



2.1	Gleichungsarten	30
2.2	Äquivalente Umformungen	31
2.3	Lineare Gleichungen	32
2.4	Proportionen	33
2.5	Quadratische Gleichungen	34
2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades	37
2.7	Auf algebraische Gleichungen zurückführbare Gleichungen	43
2.8	Transzendente Gleichungen	45
2.9	Lineare Gleichungssysteme	47

2.1 Gleichungsarten

Ein Term ist ein mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen, Rechenzeichen (mathematischen Operationen) und möglicherweise noch anderen mathematischen Symbolen (zum Beispiel Funktionswerten) besteht.

Will man ausdrücken, dass ein Term T_1 zu einem anderen Term T_2 äquivalent (gleichwertig) ist, so schreibt man

Gleichung

$$T_1 = T_2$$

Eine solche Darstellung heißt Gleichung. Die linke Seite der Gleichung ist T_1 , die rechte Seite der Gleichung ist T_2 .

Mit Hilfe von Gleichungen lassen sich quantitative Beziehungen in Natur und Technik beschreiben. Meist liegen jedoch in der Praxis auftretende Aufgaben nicht in Form von Gleichungen zwischen Termen vor, sondern sie werden als Textgleichungen mit Worten beschrieben. Daraus muss dann durch eine Übersetzung in die formale Sprache der Mathematik eine mathematische Beziehung hergestellt werden.

Die Überlegenheit der mathematischen Symbolik zeigt folgendes Beispiel:

Textgleichung: Den Umfang eines Kreises berechnet man, indem man das Produkt aus dem Verhältnis von Umfang eines beliebigen Kreises zu seinem Durchmesser ($\frac{U}{d} = \pi$) und dem Kreisradius (r) mit 2 multipliziert (vgl. Abschn. 3.9).

$$\text{Termgleichung: } u_{\text{Kreis}} = 2\pi r$$

Man unterscheidet drei verschiedene Arten von Gleichungen:

1. Identische Gleichungen
2. Bestimmungsgleichungen
3. Funktionsgleichungen

Eine identische Gleichung oder Identität ist eine Gleichung zwischen zwei algebraischen Ausdrücken, die bei Einsetzen beliebiger Zahlenwerte anstelle der darin aufgeführten Buchstaben symbole erhalten bleibt.

Beispiele für identische Gleichungen (Identitäten)

1. $a(b+c) = ab+ac$
2. $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
3. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
5. $a^n a^m = a^{n+m}$
6. $\sqrt[n]{c} \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{cd}$
7. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
8. $e^{ix} = \cos x + j \sin x$

Eine Bestimmungsgleichung ist eine Gleichung, in der Variable (Unbekannte) auftreten, die durch eine Rechnung bestimmt werden sollen. Mit Hilfe zulässiger Rechenoperationen sollen alle Werte der Variablen aus dem zugrunde liegenden Zahlenbereich bestimmt werden, für die die Gleichung erfüllt ist. Man nennt diese Werte Lösungen oder auch Wurzeln der Gleichung. Alle Lösungen zusammen bilden die Lösungsmenge L der Bestimmungsgleichung. Eine Gleichung hat keine, eine oder mehrere Lösungen.

Eine Bestimmungsgleichung ist also nur für einige spezielle Werte der Variablen erfüllt.

Beispiele für Bestimmungsgleichungen

1. $x+2=3$
Lösung: $x=1$
Lösungsmenge: $L=\{1\}$
2. $x+2=x+3$
Keine Lösung
Lösungsmenge: $L=\{\}=\emptyset$
3. $2x+1=x^2-2$
Lösungen: $x=3$ und $x=-1$
Lösungsmenge: $L=\{-1,3\}$
4. $5x^2-5=x^3-x$
Lösungen: $x=5, x=1$ und $x=-1$
Lösungsmenge: $L=\{-1,1,5\}$
5. $11-\sqrt{x+3}=6$
Lösung: $x=22$
Lösungsmenge: $L=\{22\}$
6. $3^x=4^{x-2} \cdot 2^x$
Lösung: $x = \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3} \approx 2,826780$
Lösungsmenge: $L = \left\{ \frac{4 \log 2}{3 \log 2 - \log 3} \right\}$
7. $\lg(6x+10) - \lg(x-3) = 1$
Lösung: $x=10$
Lösungsmenge: $L=\{10\}$
8. $\sin^2 x - 1 = -0,5$
Lösung: $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
Lösungsmenge: $L = \{x \mid x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

Die Bestimmungsgleichungen werden unterteilt in die algebraischen Gleichungen und in die transzendenten Gleichungen.

In einer algebraischen Gleichung werden mit der oder den Variablen nur algebraische Rechenoperationen vorgenommen; sie werden addiert, subtrahiert, multipliziert, dividiert, potenziert oder radiziert. Sowohl die auftretenden Zahlen (Koeffizienten

genannt) als auch die Lösungen können aber transzendente Zahlen sein. Jede algebraische Gleichung mit genau einer Variablen x lässt sich in der allgemeinen Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

schreiben. Die Zahlen $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ heißen Koeffizienten (Beizahlen) der Gleichung. Sie stehen für beliebige reelle oder komplexe Zahlen.

Ist x^n die höchste auftretende Potenz der Variablen x , so heißt die Gleichung vom Grad n .

Algebraische Gleichungen vom Grad 1 heißen auch lineare Gleichungen, Gleichungen vom Grad 2 quadratische Gleichungen und Gleichungen vom Grad 3 kubische Gleichungen.

Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra sagt aus, dass jede algebraische Gleichung n -ten Grades genau n (reelle oder komplexe) Lösungen (Wurzeln) besitzt.

Alle Bestimmungsgleichungen, die nicht algebraisch sind, heißen transzendent (deutsch: übersteigend). Sie haben ihren Namen daher, dass sie im Allgemeinen schwieriger aufzulösen sind als die algebraischen Gleichungen. Sie erfordern Auflösungsmethoden, die die Mittel der Algebra übersteigen.

Beispiele für transzendente Gleichungen sind Exponentialgleichungen, logarithmische Gleichungen und trigonometrische Gleichungen.

Bei den ersten fünf Beispielen handelt es sich um algebraische Bestimmungsgleichungen, bei den letzten drei Beispielen um transzendente Gleichungen.

Eine Funktionsgleichung dient dazu, eine Funktion zu definieren. Eine Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen verschiedenen veränderlichen Größen. Eine Funktionsgleichung enthält in der Regel zwei oder mehr Variable, die durch die Gleichung einander zugeordnet werden.

Funktionen werden ausführlich im Kap. 5 behandelt.

Beispiele für Funktionsgleichungen

1. $y = 2x + 1$
2. $y = -x^2 + x - 5$
3. $y = 2x^2 - x - 3\sqrt{x} + 4$
4. $y = \sin x$
5. $y = 2^x - 5x + 1.$



2.2 Äquivalente Umformungen

Oft ist es möglich, eine gegebene Gleichung durch zulässige Rechenoperationen in eine Gleichung zu überführen, die die gleiche Lösungsmenge wie die Ausgangsgleichung besitzt, aber

einfacher zu lösen ist. Eine solche Umformung heißt äquivalent. Man nennt auch die beiden Gleichungen äquivalent (gleichwertig).

Bei den zulässigen Rechenoperationen ist darauf zu achten, dass sie gleichzeitig auf beiden Seiten einer Gleichung durchgeführt werden, zum Beispiel die Addition einer Konstanten oder die Multiplikation mit einer Konstanten.

Grundregeln für äquivalente Umformungen:

Addition einer Zahl (hier a) auf beiden Seiten einer Gleichung

$$\begin{aligned} x - a &= b & | + a \\ x &= b + a \end{aligned}$$

Subtraktion einer Zahl (hier a) von beiden Seiten einer Gleichung

$$\begin{aligned} x + a &= b & | - a \\ x &= b - a \end{aligned}$$

Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl (hier mit a); Bedingung: $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= b & | \cdot a \\ x &= b \cdot a \end{aligned}$$

Division beider Seiten einer Gleichung durch die gleiche Zahl (hier durch a); Bedingung: $a \neq 0$

$$\begin{aligned} ax &= b & | : a \\ x &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Beispiele

1.
$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 29 & | + 6 & \text{(Addition auf beiden Seiten)} \\ 5x &= 35 & | : 5 & \text{(Division auf beiden Seiten)} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge $L = \{7\}$.

$$\begin{array}{ll}
 2. & 5x - 20 = 60 - 11x \quad | + 11x \quad (\text{Addition auf beiden Seiten}) \\
 & 16x - 20 = 60 \quad | + 20 \quad (\text{Addition auf beiden Seiten}) \\
 & 16x = 80 \quad | : 16 \quad (\text{Division auf beiden Seiten}) \\
 & x = 5
 \end{array}$$

Alle vier Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge $L = \{5\}$.

$$\begin{array}{ll}
 3. & \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+2} \quad | \cdot x(x-1)(x+2) \\
 & \quad \quad \quad (x \neq 0, 1, -2) \\
 & 2(x-1)(x+2) - x(x+2) = x(x-1) \quad (\text{Hauptnenner}) \\
 & 2(x^2 + x - 2) - (x^2 + 2x) = x^2 - x \\
 & \quad \quad \quad x^2 - 4 = x^2 - x \quad | - x^2 + x \\
 & \quad \quad \quad x - 4 = 0 \quad | + 4 \\
 & \quad \quad \quad x = 4
 \end{array}$$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge $L = \{4\}$.

$$\begin{array}{ll}
 4. & 4x^2 - x + 3 = 6x^2 + x - 1 \quad | - (4x^2 - x + 3) \\
 & 0 = 6x^2 + x - 1 - 4x^2 + x - 3 \\
 & 0 = 2x^2 + 2x - 4 \quad | : 2 \\
 & 0 = x^2 + x - 2 \quad | \text{Vertauschen der Seiten} \\
 & x^2 + x - 2 = 0
 \end{array}$$

Berechnen der Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \\
 \Rightarrow x_1 &= 1, x_2 = -2
 \end{aligned}$$

Alle Gleichungen sind äquivalent mit der Lösungsmenge $L = \{1, -2\}$.

$$\begin{array}{ll}
 5. & \sqrt{x+8} = x+2 \quad | \text{Quadrieren} \\
 & x+8 = (x+2)^2 \quad | \text{Klammer „beseitigen“} \\
 & x+8 = x^2 + 4x + 4 \quad | - (x+8) \\
 & 0 = x^2 + 3x - 4 \quad | \text{Vertauschen der Seiten} \\
 & x^2 + 3x - 4 = 0
 \end{array}$$

Berechnen der Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
 \Rightarrow x_1 &= 1, x_2 = -4
 \end{aligned}$$

$x_1 = 1$ erfüllt die Ausgangsgleichung wegen $\sqrt{1+8} = 1+2$, dagegen ist $x_2 = -4$ keine Lösung der Ausgangsgleichung, denn es ist $\sqrt{-4+8} \neq -4+2$.

Somit: Das Quadrieren ist keine äquivalente Umformung! ◀

2.3 Lineare Gleichungen

Eine lineare Gleichung oder Gleichung ersten Grades ist eine algebraische Gleichung, in der die Variable x in keiner höheren als der ersten Potenz vorkommt.

Jede lineare Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen überführen in die äquivalente Gleichung

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Diese Gleichung heißt allgemeine Form der linearen Gleichung. Durch Division durch $a \neq 0$ erhält man die sogenannte Normalform der linearen Gleichung.

$$x + \frac{b}{a} = x + c = 0, \quad c = \frac{b}{a}$$

Die Lösung der linearen Gleichung ist $x = -c = -\frac{b}{a}$. Für die Lösungsmenge gilt also: $L = \{-c\} = \{-\frac{b}{a}\}$.

Allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Lösung: Man „beseitigt“ zunächst alle Klammern und Brüche und ordnet dann die Glieder so, dass alle Glieder mit der Variablen x links vom Gleichheitszeichen und alle anderen rechts davon stehen:

$$\begin{aligned}
 a(bx + c) &= d(ex + f) \\
 abx + ac &= dex + df \\
 abx - dex &= df - ac \\
 x(ab - de) &= df - ac \\
 x &= \frac{df - ac}{ab - de}
 \end{aligned}$$

($ab \neq de$ ist Bedingung, denn durch 0 darf nicht dividiert werden.)

Beispiel

$$\begin{aligned}
 3(x+2) &= 5(-2x+9) \\
 3x+6 &= -10x+45 \\
 3x+10x &= 45-6 \\
 13x &= 39 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 3(3+2) &= 5(-6+9) \\
 3 \cdot 5 &= 5 \cdot 3 \\
 15 &= 15
 \end{aligned}$$

Grundsätzlich sollte eine Probe durchgeführt werden. Dabei ist jede Seite der Gleichung einzeln auszurechnen. Der berechnete Wert für x sollte stets in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden.

Fehlerwarnung: Nach Einsetzen der Lösung sollen nicht die gleichen Umformungen wie bei der Hauptrechnung vorgenommen werden, da sonst leicht ein möglicher Fehler wiederholt werden kann.

2.4 Proportionen

Eine Sonderstellung unter den linearen Gleichungen mit einer Variablen nehmen die Proportionen wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit ein.

Eine Proportion ist eine Verhältnisgleichung

$$a : b = c : d$$

oder mit $x = d$.

$$a : b = c : d$$

und in Bruchschreibweise

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(gesprochen: a verhält sich zu b wie c zu d).

Treten in einer Proportion gleiche Innenglieder oder gleiche Außenglieder auf, so heißt die Proportion stetig. Im Fall gleicher Innenglieder, also $a : b = b : c$, nennt man b mittlere Proportionale.

Sind von den Gliedern einer Proportion drei bekannt, dann lässt sich die vierte Proportionale berechnen. Sind zum Beispiel a , b , c bekannt und d gesucht, so gilt $d = \frac{bc}{a}$.

Beispiele

1. Welche Kraft F dehnt eine Feder um 4 cm, wenn die Kraft 3 N (Newton) eine Dehnung um 2 cm bewirkt?
Ansatz (*Hooke'sches Gesetz*): $F : 4 \text{ cm} = 3 \text{ N} : 2 \text{ cm}$
Auflösung nach F : $F = \frac{4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ N}}{2 \text{ cm}} = 6 \text{ N}$
Antwort: Die Kraft 6 N bewirkt die Dehnung um 4 cm.
2. Wie weit kommt ein Flugzeug in $2\frac{1}{2}$ Stunden, wenn es 10 km in 45 s zurücklegt?
Ansatz (*Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit*):
 $x : 9000 \text{ s} = 10 \text{ km} : 45 \text{ s}$
Auflösung nach x : $x = \frac{9000 \text{ s} \cdot 10 \text{ km}}{45 \text{ s}} = 2000 \text{ km}$
Antwort: Das Flugzeug fliegt 2000 km weit. ◀

Die Proportion $a : b = c : d$ lässt sich verschieden umformen. Äquivalente Formen sind

$$d : c = b : a$$

$$a : c = b : d$$

$$d : b = c : a$$

$$b : a = d : c$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Aus der Proportion $a : b = c : d$ lassen sich weitere Proportionen ableiten, etwa durch Addition oder Subtraktion von 1 auf beiden Seiten. Man nennt ein solches Umformen der Proportion korrespondierende Addition oder korrespondierende Subtraktion (Bedingung in allen Fällen: Nenner ungleich 0).

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{b} &= \frac{c+d}{d} & \frac{a}{a+b} &= \frac{c}{c+d} \\ \frac{a-b}{b} &= \frac{c-d}{d} & \frac{a}{a-b} &= \frac{c}{c-d} \end{aligned}$$

Dies sind Sonderfälle des allgemeinen Gesetzes der korrespondierenden Addition und Subtraktion. Aus $a : b = c : d$ folgt für beliebige reelle Zahlen p, q, r, s (r und s dürfen nicht gleichzeitig 0 sein)

$$\frac{pa + qb}{ra + sb} = \frac{pc + qd}{rc + sd}$$

Beispiele

3.

$$\frac{5}{4} = \frac{5+x}{x}$$

Nenner vom Zähler subtrahieren (korrespondierende Subtraktion):

$$\frac{5-4}{4} = \frac{5+x-x}{x}$$

Vereinfachen:

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{x}$$

Nach x auflösen (Multiplikation der Gleichung mit $4x$):

$$x = 20$$

Die Lösung ist $x = 20$, wie die Probe bestätigt.

4.

$$5x : (4 - x) = 30 : 9$$

In Bruchschreibweise:

$$\frac{5x}{4-x} = \frac{30}{9}$$

Addition von $\frac{1}{5}$ des Zählers zum Nenner (korrespondierende Addition):

$$\frac{5x}{4-x+\frac{5x}{5}} = \frac{30}{9+\frac{30}{5}}$$

Vereinfachen:

$$\frac{5x}{4} = \frac{30}{15} (= 2)$$

Multiplikation mit $\frac{4}{5}$:

$$x = \frac{8}{5}$$

Die Lösung ist $x = \frac{8}{5}$.

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot \frac{8}{5}}{4 - \frac{8}{5}} &= \frac{30}{9} \\ \Leftrightarrow \frac{8}{2\frac{2}{5}} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{5}{12} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{10}{3} &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

2.5 Quadratische Gleichungen

2.5.1 Definitionen

Eine quadratische Gleichung oder Gleichung zweiten Grades ist eine algebraische Gleichung, in der die Variable x in keiner höheren als der zweiten Potenz vorkommt.

Jede quadratische Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen überführen in die Gleichung

Allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Diese Gleichung heißt allgemeine Form der quadratischen Gleichung.

Durch Division durch $a \neq 0$ erhält man die sogenannte Normalform der quadratischen Gleichung (mit $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$).

Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

2.5.2 Lösungsverfahren

2.5.2.1 Normalform

Die Lösungen der Normalform $x^2 + px + q = 0$ der quadratischen Gleichung bestimmt man mit der Methode der „quadratischen Ergänzung“. Zunächst bringt man q auf die rechte Seite der Gleichung, das heißt, von beiden Seiten der Gleichung wird q subtrahiert. Auf beiden Seiten addiert man dann die quadratische Ergänzung $(\frac{p}{2})^2$ des Terms $x^2 + px$. Damit wird die linke Seite der Gleichung zu einem „vollständigen Quadrat“ (binomische Formel). Durch Radizieren und anschließender Subtraktion von $\frac{p}{2}$ ergeben sich dann die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung.

Bestimmung der Lösungen:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px &= -q \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Normalform

Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

Lösungen:
$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

Die Gleichung $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ für die Lösungen nennt man auch (p, q) -Formel.

 (p, q) -Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beispiele

1. (ausführlich)

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

$$x^2 + 12x = -35$$

$$x^2 + 12x + 6^2 = -35 + 6^2$$

$$(x + 6)^2 = 1$$

$$x + 6 = \pm 1$$

$$x = -6 \pm 1$$

Lösungen: $x_1 = -6 + 1 = -5$, $x_2 = -6 - 1 = -7$.

Es sind zwei Proben durchzuführen!

2. (mit (p, q) -Formel)


$$25x^2 + 13 = 70x$$

Sortieren und Dividieren durch 25 zum Beschaffen der Normalform:

$$x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{13}{25} = 0 \Rightarrow p = -\frac{14}{5} \text{ und } q = \frac{13}{25}$$

Einsetzen in die (p, q) -Formel ergibt die Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{7}{5} + \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - \frac{13}{25}} = \frac{7}{5} + \sqrt{\frac{36}{25}} \\ &= \frac{7}{5} + \frac{6}{5} = \frac{13}{5}, \\ x_2 &= \frac{7}{5} - \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Es sind zwei Proben durchzuführen! 

Den Radikanden in der (p, q) -Formel nennt man die Diskriminante D der Normalform der quadratischen Gleichung.

Diskriminante der Normalform

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die Lösungen der Normalform lassen sich auch mit Hilfe der Diskriminante schreiben.

Normalform

Gleichung: $x^2 + px + q = 0$

Lösungen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

Der Wert der Diskriminante D bestimmt die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung.

Für $D > 0$ existieren zwei reelle Lösungen x_1 und x_2 , für $D = 0$ gibt es eine reelle Lösung (Doppellösung $x_1 = x_2$), für $D < 0$ hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung, es existieren zwei komplexe Lösungen x_1 und x_2 (x_1 und x_2 sind konjugiert komplex zueinander).

Beispiele

3.

$$2x^2 - 10x + 12 = 0 \quad (\text{allgemeine Form})$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (\text{Normalform})$$

$$p = -5, q = 6 \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}$$

$$D > 0 \Rightarrow \text{zwei reelle Lösungen}$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \\ &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

4.

$$-9x^2 + 18x - 9 = 0 \quad (\text{allgemeine Form})$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (\text{Normalform})$$

$$p = -2, q = 1 \Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{4}{4} - 1 = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{Doppellösung } x_1 = x_2$$

Lösung:

$$x_1 = x_2 = -\frac{-2}{2} = 1$$

5. $3x^2 - 36x + 120 = 0$ (allgemeine Form)
 $x^2 - 12x + 40 = 0$ (Normalform)
 $p = -12, q = 40$
 $\Rightarrow D = \frac{p^2}{4} - q = \frac{(-12)^2}{4} - 40$
 $= \frac{144}{4} - 40 = \frac{16}{4} = -4$
 $D < 0 \Rightarrow$ zwei konjugiert komplexe Lösungen

Lösungen:

$$x_{1,2} = -\frac{-12}{2} \pm \sqrt{-4}$$

$$= 6 \pm \sqrt{-4} = 6 \pm 2\sqrt{-1} = 6 \pm 2j$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 + 2j, \quad x_2 = 6 - 2j \quad \blacktriangleleft$$

2.5.2.2 Allgemeine Form

Die Lösungen der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c = 0$ erhält man durch Setzen von $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$ in der (p, q) -Formel.

Allgemeine Form

Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}),$
 $x_2 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$

Beispiel

1. $2x^2 - 10x + 12 = 0$
 $a = 2, b = -10, c = 12$
 Lösungen:

$$x_1 = \frac{1}{4}(-(-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12})$$

$$= \frac{1}{4}(10 + \sqrt{100 - 96}) = \frac{1}{4}(10 + 2) = 3,$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(10 - 2) = 2 \quad \blacktriangleleft$$

Den Radikanden in der Lösungsformel nennt man die Diskriminante \bar{D} der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung.

Diskriminante der allgemeinen Form

$$\bar{D} = b^2 - 4ac$$

Die Lösungen der allgemeinen Form lassen sich auch mit Hilfe der Diskriminante schreiben.

Allgemeine Form

Gleichung: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

Lösungen: $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{\bar{D}}),$

$$\bar{D} = b^2 - 4ac$$

Auch hier bestimmt der Wert der Diskriminante \bar{D} die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung.

Für $\bar{D} > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen x_1 und x_2 , für $\bar{D} = 0$ gibt es eine reelle Doppellösung ($x_1 = x_2$), und für $\bar{D} < 0$ gibt es keine reelle Lösung, sondern zwei konjugiert komplexe Lösungen x_1 und x_2 .

Beispiel

2. $3x^2 - 18x + 42 = 0$
 $a = 3, b = -18, c = 42 \Rightarrow \bar{D} = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 42 =$
 $324 - 504 = -180 < 0$
 $\bar{D} < 0 \Rightarrow$ zwei konjugiert komplexe Lösungen
 Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{6}(18 \pm \sqrt{-180})$$

$$= \frac{1}{6}(18 \pm \sqrt{36 \cdot (-5)}) = 3 \pm \sqrt{-5}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5}j, \quad x_2 = 3 - \sqrt{5}j \quad \blacktriangleleft$$

2.5.2.3 Zerlegung in Linearfaktoren

Sind x_1 und x_2 die (nicht unbedingt verschiedenen) Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, dann kann der quadratische Ausdruck in Linearfaktoren zerlegt werden.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Die Faktoren $x - x_1$ und $x - x_2$ heißen linear, weil die Variable x nur in erster Potenz, also linear auftritt.

Da ein Produkt genau dann gleich 0 ist, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist, ergeben sich auch hieraus wieder die Lösungen x_1 und x_2 .

Man nennt $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ auch Produktform der quadratischen Gleichung.

Beispiele

1. $2x^2 - 6x = 0$
Zerlegung in Linearfaktoren: $2x^2 - 6x = 2x(x-3) = 0$
Lösungen: $x_1 = 0, x_2 = 3$
2. $x^2 - x - 6 = 0$
Zerlegung in Linearfaktoren:
 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$
Lösungen: $x_1 = 3$ (denn $x-3 = 0$ für $x = 3$),
 $x_2 = -2$ (denn $x+2 = 0$ für $x = -2$). ◀

3. Welche quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -3$?
Nach dem Satz von Viëta folgt:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(5 - 3) = -2,$$

$$q = x_1 x_2 = 5 \cdot (-3) = -15$$

Antwort: Die Normalform der gesuchten quadratischen Gleichung ist $x^2 - 2x - 15 = 0$. ◀

2.5.3 Satz von Viëta für quadratische Gleichungen

Die Produktform der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in Normalform lautet $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Ausmultiplizieren und Vergleich ergibt

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

also die Beziehungen $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$. Der Koeffizient p von x ist somit gleich der negativen Summe der beiden Lösungen, das Absolutglied q der quadratischen Gleichung ist gleich dem Produkt der Lösungen. Diese Beziehungen nennt man den Satz von Viëta für quadratische Gleichungen (nach dem französischen Mathematiker François Viëta, 1540–1603).

Satz von Viëta

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 x_2$$

Beispiele

1. Die quadratische Gleichung $x^2 - 5x + 6 = 0$ mit $p = -5$, $q = 6$ hat die Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Es gilt:

$$p = -5 = -(3 + 2) = -(x_1 + x_2),$$

$$q = 6 = 3 \cdot 2 = x_1 x_2$$

2. Die quadratische Gleichung $x^2 - 12x + 40 = 0$ mit $p = -12$, $q = 40$ hat die Lösungen $x_1 = 6 + 2j$, $x_2 = 6 - 2j$ (siehe oben). Es gilt:

$$p = -12 = -(6 + 2j + 6 - 2j) = -(x_1 + x_2),$$

$$q = 40 = 36 + 4$$

$$= 36 - 4j^2 = (6 + 2j)(6 - 2j) = x_1 x_2$$

2.6 Algebraische Gleichungen höheren Grades

2.6.1 Kubische Gleichungen

Die allgemeine Form einer kubischen Gleichung lautet

Allgemeine Form

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0$$

Die Normalform erhält man aus der allgemeinen Form durch Division durch $a \neq 0$ und Setzen von $\frac{b}{a} = r$, $\frac{c}{a} = s$, $\frac{d}{a} = t$.

Normalform

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$$

Dabei sind a, b, c, d und somit auch r, s, t reelle (oder komplexe) Koeffizienten.

„Kubisch“ bedeutet, dass die Variable x in keiner höheren als der dritten Potenz vorkommt. Deshalb nennt man kubische Gleichungen auch Gleichungen dritten Grades.

Mit Hilfe der sogenannten Cardani'schen Formel lassen sich die Lösungen exakt berechnen. Es gibt entweder drei reelle Lösungen oder eine reelle Lösung und zwei konjugiert komplexe Lösungen.

In Spezialfällen führen oftmals einfachere Methoden zum Ziel.

Sind x_1, x_2, x_3 die Lösungen der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, dann gilt

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

Man nennt dies Produktform der kubischen Gleichung oder Zerlegung in Linearfaktoren.

Ist $t = 0$ in der Normalform (für die allgemeine Form ist die Methode ganz analog), also $x^3 + rx^2 + sx = 0$, dann erhält man durch Ausklammern von x die Gleichung $x(x^2 + rx + s) = 0$. Neben der reellen Lösung $x_1 = 0$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + rx + s = 0$ die weiteren Lösungen.

Sonderfall $t = 0$

Gleichung: $x^3 + rx^2 + sx = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$

$$x_2 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}$$

$$x_3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - s}$$

Fehlerwarnung: Durch Division durch x geht die Lösung $x = 0$ verloren!

Beispiel

1. $x^3 - x^2 - 2x = 0$

Ausklammern von x : $x(x^2 - x - 2) = 0$

Erste Lösung: $x_1 = 0$

Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$ hat die

Lösungen $x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$, also

$x_2 = 2, x_3 = -1$

Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 - x^2 - 2x = 0$

somit: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$. ◀

Ist eine Lösung x_1 von $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ bekannt, dann lässt sich die kubische Gleichung durch Abspalten des Faktors $x - x_1$ reduzieren (auch diese Methode lässt sich für die allgemeine Form anwenden).

$$x^3 + rx^2 + sx + t = (x - x_1)(x^2 + ux + v) = 0$$

Dividiert man die linke Seite $x^3 + rx^2 + sx + t$ der kubischen Gleichung durch $x - x_1$, so erhält man einen quadratischen Term $x^2 + ux + v$. Die Wurzeln von $x^2 + ux + v = 0$ sind auch Lösungen der kubischen Gleichung.

Diese Methode heißt Reduktionsmethode, und die dabei durchgeführte Division nennt man Polynomdivision (vgl. auch nächsten Abschnitt).

Lösung x_1 bekannt

Gleichung: $x^3 + rx^2 + sx + t = (x - x_1)(x^2 + ux + v) = 0$

Lösungen: x_1

$$x_2 = -\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - v}$$

$$x_3 = -\frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - v}$$

Beispiele

2. $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$

Eine Lösung dieser kubischen Gleichung ist $x_1 = 1$ (erhält man durch Probieren).

Division von $x^3 - 6x^2 - x + 6$ durch $x - 1$:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 6x^2 - x + 6) : (x - 1) = x^2 - 5x - 6 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ -5x^2 - x \\ \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\ -6x + 6 \\ \underline{-(-6x + 6)} \\ 0 \end{array}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x - 6 = 0$ sind $x_2 = 6, x_3 = -1$.

Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ somit:

$x_1 = 1, x_2 = 6, x_3 = -1$

3. $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = 1$ (Probieren!).

Division von $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$ durch $x - 1$:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 12x^2 + 11x - 3) : (x - 1) = 4x^2 - 8x + 3 \\ \underline{-(4x^3 - 4x^2)} \\ -8x^2 + 11x \\ \underline{-(-8x^2 + 8x)} \\ 3x - 3 \\ \underline{-(3x - 3)} \\ 0 \end{array}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $4x^2 - 8x + 3 = 0$ sind $x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{2}$.

Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ somit:

$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{2}$. ◀

Handbuch Elektrotechnik

Grundlagen und Anwendungen für Elektrotechniker

Plaßmann, W.; Schulz, D. (Hrsg.)

2016, XXXVII, 1392 S. 1924 Abb.,

ISBN: 978-3-658-07049-6