schranz-Kirlinger, G.; Sonar, Th.

2016, XI, 1004 S. 400 Abb. in Farbe., Hardcover

ISBN: 978-3-642-45077-8