

Kapitel 3

Aufgaben

Verständnisfragen

Aufgabe 3.1 • Ist die Differenzialgleichung

$$e^{-y} + (1 - xe^{-y})y'(x) = 0$$

exakt?

Aufgabe 3.2 •• Ist die Differenzialgleichung

$$y' = e^{x-y}$$

separabel?

Berechnen Sie jene Lösung $y(x)$, für die $y(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 3.3 •• Bestimmen Sie mithilfe der Definition der Laplace-Transformation die Bildfunktionen der folgenden Originalfunktionen:

- a) $f(t) = 2t e^{-4t}$
- b) $f(t) = \sinh(at), a \in \mathbb{R}, a < s$
- c) $f(t) = \sin^2 t$

Rechenaufgaben

Aufgabe 3.4 •• Bestimmen Sie den Typ und die Lösung der Differenzialgleichung

$$y'(x) = (x^2 + 1)y^2 + (x^2 - 1)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Aufgabe 3.5 •• Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung

$$y'(x) = -ay(x) + by^\gamma(x)$$

mit konstanten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ und $\gamma \neq 1$ ist separabel. Lösen Sie diese Differenzialgleichung mittels der Methode der Separation der Variablen.

Aufgabe 3.6 • Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2x - y(x)$$

mittels einer geeigneten Substitution.

Aufgabe 3.7 •• Ist die Differenzialgleichung

$$2xy(x) + x^2 y'(x) = 0$$

exakt? Berechnen Sie die Lösungen.

Aufgabe 3.8 •• Finden Sie einen integrierenden Faktor $u(x, y)$, sodass die Differenzialgleichung

$$(y^2 - 2x - 2) + 2yy'(x) = 0$$

exakt wird.

Aufgabe 3.9 •• Berechnen Sie die Lösung (in impliziter Form) der Differenzialgleichung

$$y'(x) = -\frac{y^2 - xy}{2xy^3 + xy + x^2}.$$

Aufgabe 3.10 ••• Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$(y + xy^2) - xy' = 0$$

mittels eines geeigneten integrierenden Faktors der Form $u(y)$. Bestimmen Sie des Weiteren diejenige Lösung, die durch den Punkt $(x, y) = (2, -2)$ verläuft.

Aufgabe 3.11 •• Ist die Differenzialgleichung

$$(2x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

exakt? Begründen Sie Ihre Antwort. Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

Aufgabe 3.12 •• Finden Sie einen integrierenden Faktor für die nicht exakte Differenzialgleichung

$$(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0.$$

Aufgabe 3.13 •• Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Laplace-Transformierte für Monome $f_n(t) = t^n, n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{L}[f_n(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

gilt.

Aufgabe 3.14 •• Lösen Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = \frac{x + 2y(x)}{x} = 1 + 2 \left(\frac{y(x)}{x} \right).$$

Aufgabe 3.15 •• Berechnen Sie alle möglichen Lösungen der Differenzialgleichung

$$y'(x) = 2x \sqrt{y}$$

mittels Separation der Variablen. Geben Sie auch die konkreten Lösungen zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $y(0) = -1$. Was passiert im letzten Fall?

Aufgabe 3.16 •• Lösen Sie das Randwertproblem

$$y''(x) - y(x) = 1$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 3.17 •• Geben Sie alle Lösungen des Randwertproblems

$$y''(x) + y(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ an.

Aufgabe 3.18 ●● Bestimmen Sie mithilfe der Laplace-Transformation der Ableitung und der Transformationstabellen die Bildfunktionen der ersten Ableitung der folgenden Funktionen:

- a) $f(t) = \sinh(at)$
 b) $f(t) = t^3$

Aufgabe 3.19 ●●● Die Funktion $f(t) = \sin(\omega t)$ ist eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$f''(t) = -\omega^2 f(t).$$

Bestimmen Sie die zugehörige Bildfunktion $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, indem Sie die Laplace-Transformation auf die Differenzialgleichung anwenden und dabei die Transformation der Ableitung verwenden.

Aufgabe 3.20 ●●● Gegeben ist die Wellengleichung mit Randbedingungen

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Führen Sie einen Separationsansatz durch, d. h. bestimmen Sie alle Lösungen der Form $u(x, t) = w(t)v(x)$. Dieser Ansatz führt auf ein Sturm-Liouville-Eigenwertproblem für die Funktion v .

Bestimmen Sie damit die Lösung der Wellengleichung, die zusätzlich zu den Randbedingungen auch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \quad x \in [0, 1]$$

mit geeigneten Funktion g, h erfüllt. Entwickeln Sie dazu die Lösung in eine Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x).$$

Die Konvergenz der auftretenden Reihe muss nicht untersucht werden.

Aufgabe 3.21 ●● Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$$

durch die Substitution

$$v(x) = e^{\frac{1}{2} \int p dx} u(x)$$

in die Form

$$v'' + k(x)v = 0$$

gebracht werden kann. Geben Sie die Funktion k explizit an.

Wie wirkt sich diese Transformation auf das Eigenwertproblem $Lu = \lambda u$ aus?

Transformieren Sie die Hermitesche Differenzialgleichung

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 3.22 ●●● Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Sturm-Liouville-Eigenwertproblems

$$-(xu')' = \frac{\lambda}{x}u, \quad u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

Beweisaufgaben

Aufgabe 3.23 ●●● Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x)}, \quad x \geq 0, \quad y(0) = 0.$$

Ist die Lösung eindeutig? Geben Sie eine Begründung!

Aufgabe 3.24 ●●● Beweisen Sie die Energieerhaltungsgleichung

$$\frac{1}{2}(\varphi'(t))^2 - \omega^2 \cos \varphi(t) = \text{const}$$

für die nichtlineare Pendelgleichung

$$\varphi''(t) + \omega^2 \sin \varphi(t) = 0.$$

Hinweise

Verständnisfragen

Aufgabe 3.1 ● Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingung.

Aufgabe 3.2 ●● –

Aufgabe 3.3 ●● –

Rechenaufgaben

Aufgabe 3.4 ●● –

Aufgabe 3.5 ●● Finden Sie eine geeignete Substitution zur Berechnung des y -Integrals.

Aufgabe 3.6 ● –

Aufgabe 3.7 ●● –

Aufgabe 3.8 ●● Wählen Sie als Ansatz für den integrierenden Faktor

$$u(x, y) = u(x).$$

Aufgabe 3.9 ●● Ein Ansatz für den integrierenden Faktor ist

$$u(x, y) = x^a y^b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.10 ●● –

Aufgabe 3.11 ●● –

Aufgabe 3.12 ●● –

Aufgabe 3.13 ●● Partielle Integration.

Aufgabe 3.14 ●● Diese Differenzialgleichung ist vom Typ $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$, also homogen.

Aufgabe 3.15 ●● –

Aufgabe 3.16 ●● –

Aufgabe 3.17 ●● –

Aufgabe 3.18 ●● $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

Aufgabe 3.19 ●●● $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$

Aufgabe 3.20 ●●● Der Separationsansatz führt auf $w''(t)v(x) = w(t)v''(x)$, und Division durch wv ergibt

$$\frac{w''}{w} = \frac{v''}{v}.$$

Die linke Seite hängt nur noch von t ab und die rechte nur von x . Die Gleichung kann nur dann für alle x und t erfüllt sein, wenn gilt

$$\frac{w''}{w} = \lambda, \quad \frac{v''}{v} = \lambda, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.21 ●● –

Aufgabe 3.22 ●●● Zeigen Sie zuerst, dass alle Eigenwerte positiv sind und man daher $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ setzen kann. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung mit u und integrieren Sie über das Intervall $[1, e]$. Es handelt sich hier um eine Euler'sche Differenzialgleichung. Machen Sie daher einen Ansatz $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweisaufgaben

Aufgabe 3.23 ●●● Studieren Sie die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 3.24 ●●● –

Lösungen

Verständnisfragen

Aufgabe 3.1 ● Die Differenzialgleichung ist exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{-y} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - xe^{-y}) = -e^{-y}.$$

Aufgabe 3.2 ●● Diese Differenzialgleichung ist exakt, ihre Lösung ist

$$y'(x) = \ln(e^x + e + 1).$$

Aufgabe 3.3 ●●

a) $F(s) = \frac{2}{(s+4)^2}$

b) $F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$

c) $F(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$

Rechenaufgaben

Aufgabe 3.4 ●● Diese Differenzialgleichung ist separabel mit Lösung $y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Aufgabe 3.5 ●●

$$y(x) = u^{1-\gamma}(x) \text{ mit } u(x) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \exp(a(\gamma-1)x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3.6 ● $y(x) = ce^{-x} - 2 + 2x, \quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3.7 ●● Die vorliegende Differenzialgleichung ist exakt mit Stammfunktion

$$\varphi(x, y) = x^2 y.$$

Die Lösungen $y(x)$ dieser Differenzialgleichung sind für $x \neq 0$ durch

$$y(x) = \frac{c}{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

gegeben.

Aufgabe 3.8 ●● Mit dem integrierenden Faktor $u(x, y) = e^x$ ist die Differenzialgleichung

$$e^x(y^2 - 2x - 2) + 2e^x y y'(x) = 0$$

exakt. Die Lösung lautet

$$y(x) = \pm \sqrt{2x + ce^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.9 ●● Die Differenzialgleichung

$$\frac{1}{xy^2}(y^2 - xy) + \frac{1}{xy^2}(2xy^3 + xy + x^2)y'(x) = 0$$

ist exakt. Die Lösung in impliziter Form lautet:

$$\ln(xy) - \frac{x}{y} + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.10 •••

$$y(x) = \frac{2x}{2c - x^2}, \quad c = 1$$

Aufgabe 3.11 •• Die Differenzialgleichung ist exakt, ihre Lösung lautet

$$x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

und in expliziter Form, wenn wir nach y auflösen

$$y = x \pm \sqrt{3x^2 - 2c}.$$

Aufgabe 3.12 ••

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

ist ein integrierender Faktor.

Aufgabe 3.13 •• –

Aufgabe 3.14 •• $y(x) = xz(x) = x(cx - 1) = cx^2 - x$,
 $c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3.15 ••

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + c)^2$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2)^2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}x^4$$

$$y(0) = -1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2i)^2$$

Für $y(0) = -1$ existiert keine reelle Lösung.

Aufgabe 3.16 •• $y(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}$

Aufgabe 3.17 •• $y(x) = c_1 \sin x$, $c_1 \in \mathbb{R}$ beliebig

Aufgabe 3.18 ••

$$\text{a) } \mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[a \cosh(at)] = \frac{as}{s^2 - a^2}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}[f'(t)] = \mathcal{L}[3t^2] = \frac{6}{s^3}$$

Aufgabe 3.19 ••• $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Aufgabe 3.20 •••

$$u(x, t) = w(t)v(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x)$$

$$\text{mit } a_k = 2 \int_0^1 g(s) \sin(k\pi s) ds$$

$$\text{und } b_k = \frac{2}{k\pi} \int_0^1 h(s) \sin(k\pi s) ds$$

Aufgabe 3.21 ••

$$k(x) = -\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q$$

Die Transformation bewirkt beim Eigenwertproblem, dass λ ein Eigenwert von L ist, genau dann wenn λ ein Eigenwert von $\tilde{L}$ mit $\tilde{L}v = v'' + k(x)v$.

Die Hermite'sche Differenzialgleichung wird zu

$$v'' + (1 - x^2 + 2n)v = 0.$$

Aufgabe 3.22 ••• Die Eigenfunktionen sind $u_k(x) = \sin(\pi k \ln x)$ zu den Eigenwerten $\lambda_k = k^2 \pi^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Beweisaufgaben

Aufgabe 3.23 ••• Es gibt zwei Lösungen $y(x) \equiv 0$ und $y(x) = x^2$. Da die Funktion $f(y) = 2\sqrt{y(x)}$ die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit an der Stelle $y = 0$ nicht erfüllt, stellt das keinen Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf dar.

Aufgabe 3.24 ••• –**Lösungswege****Verständnisfragen****Aufgabe 3.1** • –

Aufgabe 3.2 •• Diese Differenzialgleichung ist separabel, da die beiden Variablen x und y getrennt werden können. Es gilt

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^{-y},$$

$$e^y dy = e^x dx,$$

und nach Integration erhalten wir

$$e^y = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \ln(e^x + c).$$

Wir setzen die gegebene Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ein, woraus

$$y(0) = \ln(1 + c) = 1,$$

$$1 + c = e^1,$$

$$c = e - 1$$

folgt und schließlich

$$y(x) = \ln(e^x + e - 1).$$

Aufgabe 3.3 •• Mit partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[2t e^{-4t}] = \int_0^\infty 2t e^{-4t} e^{-st} dt \\ &= 2 \int_0^\infty t e^{-(s+4)t} dt = \dots = \frac{2}{(s+4)^2} = F(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\sinh(at)] = \int_0^\infty \sinh(at) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{(a-s)t} - e^{-(a+s)t}) dt = \dots = \frac{a}{s^2 - a^2} = F(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\sin^2 t] = \int_0^\infty \sin^2 t e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 - \cos(2t)) e^{-st} dt = \dots = \frac{2}{s(s^2 + 4)} = F(s)\end{aligned}$$

Rechenaufgaben

Aufgabe 3.4 •• Die gegebene Differenzialgleichung

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$$

ist separabel. Sie kann daher folgendermaßen gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2 + 1} &= (x^2 + 1) dx, \\ \arctan y &= \frac{x^3}{3} + x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= \tan\left(\frac{x^3}{3} + x + c\right).\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = \tan(0 + 0 + c) = \tan c = 1$ folgt $c = \frac{\pi}{4}$ und die Lösung ist

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Aufgabe 3.5 •• Die gegebene autonome nichtlineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten lässt sich mittels Separation der Variablen lösen. Aus der äquivalenten Formulierung

$$\frac{dy}{by^\gamma - ay} = dx$$

erhält man

$$\int \frac{dy}{by^\gamma - ay} = dx = x + c_1$$

mit einer Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$. Für die Berechnung dieses Integrals wählen wir die Substitution

$$u = y^{1-\gamma}, \quad du = (1-\gamma)y^{-\gamma} dy,$$

daher gilt

$$\frac{dy}{by^\gamma - ay} = \frac{1}{1-\gamma} \frac{y^\gamma}{by^\gamma - ay} du = \frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{b - ay^{1-\gamma}} du$$

und

$$\int \frac{dy}{by^\gamma - ay} = \frac{1}{1-\gamma} \int \frac{du}{b - au}.$$

Mit der weiteren Substitution $t = b - au$, $dt = -a du$ folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{by^\gamma - ay} &= -\frac{1}{a(1-\gamma)} \int \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{\ln t}{a(1-\gamma)} = \frac{\ln(b - au)}{a(\gamma - 1)} = x + c_1.\end{aligned}$$

Auflösen nach u ergibt die allgemeine Lösung

$$u(x) = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \exp(a(\gamma - 1)x), \quad c \in \mathbb{R},$$

und schließlich

$$y(x) = u^{1-\gamma}(x) = \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \exp(a(\gamma - 1)x)\right)^{1-\gamma}.$$

In den Aufgaben in Kapitel 3 haben wir die Substitution $u(x) = y^{1-\gamma}(x)$ vor der Integration durchgeführt und haben eine einfache lineare Differenzialgleichung für u erhalten. Diese Vorgangsweise funktioniert auch für den allgemeinen Fall $a = a(x)$ und $b = b(x)$.

Aufgabe 3.6 • Diese Differenzialgleichung ist vom Typ $y'(x) = f(ax + by(x) + c)$ und wird durch die Substitution

$$u(x) = 2x - y(x)$$

gelöst, daraus folgt $u'(x) = 2 - y'(x)$ oder $y'(x) = 2 - u'(x)$ und die entsprechende Differenzialgleichung lautet

$$-u'(x) = -\frac{du}{dx} = u(x) - 2$$

$$\int \frac{du}{u - 2} = -\int dx$$

$$\ln |u - 2| = -x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$u(x) = e^{c_1} e^{-x} + 2$$

$$y(x) = -e^{c_1} e^{-x} - 2 + 2x = ce^x - 2 - 2x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kommentar: Natürlich ist diese Differenzialgleichung eine lineare skalare inhomogene Differenzialgleichung und kann auch mithilfe der Methoden aus Kapitel 2 gelöst werden.

Aufgabe 3.7 •• Die Funktionen $2xy = p(x, y)$ und $x^2 = q(x, y)$ sind auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und es gilt

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x = \frac{\partial(x^2)}{\partial x}.$$

Damit existiert eine Stammfunktion, die durch Integration ermittelt werden kann:

$$\varphi(x, y) = \int 2xy \, dx = x^2 y + c_1(y),$$

$$\varphi(x, y) = \int x^2 \, dy = x^2 y + c_2(x).$$

Die Integrationskonstanten c_1, c_2 können jeweils noch von der Variablen abhängen, nach der nicht integriert wurde. Durch $\varphi(x, y) = x^2 y$ ist eine Stammfunktion gegeben und durch Auflösen der Gleichung $x^2 y = c$ für $c \in \mathbb{R}$ nach y erhalten wir eine Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung,

$$y(x) = \frac{c}{x^2} \text{ für } x \neq 0.$$

Aufgabe 3.8 •• Diese Differenzialgleichung ist zunächst nicht exakt, da

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx = \int p(x, y) \, dx \\ &= \int (y^2 - 2x - 2) \, dx = y^2 x - x^2 - 2x + c_1(y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dy = \int q(x, y) \, dy \\ &= \int 2y \, dy = y^2 + c_2(x) \end{aligned}$$

und die Konstanten $c_2(x)$ und $c_1(y)$ nicht so gewählt werden können, dass die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Wir versuchen daher einen integrierenden Faktor $u(x, y)$ zu finden, der die Differenzialgleichung exakt macht und probieren den einfachsten Fall $u(x, y) = u(x)$ aus. Wir berechnen die entsprechende Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} p \frac{du(x)}{dy} - q \frac{du(x)}{dx} - \frac{\partial q}{\partial x} u(x) + \frac{\partial p}{\partial y} u(x) &= 0 \\ (y^2 - 2x - 2) \cdot 0 - 2y \frac{du(x)}{dx} - (0 - 2y) u(x) &= 0 \\ -2y \frac{du(x)}{dx} + 2y u(x) &= 0, \end{aligned}$$

woraus für den integrierenden Faktor $u(x) = e^x$ folgt. Also ist die Differenzialgleichung

$$e^x (y^2 - 2x - 2) + 2e^x y y'(x) = 0$$

exakt mit Stammfunktion

$$\varphi(x, y) = e^x (y^2 - 2x),$$

die sich aus der Berechnung der Integrale

$$\begin{aligned} \int e^x (y^2 - 2x - 2) \, dx &= e^x (y^2 - 2x) + c_1(y), \\ \int 2e^x y \, dy &= y^2 e^x + c_2(x), \end{aligned}$$

mit $c_2(x) = 2x e^x$ und $c_1(y) = 0$ ergibt. Die Lösung der Differenzialgleichung lautet daher

$$y(x) = \pm \sqrt{2x + c e^{-x}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.9 •• Durch Umformung erhalten wir die Differenzialgleichung in gewohnter Form

$$(y^2 - xy) + (2xy^3 + xy + x^2)y' = 0.$$

Diese Differenzialgleichung ist nicht exakt, wie man leicht nachrechnet. Wir versuchen als integrierenden Faktor $u(x, y) = x^a y^b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Das führt auf

$$\begin{aligned} p \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - q \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} u(x, y) + \frac{\partial p}{\partial y} u(x, y) &= 0, \\ (y^2 - xy) b x^a y^{b-1} - (2xy^3 + xy + x^2) a x^{a-1} y^b &= 0, \\ -(2y^3 + y + 2x) x^a y^b + (2y - x) x^a y^b &= 0, \end{aligned}$$

zur Berechnung des entsprechenden integrierenden Faktors. Nach dem Ausmultiplizieren und der Division durch $x^a y^b$ folgt

$$(-2a - 2)y^3 + (-a + b + 1)y + (-a - b - 3)x = 0.$$

Alle Koeffizienten müssen verschwinden,

$$\begin{aligned} -2a - 2 &= 0, \\ -a + b + 1 &= 0, \\ -a - b - 3 &= 0, \end{aligned}$$

woraus wir $a = -1$ und $b = -2$ erhalten. Für den integrierenden Faktor ergibt sich

$$u(x, y) = \frac{1}{xy^2}$$

und die Differenzialgleichung

$$\frac{1}{xy^2} (y^2 - xy) + \frac{1}{xy^2} (2xy^3 + xy + x^2) y' = 0$$

ist exakt mit Stammfunktion $\varphi(x, y)$ und Lösung (in impliziter Form)

$$\varphi(x, y) = \ln(xy) - \frac{x}{y} + y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kommentar: Die Entscheidung, nach welcher der beiden Variablen aufgelöst werden kann, kann im Allgemeinen mithilfe des Satzes über implizite Funktionen getroffen werden.

Aufgabe 3.10 ••• Wir schreiben die Differenzialgleichung in der Form

$$y(1 + xy) dx - x dy = 0$$

d. h.,

$$p dx + q dy = 0, \quad p(x, y) = y + xy^2, \quad q(x, y) = -x.$$

Es ist $p_y = 1 + 2xy \neq q_x = -1$, also nicht exakt. Wir versuchen $u = u(y)$ so zu finden, dass

$$\underbrace{u(y)(y + xy^2)}_{=: P(x,y)} dx - \underbrace{u(y)x dy}_{=: Q(x,y)} = 0$$

exakt ist, d. h., wir versuchen die Integrabilitätsbedingungen für P und Q zu erfüllen:

$$P_y = u(y)(1 + 2xy) + u'(y)(y + xy^2) = Q_x = -u(y).$$

Wir wollen

$$\begin{aligned} u'(y)(y + xy^2) &= -u(y)(2 + 2xy), \\ u'(y)y(1 + xy) &= -2u(y)(1 + xy) \end{aligned}$$

erfüllen und das ist wiederum eine Differenzialgleichung für $u(y)$. Nach Kürzen durch den Faktor $(1 + xy) \neq 0$ verbleibt als geforderte Gleichung

$$u'(y)y = -2u(y).$$

Das ist eine separable Differenzialgleichung für den gesuchten integrierenden Faktor $u(y)$,

$$\frac{1}{2} \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}.$$

Integration mit Integrationskonstante $c = 0$ gewählt, ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln u &= -\ln y \\ \exp\left(\frac{1}{2} \ln u\right) &= \exp(-\ln y) \\ u^{1/2} &= y^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist

$$u(y) = \frac{1}{y^2}$$

ein integrierender Faktor und die Differenzialgleichung

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

ist exakt. Die Lösung dieser exakten Differenzialgleichung erfordert die Kenntnis einer Stammfunktion $\varphi(x, y)$ des Vektorfeldes (P, Q) , d. h. $\varphi(x, y)$ mit

$$\varphi_x = P = \frac{1}{y} + x, \quad \varphi_y = Q = -\frac{x}{y^2}.$$

Die Integration dieser beiden Forderungen nach x bzw. y ergibt

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c(y) \\ \varphi(x, y) &= \frac{x}{y} + c(x), \end{aligned}$$

und daher muss gelten

$$\underbrace{c(x) - \frac{x^2}{2}}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} = \underbrace{c(y)}_{\text{hängt nur von } y \text{ ab}}$$

$$\text{const} = c(y) = c(x) - \frac{x^2}{2} \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2}$$

und

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}$$

ist die gesuchte Stammfunktion.

Lösungen der ursprünglichen Differenzialgleichung sind charakterisiert durch $\varphi(x, y) = \text{const}$, und daraus folgt durch Auflösen nach y

$$y(x) = \frac{2x}{2c - x^2} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die spezielle Lösung, die durch den Punkt $(x, y) = (2, -2)$ verläuft, ergibt sich

$$-2 = \frac{4}{2c - 2^2} \Rightarrow c = 1,$$

und daher

$$y(x) = \frac{2x}{2 - x^2}.$$

Die Lösung ist nicht definiert für $x = \pm\sqrt{2}$.

Aufgabe 3.11 •• Wir überprüfen die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1.$$

Die Differenzialgleichung ist also exakt.

Wir suchen nun die Stammfunktion $\varphi(x, y)$, sodass gilt

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = p(x, y) = 2x + y$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = q(x, y) = x - y,$$

und erhalten, indem wir die erste Gleichung integrieren,

$$\varphi(x, y) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = x^2 + xy + c(y).$$

Um $c(y)$ zu bestimmen, differenzieren wir nach y und vergleichen

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = x + c'(y) = q(x, y) = x - y.$$

Also ist $c'(y) = -y$ und $c(y) = -\frac{1}{2}y^2 + \text{const}$, d. h., die Stammfunktion der exakten Differenzialgleichung ist

$$\varphi(x, y) = x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$$

für $\text{const} = 0$ und die allgemeine Lösung erfüllt

$$x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir können nach y (oder x) auflösen und erhalten für die Lösung $y(x)$

$$y(x) = x \pm \sqrt{3x^2 - 2c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.12 •• Wir versuchen, einen integrierenden Faktor $u(x)$ zu finden, der nur von x abhängt, und überprüfen die Integrabilitätsbedingung, wobei $P(x, y) = p(x, y)u(x)$ und $Q(x, y) = q(x, y)u(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)u(x)) = \frac{\partial}{\partial y}((1 - xy)u(x)) = -xu(x), \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(q(x, y)u(x)) = \frac{\partial}{\partial x}((xy - x^2)u(x)) \\ &= (y - 2x)u(x) + (xy - x^2)u'(x). \end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ folgt

$$\begin{aligned} -xu(x) &= (y - 2x)u(x) + (xy - x^2)u'(x), \\ (x - y)u(x) &= x(y - x)u'(x), \quad x \neq y, \\ u(x) &= -xu'(x). \end{aligned}$$

Wir lösen die Differenzialgleichung für $u(x)$ mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{du}{u} &= -\frac{dx}{x}, \\ \int \frac{du}{u} &= -\int \frac{dx}{x}, \\ \ln u &= -\ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ u(x) &= \frac{e^c}{x}. \end{aligned}$$

Die Differenzialgleichung

$$\frac{1 - xy}{x} + (y - x)y' = 0$$

ist exakt.

Aufgabe 3.13 •• $n = 0$,

$$\mathcal{L}[f_0(t)] = F(s) = \int_0^\infty t^0 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

$n \rightarrow n + 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_{n+1}(t)] &= F(s) = \int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} dt \\ &= -t^{n+1} \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^\infty + \frac{n+1}{s} \int_0^\infty t^n e^{-st} dt \\ &= \frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}, \end{aligned}$$

wobei wir hier partielle Integration verwendet haben und die Induktionsvoraussetzung eingesetzt haben.

Aufgabe 3.14 •• Diese homogene Differenzialgleichung lässt sich durch die Substitution $y(x) = xz(x)$ folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} y'(x) &= z(x) + xz'(x) = 1 + 2z(x), \\ xz'(x) &= 1 + z(x). \end{aligned}$$

Das ist eine separable Differenzialgleichung, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann

$$\begin{aligned} xz'(x) &= x \frac{dz}{dx} = 1 + z(x), \\ \frac{dz}{1+z} &= \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{dz}{1+z} &= \int \frac{dx}{x}, \\ \ln(z+1) &= \ln(x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \\ z+1 &= e^{c_1} x = cx, \\ z(x) &= cx - 1, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rücksubstitution führt auf die allgemeine Lösung

$$y(x) = xz(x) = x(cx - 1) = cx^2 - x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.15 ••

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y} \\ \frac{dy}{\sqrt{y}} &= 2xdx \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y}} &= \int 2xdx \\ 2\sqrt{y} &= x^2 + c \end{aligned}$$

d. h., wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + c)^2.$$

Nun lösen wir die drei Anfangswertprobleme:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= \frac{1}{4}c^2 \Rightarrow c = 2, \quad y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2)^2 \\ y(0) = 0 &= \frac{1}{4}c^2 \Rightarrow c = 0, \quad y(x) = \frac{1}{4}x^4 \\ y(0) = -1 &= \frac{1}{4}c^2 \Rightarrow c = 2i, \quad y(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2i)^2 \end{aligned}$$

Im dritten Fall existiert keine reelle Lösung.

Aufgabe 3.16 •• Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differenzialgleichung ist $y = y_h + y_p$, wobei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' - y = 0$ ist und y_p irgendeine spezielle Lösung von $y'' - y = 1$ ist.

Für die homogene Gleichung ist

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}$$

ein Fundamentalsystem und die allgemeine homogene Lösung hat die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Die Partikulärlösung bestimmen wir durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da wir nur an einer speziellen Lösung interessiert sind, können wir zusätzliche Voraussetzungen an $c_1(x)$ und $c_2(x)$ festlegen, etwa

$$c'_1(x) y_1(x) + c'_2(x) y_2(x) = 0.$$

Wenn wir diesen Ansatz für $y_p(x)$ in die Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$1 = y''_p(x) - y_p(x) = c'_1(x) y'_1(x) + c'_2(x) y'_2(x).$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für c'_1, c'_2 :

$$e^x c'_1(x) + e^{-x} c'_2(x) = 0,$$

$$e^x c'_1(x) - e^{-x} c'_2(x) = 1.$$

Daraus folgt

$$c'_1(x) = \frac{1}{2} e^{-x}, \quad c'_2(x) = -\frac{1}{2} e^x,$$

und durch Integration

$$c_1(x) = -\frac{1}{2} e^{-x}, \quad c_2(x) = -\frac{1}{2} e^x$$

also ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x} e^x - \frac{1}{2} e^x e^{-x} = -1, \end{aligned}$$

eine Partikulärlösung. (Man könnte auch sofort sehen, dass $y_p(x) = -1$ die Gleichung $y''_p - y_p = 1$ erfüllt.)

Kommen wir nun zur Lösung des Randwertproblems:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1$$

ist die allgemeine Lösung. Einsetzen der Randbedingungen führt auf

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - 1 = 0, \\ y'(0) &= c_1 - c_2 = 0. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem und erhalten

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Die Lösung des Randwertproblems ist daher

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2}.$$

Aufgabe 3.17 •• Die Funktionen

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$

bilden ein Fundamentalsystem für die gegebene homogene Differenzialgleichung. Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir bestimmen c_1 und c_2 durch Einsetzen der Lösung in die Randbedingungen:

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1.$$

$$0 = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1,$$

also $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig und die Lösungen haben die Gestalt

$$y(x) = c_2 \sin x, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3.18 ••

a) Es gilt: $f'(t) = a \cosh(at)$ und $f(0) = \sinh 0 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \mathcal{L}[a \cosh(at)] = s \mathcal{L}[\sinh(at)] - 0 \\ &= s \frac{a}{s^2 - a^2} = \frac{as}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

b) Es gilt: $f'(t) = 3t^2$ und $f(0) = 0^3 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \mathcal{L}[3t^2] = s \mathcal{L}[t^3] - 0 \\ &= s \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.19 ••• Es gilt: $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(t) = \omega \cos(\omega t)$ und daher $f'(0) = \omega$. Aus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \mathcal{L}[-\omega^2 f(t)] = -\omega^2 \mathcal{L}[f(t)] = -\omega^2 F(s) \\ \mathcal{L}[f''(t)] &= s^2 F(s) - s \cdot 0 - \omega \end{aligned}$$

folgt durch Gleichsetzen

$$s^2 F(s) - \omega = -\omega^2 F(s)$$

oder

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}[\sin(\omega t)].$$

Aufgabe 3.20 ••• Wir machen einen Separationsansatz $u(x, t) = w(t)v(x)$ und differenzieren

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= w''(t) v(x), \\ u_{xx}(x, t) &= w(t) v''(x), \\ w''(x) v(x) &= w(t) v''(x), \\ \frac{w''}{w} &= \frac{v''}{v} = \lambda. \end{aligned}$$

Das führt auf ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem $v'' = \lambda v$ mit der Lösung

$$v(x) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x).$$

Wir setzen die Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} 0 = v(0) &\Rightarrow c_1 = -c_2 = c, \quad c \in \mathbb{R} \\ 0 = v(1) &\Rightarrow c(\exp(\sqrt{\lambda}) - \exp(-\sqrt{\lambda})) = 0. \end{aligned}$$

Da hier ein Sturm-Liouville Eigenwertproblem vorliegt, betrachten wir nur reelle Eigenwerte. Die zweite Bedingung kann nur dann erfüllt sein wenn $\lambda \leq 0$ oder wenn $c = 0$ ist. Im Fall $c = 0$ existiert nur die triviale Lösung und im Fall $\lambda = 0$ ist v linear oder konstant, aber durch die Randbedingungen folgt $v \equiv 0$. Für $\lambda < 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = \exp(\sqrt{\lambda}) - \exp(-\sqrt{\lambda}) &= 2i \sin(\sqrt{|\lambda|}) \\ \Rightarrow \lambda_k &= -k^2 \pi^2, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

mit den Eigenfunktionen

$$v_k(x) = 2i c \sin(k\pi x).$$

Nun wollen wir noch das Anfangswertproblem lösen. Wir entwickeln dazu die Lösung in eine Fourierreihe

$$\begin{aligned} u(x, t) &= w(t)v(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t)) \sin(k\pi x) \end{aligned}$$

und setzen die Anfangswerte ein:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\pi x), \\ u_t(x, 0) &= h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k k\pi \sin(k\pi x), \\ \Rightarrow a_k &= 2 \int_0^1 g(s) \sin(k\pi s) ds, \\ \Rightarrow b_k &= \frac{2}{k\pi} \int_0^1 h(s) \sin(k\pi s) ds. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.21 •• Aus

$$v(x) = e^{\frac{1}{2} \int p dx} u(x) \quad \text{oder} \quad u(x) = e^{-\frac{1}{2} \int p dx} v(x)$$

folgt durch Differenzieren

$$\begin{aligned} u' &= e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \left(-\frac{1}{2} p v + v' \right), \\ u'' &= e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \left(-\frac{1}{2} p v' - \frac{1}{2} p' v + v'' - \frac{1}{2} p \left(-\frac{1}{2} p v + v' \right) \right), \end{aligned}$$

daher gilt

$$\begin{aligned} Lu &= u'' + p(x)u' + q(x)u \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \left(-p v' - \frac{1}{2} p' v + v'' + \frac{1}{4} p^2 v \right. \\ &\quad \left. + p(v' - \frac{1}{2} p v) + q v \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \left(v'' - \frac{1}{2} p' v - \frac{1}{4} p^2 v + q v \right) \end{aligned}$$

und

$$Lu = 0 \Leftrightarrow v'' + \underbrace{\left(-\frac{1}{2} p' - \frac{1}{4} p^2 + q \right)}_{k(x)} v = 0.$$

Betrachten wir nun das Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} Lu &= u'' + pu' + qu = \lambda u, \\ e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \left(v'' - \frac{1}{2} p' v - \frac{1}{4} p^2 v + q v \right) &= \lambda e^{-\frac{1}{2} \int p dx} v, \\ v'' + k(x)v &= \lambda v, \\ 0 &= v'' + (k(x) - \lambda)v, \end{aligned}$$

d. h. λ ist ein Eigenwert von L genau dann, wenn λ ein Eigenwert von $\tilde{L}$ ist, wobei

$$\tilde{L}v = v'' + k(x)v.$$

Wenden wir die Transformation auf die Hermitesche Differenzialgleichung an

$$\begin{aligned} u'' - 2xu' + 2nu &= 0, \\ p(x) &= -2x, \quad q(x) = 2n, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow k(x) &= -\frac{1}{2}(-2) - \frac{1}{4}(-2x)^2 + 2n \\ &= 1 - x^2 + 2n, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$v'' + (1 - x^2 + 2n)v = 0.$$

Aufgabe 3.22 ••• Zunächst zeigen wir, dass $\lambda > 0$ ist. Dazu multiplizieren wir die gegebene Differenzialgleichung mit u

$$\begin{aligned} (-xu')' &= \frac{\lambda}{x} u, \\ u(-xu')' &= \frac{\lambda}{x} u^2 \end{aligned}$$

und integrieren partiell

$$\begin{aligned} \int_1^e u(-xu')' dx &= \underbrace{(-xu'u)|_1^e}_{=0} + \underbrace{\int_1^e xu'^2 dx}_{>0} \\ &\stackrel{!}{=} \lambda \underbrace{\int_1^e \frac{1}{x} u^2 dx}_{>0}, \end{aligned}$$

da $u(1) = u(e) = 0$ und nur positive Funktionen integriert werden. Wir setzen $\lambda = \mu^2$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Mit dem Ansatz $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= x^\alpha, \\ u'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}, \\ u''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Die gegebene Differenzialgleichung lässt sich umschreiben zu

$$0 = x^2 u'' + xu' + \mu^2 u.$$

Arbeitsbuch Grundwissen Mathematikstudium - Höhere

Analysis, Numerik und Stochastik

Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege

Brokate, M.; Henze, N.; Hettlich, F.; Meister, A.;

Schranz-Kirlinger, G.; Sonar, Th.

2016, VIII, 237 S. 26 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-54945-8