2 Elementare Finanzmathematik

Wer sich mit der Lebensversicherungsmathematik vertraut machen möchte, sollte gute Kenntnisse der elementaren Finanzmathematik besitzen. Aus diesem Grund stellen wir in diesem Kapitel das notwendige Rüstzeug zusammen.

Gegenstand der elementaren Finanzmathematik ist die Bewertung sicherer Zahlungsströme. Dabei ist von entscheidender Bedeutung, dass Geldbeträge nur dann der Höhe nach miteinander verglichen werden dürfen, wenn sie zum gleichen Termin gezahlt werden. Der Wert des Geldes hängt also von zwei Variablen ab: Betrag und Fälligkeitszeitpunkt. In der finanzmathematischen Praxis werden deshalb Zahlungen am Zeitstrahl verdeutlicht.

2.1 Zinsrechnung

Die Transformationen des Kapitals in der Zeit erfolgt mit Hilfe des Kalküls der Zinsrechnung. Wir beschränken uns für die praktische Lebensversicherungsmathematik im Wesentlichen auf die **exponentielle Verzinsung**. Dabei werden insbesondere Zinsen auf erhaltene Zinszahlungen, die so genannten **Zinseszinsen**, berücksichtigt.

Es sei K_0 ein gegebenes Anfangskapital. Unter Berücksichtigung von Zinseszinsen wächst es nach n Zinsperioden zum gegebenen Zinssatz i auf den Wert

$$K_n = K_0(1+i)^n \ .$$

Umgekehrt können wir bei gegebenem Endwert den Wert am Beginn berechnen:

$$K_0 = K_n v^n \text{ mit } v = (1+i)^{-1} \ .$$

Mit Hilfe der Verzinsung können Zahlungen, die zu unterschiedlichen Terminen fällig sind, auf einen gemeinsamen Termin, der beliebig sein darf, transformiert werden. Den

K.M. Ortmann, *Praktische Lebensversicherungsmathematik*,
Studienbücher Wirtschaftsmathematik, DOI 10.1007/978-3-658-10200-5_2

Wert des Kapitals am Beginn des Betrachtungshorizonts nennen wir **Barwert**, der **Zeitwert** am Ende der Laufzeit heißt **Endwert**.

Gibt es mehrere Zahlungen, so werden alle auf einen beliebigen, aber gemeinsamen Termin auf- oder abgezinst, und anschließend summiert. Dadurch erhalten wir den Zeitwert des Zahlungsstroms. Im Sinne der Lebensversicherung betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit zumeist Barwerte und bezeichnen zwei zu vergleichende Zahlungsströme mit Leistung L und Gegenleistung GL. Anschließend können die so umgerechneten und zusammengefassten Beträge der Höhe nach miteinander verglichen werden. Dadurch ist das **finanzmathematische Äquivalenzprinzip** charakterisiert:

Barwert der Leistung ist gleich Barwert der Gegenleistung.

Dieses Prinzip ist die Grundlage sämtlicher Berechnungen der elementaren Finanzmathematik. Durch Gleichsetzen lässt sich die gesuchte finanzmathematische Größe, sei es Barwert, Endwert, Zinssatz oder Laufzeit, berechnen. Im Kapitel zur Beitragsberechnung werden wir das finanzmathematische Äquivalenzprinzip auf unsichere Zahlungsströme erweitern, indem wir die Zufälligkeit der Zahlungen adäquat berücksichtigen.

In nicht wenigen praktischen Anwendungen ist die Zeitperiode, auf die sich der Zinssatz bezieht, nicht identisch mit der Zinsperiode, also dem zeitlichen Abstand zwischen zwei Zinszuschlagterminen. So wird meistens ein Jahreszinssatz spezifiziert, wobei die Zinsen unterjährig, beispielsweise monatlich, gezahlt werden. Dazu unterscheiden wir zwei Ansätze: die **unterjährig lineare Verzinsung** und die **unterjährig konforme Verzinsung**.

Es sei i der vorgegebene Zinssatz für ein ganzes Jahr. Die Zinsen seien k-mal pro Jahr fällig. In bezug auf die unterjährig lineare Verzinsung nennen wir i den **nominalen Zinssatz** und i/k den **relativen unterjährigen Periodenzinssatz**. Nach der Zinseszinsformel gilt für den Endwert nach n Jahren mit jeweils k unterjährigen Zinszuschlagterminen zum relativen Periodenzins:

$$K_n = K_0(1 + i_{\text{rel}})^{k \cdot n} = K_0 \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{k}\right)^{k \cdot n} .$$

In Bezug auf unterjährig konforme Verzinsung hingegen nennen wir i den **effektiven** und $\sqrt[k]{1+i} - 1$ den **konformen Zinssatz**. Nach der Zinseszinsformel gilt für den Endwert nach n Jahren bei k unterjährigen Zinszuschlagterminen zum konformen Zinssatz:

$$K_n = K_0(1 + i_{\text{kon}})^{k \cdot n} = K_0(1 + i_{\text{eff}})^n .$$

Daran erkennen wir, dass die Definition des konformen Zinssatzes eine sinnvolle Verallgemeinerung des Konzepts der exponentiellen Verzinsung ist. Zur Vereinfachung wird dennoch gelegentlich die unterjährig lineare Verzinsung verwendet.

2.2 Investitionsrechnung

Zur Bewertung von Investitionen werden nach dem finanzmathematischen Äquivalenzprinzip die Einnahmen und Ausgaben gegenübergestellt. Dabei wird analysiert, ob eine gegebene Investition durchgeführt oder unterlassen werden soll. Stehen mehrere Investitionsmöglichkeiten zur Wahl, so soll die beste Alternative identifiziert werden. Wir diskutieren in diesem Zusammenhang die **Kapitalwertmethode** und die **Methode der internen Rendite**. Beide Methoden werden insbesondere auch für den **Finanzierbarkeitsnachweis** der Lebensversicherung angewendet.

Bei der **Kapitalwertmethode** werden zunächst die Barwerte der mit der Investition verbundenen Einnahmen und Ausgaben getrennt voneinander berechnet. Der **Kapitalwert** der Investition ist dann die Differenz der beiden Barwerte. Falls der Barwert der Einnahmen größer als der Barwert der Ausgaben ist, das heißt, wenn der Kapitalwert größer als null ist, so ist die Investition **vorteilhaft**. Sind die Barwerte identisch, so ist der Investor indifferent hinsichtlich der Durchführung der Investition. Ist der Barwert der Ausgaben größer als der Barwert der Einnahmen, so gilt die Investition als **unvorteilhaft** und sollte nicht durchgeführt werden. Bei mehreren Investitionsalternativen wird diejenige Investition mit dem größten Kapitalwert ausgewählt.

Bei der **Methode der internen Rendite** werden die Nullstellen der Kapitalwertfunktion in Abhängigkeit des variablen Zinssatzes gesucht. Jede Nullstelle der Kapitalwertfunktion heißt interne Rendite der Investition. Diese Mehrdeutigkeit stellt ein Problem dar. In der Praxis gibt es häufig, aber nicht immer, nur genau einen finanzmathematisch sinnvollen Effektivzinssatz.

Üblicherweise kann das Nullstellenproblem der Kapitalwertgleichung nicht explizit gelöst werden, da es sich im Allgemeinen um eine Polynomgleichung höherer Ordnung handelt. Deshalb wird eine Näherungslösung, zum Beispiel mit dem **Newton-Verfahren**, numerisch berechnet.

Ist die interne Rendite größer als der vorgegebene Zinssatz, der die **Eigenkapitalrendite** darstellt, so ist die Investition **vorteilhaft**. Ist die interne Rendite kleiner als die geforderte Rendite, dann ist die Investition **unvorteilhaft**. Die Methode der internen Rendite liefert somit ein qualitatives Entscheidungskriterium, wohingegen die Kapitalwertmethode darüber hinaus geeignet ist, Investitionen quantitativ zu beurteilen.

2.3 Rentenrechnung

Eine Rente ist ein Zahlungsstrom, dessen Zahlungen in gleichen Abständen erfolgen. Wir beschränken uns hier auf Renten mit gleich hohen Raten R. Da die Auszahlungen während der vereinbarten Vertragsdauer sicher sind, wird eine solche Rente als **garantierte Rente** bezeichnet. Deshalb spricht man in diesem Zusammenhang auch von einer **Zeitrente** – im Gegensatz zu einer **Leibrente** in der Lebensversicherung, die nur im Erlebensfall gezahlt wird. Aufgrund der zu berücksichtigenden Sterblichkeit des Individuums ist folglich die

Laufzeit der **Altersrente** ungewiss. Wir werden im Abschnitt zur Beitragsberechnung in der Lebensversicherung auf die Analyse solcher unsicheren Zahlungsströme zurückkommen.

Um den Barwert der jährlich vorschüssigen Rente der Höhe 1 über n Perioden zu berechnen, benötigen wir den so genannten **Rentenbarwertfaktor der vorschüssigen Rente** $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Es sei dazu $v = (1+i)^{-1}$ der Abzinsungsfaktor. Dann gilt aufgrund der geometrischen Reihe für $v \neq 1$, beziehungsweise $i \neq 0$, dass

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot v^k = \frac{1-v^n}{1-v} \,.$$

Es ist eigentlich völlig ausreichend, nur den vorschüssigen Rentenbarwertfaktor zu kennen. Denn alle anderen Rentenfaktoren lassen sich darauf zurückführen. So ist der **Rentenbarwertfaktor der nachschüssigen Rente** $a_{\overline{n}|}$ der Höhe 1, die n mal fällig ist, gleich dem abgezinsten Barwert der vorschüssigen Rente:

$$a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i} \,.$$

Analog erhalten wir den **Rentenendwertfaktor der vorschüssigen Rente** $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ der Höhe 1 über n Perioden durch entsprechendes Aufzinsen des Rentenbarwertfaktors $\ddot{a}_{\overline{n}|}$:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{1-v} \,.$$

Schließlich lässt sich der **Rentenendwertfaktor der nachschüssigen Rente** $s_{\overline{n}|}$ der Höhe 1, zahlbar über n Perioden, analog auf den Rentenbarwertfaktor $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ zurückführen:

$$s_{\overline{n}|} = v\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n a_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \,.$$

Eine Rente, deren Ratenzahlungen erst nach einer gewissen **Wartezeit**, oder auch **Karenzzeit**, beginnen, nennen wir eine **aufgeschobene Rente**. Der Rentenbarwertfaktor $m|\ddot{a}_{\overline{n}|}$ der um m Jahre aufgeschobenen für die folgenden n Jahre vorschüssig zahlbaren Rente der Höhe 1 lautet

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot v^m = \frac{v^m - v^{m+n}}{1-v} \,.$$

In Analogie dazu können auch die übrigen Rentenfaktoren berechnet werden. Schließlich spricht man von einer **ewigen Rente**, wenn die Anzahl der Rentenzahlungen unbegrenzt ist. Der Rentenbarwertfaktor $\ddot{a}_{\overline{\infty}|}$ der ewig vorschüssig zahlbaren Rente der Höhe 1 erhält man durch Grenzwertbetrachtung aus der endlichen Rente:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1+i}{i} \,.$$

Analog ist der Rentenbarwertfaktor $a_{\overline{\infty}|}$ der ewig nachschüssig zahlbaren Rente

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} \; .$$

Die Bewertung unterjährig zahlbarer Renten erfolgt im Prinzip analog, indem zunächst die unterjährigen Verzinsungsmodalitäten festgelegt werden. Dabei muss man darauf achten, die Laufzeit der Rente korrekt zu erfassen. Mit den Formeln für die Rentenfaktoren können der Rentenbarwert, der Rentenendwert, die Rentenrate oder die Laufzeit direkt berechnet werden. Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass wir den Zeitwert einer konkreten Rente der Höhe R durch Multiplikation mit dem entsprechenden Rentenfaktor erhalten. Um den Zinssatz zu ermitteln, muss man in den meisten Fällen auf ein Iterationsverfahren, wie beispielsweise das **Newton-Verfahren** zurückgegriffen, um eine Näherungslösung zu berechnen.

2.4 Tilgungsrechnung

Die **Tilgungsrechnung** befasst sich mit der Analyse von Krediten. Dazu wird das Äquivalenzprinzip auf die Leistungen des **Gläubigers** die Gegenleistungen des **Schuldners** angewendet. In der Praxis werden Schulden oftmals durch gleichmäßig wiederkehrende Raten abbezahlt, die in diesem Zusammenhang **Annuitäten** genannt werden. Somit lässt sich die Kreditrechnung auf die Rentenrechnung zurückführen.

Zur Verdeutlichung der **Annuitätentilgung** betrachten wir einen Kredit der Höhe 1 €, der durch eine konstante Annuität A in genau n Jahren vollständig zurückgezahlt werde. Dann ist die Annuität durch

$$A = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{i}{1-v^n}$$

gegeben. Dieser Ausdruck, der von der Laufzeit n abhängt, wird **Annuitätenfaktor** oder auch **Kapitalwiedergewinnungsfaktor** genannt. Er gibt an, welcher Betrag jährlich nachschüssig zu zahlen ist, um einen Kredit der Höhe 1 € in genau n Jahren vollständig zu tilgen. Durch Multiplikation mit dem tatsächlichen Kreditbetrag K eines beliebigen Kredites wird die Berechnung der jährlich konstanten nachschüssigen Rückzahlungsrate ermöglicht.

2.5 Duration

Von besonderem Interesse in der Finanzmathematik ist die Beurteilung der Änderung des Barwerts einer beliebigen Zahlungsreihe in Abhängigkeit vom verwendeten Zinssatz. Dazu wird der Barwert $BW(i)$ in allgemeiner Form dargestellt durch

$$BW(i) = \sum_{k=1}^{n} Z_k (1+i)^{-k} \; .$$

Dabei ist Z_k die nachschüssige Zahlung in der k-ten Periode. Die Ableitung der Barwertfunktion ist dann

$$BW'(i) = \sum_{k=1}^{n} -kZ_k(1+i)^{-k-1} \, .$$

Zur Approximation der Barwertfunktion machen wir eine Taylorentwicklung erster Ordnung von $BW(i)$ um den anfänglichen Zinssatz $i = i_0$:

$$BW(i) \approx BW(i_0) + BW'(i_0) \cdot (i - i_0) \, .$$

Dieser Ausdruck lässt sich unter Verwendung der Duration $D(i_0)$ äquivalent schreiben als

$$BW(i) \approx BW(i_0) - \frac{D(i_0)}{1+i_0} BW(i_0) \cdot (i - i_0) \, .$$

Die Duration ist dabei definiert durch

$$D(i) = -(1+i)\frac{BW'(i)}{BW(i)} \, .$$

Wir können die Duration auch allgemein berechnen, indem wir die konkrete Ableitung der Barwertfunktion berechnen. So ist

$$D(i) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot w_k$$

mit Gewichten w_k gemäß

$$w_k = \frac{Z_k(1+i)^{-k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k(1+i)^{-k}} \, ,$$

Die Duration kann folglich als der gewichtete Mittelwert der Zahlungszeitpunkte interpretiert werden.

Die genannte Approximation des Barwerts anhand der Taylorentwicklung ist in der Praxis weit verbreitet. Wir können die Näherung verbessern, indem wir die Evolution der Barwertfunktion betrachten:

$$BW'(i) = -\frac{D(i)}{1+i} BW(i) \, .$$

Dann approximieren wir die rechte Seite dieser Gleichung, indem wir $D(i)$ durch $D(i_0)$ ersetzen. Als Näherung für die Evolution der Barwertfunktion erhalten wir:

$$BW'(i) \approx -\frac{D(i_0)}{1+i} BW(i) \, .$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch die Funktion

$$BW(i) = BW(i_0) \left(\frac{1+i_0}{1+i} \right)^{D_0(i_0)} \, .$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Approximationsformel stets genauere Ergebnisse liefert als die Standardformel. Außerdem wird die Barwertfunktion immer unterschätzt.

2.6 Formeln der Finanzmathematik

An dieser Stelle fassen wir die wichtigsten Formeln der Finanzmathematik zusammen.

Typ	Symbol	Formel
Rechnungszins	i	i
Abzinsungsfaktor	v	$\frac{1}{1+i}$
Diskontfaktor	d	$\frac{i}{1+i}$
Unterjährig relativer Zinssatz	i_{rel}	$\frac{i_{\text{nom}}}{k}$
Unterjährig konformer Zinssatz	i_{kon}	$\sqrt[k]{1+i_{\text{eff}}}-1$
Barwertfaktor der vorschüssigen Rente	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{1-v^n}{1-v}$
Barwertfaktor der nachschüssigen Rente	$a_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{1-v^n}{i}$
Endwertfaktor der vorschüssigen Rente	$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{(1+i)^n-1}{1-v}$
Endwertfaktor der nachschüssigen Rente	$s_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{(1+i)^n-1}{i}$
Barwertfaktor der aufgeschobenen vorschüssigen Rente	${}_{m\vert}\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{v^m-v^{m+n}}{1-v}$
Barwertfaktor der ewigen vorschüssigen Rente	$\ddot{a}_{\overline{\infty}\rceil}$	$\frac{1+i}{i}$
Barwertfaktor der ewigen nachschüssigen Rente	$a_{\overline{\infty}\rceil}$	$\frac{1}{i}$
Annuitätenfaktor	$A_{\overline{n}\rceil}$	$\frac{i}{1-v^n}$
Barwertfunktion	$BW(i)$	$\sum_{k=1}^{n} Z_k(1+i)^{-k}$
Duration gemäß Definition	$D(i)$	$-(1+i)\frac{BW'(i)}{BW(i)}$
Duration als Mittelwert der Zahlungszeitpunkte	$D(i)$	$\frac{\sum_{k=1}^{n} kZ_k(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} Z_k(1+i)^{-k}}$
Approximation des Kurswerts nach Taylor	$BW^{\mathrm{T}}(i)$	$BW(i_0)-BW(i_0)\frac{D(i_0)}{1+i_0}(i-i_0)$
Verbesserte Approximation des Kurswerts	$BW^{+}(i)$	$BW(i_0)\left(\frac{1+i_0}{1+i}\right)^{D(i_0)}$

2.7 Aufgaben

Die fachspezifische Arbeitsweise der elementaren Finanzmathematik gliedert sich in vier klare Schritte. Die einzelnen Schritte sind im Allgemeinen:

1. Verdeutlichen Sie im Detail alle vorkommenden Zahlungen am Zeitstrahl! Ordnen Sie jede Zahlung der Leistung beziehungsweise der Gegenleistung zu!
2. Legen Sie einen gemeinsamen Stichtag für alle Zahlungen fest und berechnen Sie die Zeitwerte der Leistung und der Gegenleistung!
3. Wenden Sie das finanzmathematische Äquivalenzprinzip an, indem sie zunächst Leistung und Gegenleistung gleichsetzen und anschließend durch äquivalentes Umformen die gesuchte Größe in allgemeiner Form berechnen!
4. Setzen Sie die konkreten Parameterwerte ein und interpretieren Sie Ihr Ergebnis!

A 2.1 Eine 60-jährige Person habe 100.000 € zur freien Verfügung, die sie bei einer Bank anlegen möchte, um ab dem Alter 65 für die folgenden 20 Jahre eine jährlich vorschüssige Rente zu beziehen. Der jährliche Zinssatz sei 5 %. Berechnen Sie die Höhe der Rente!

A 2.2 Ein Beamter schließe im Alter von genau 40 Jahren eine Todesfallversicherung über 150.000 € ab. Im Fall des Todes, der mit Sicherheit irgendwann eintritt, bekommen die Angehörigen die Versicherungssumme ausbezahlt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Todesfallsumme am Ende des tatsächlichen Todesjahres ausgezahlt werde. Der jährlich vorschüssige Versicherungsbeitrag, den der Beamte zu zahlen hat, sei 3.400 €. Die Versicherung rechne intern mit einer Verzinsung von 5 % p.a.

a) Welchen Verlust macht das Versicherungsunternehmen, wenn der Beamte mit 57 Jahren und 3 Monaten verstirbt?
b) Welchen Gewinn macht das Versicherungsunternehmen, wenn der Beamte im Alter 72 und 9 Monate verstirbt?
c) In welchem Alter müsste der Beamte versterben, damit das Unternehmen weder Verlust noch Gewinn macht?

A 2.3 Die Todesfallleistung einer Lebensversicherung sei auf vier verschiedene Arten äquivalent abrufbar:

1. Eine vorschüssige ewige monatliche Rente vom Betrag 101,44 € ab dem Todesfalltag.
2. Eine vorschüssige monatliche Rente vom Betrag 468,60 € ab dem Todesfalltag, zahlbar für n Jahre.

3. Eine Einmalleistung in Höhe von 31.907,04 € zahlbar genau n Jahre nach dem Todesfalltag.
4. Eine Einmalleistung in Höhe von K_0 am Todesfalltag.

Berechnen Sie die Variablen i, n und K_0!

A 2.4 Eine genau 42-jährige Person möchte für den Altersruhestand vorsorgen und lege monatlich nachschüssig 500 € zurück. Bei Erreichen des Rentenalters von genau 67 Jahren soll das angesparten Kapitals in eine zwanzigjährige Rente verwandelt, die monatlich vorschüssig ausbezahlt werden soll. Der jährliche Zinssatz sei 2 % pro Jahr bei unterjährig konformer Verzinsung.

a) Wie hoch ist das angesparte Kapital im Alter 67?
b) Wie hoch ist die monatliche Rente ab dem Alter 67?
c) Die Person sterbe kurz vor Erreichen des Alters 75. Wie hoch ist das Erbe aus dem Altersruhevertrag?

A 2.5 Ein Anleger erwäge den Abschluss einer Erlebensfallversicherung. Nach Ablauf von 25 Jahren sei die Versicherungssumme von 100.000 € zuzüglich eines voraussichtlichen Zuschlags von 50.000 € fällig. Der jährliche vorschüssig fällige Versicherungsbeitrag sei 4.000 €. Das Renditeziel betrage 3,75 % pro Jahr. Beantworten Sie die Frage, ob die Investition lohnenswert ist mit der Kapitalwertmethode sowie mit der Methode der internen Rendite?

Praktische Lebensversicherungsmathematik
Mit zahlreichen Beispielen sowie Aufgaben plus
Lösungen
Ortmann, K.M.
2016, XIV, 458 S., Softcover
ISBN: 978-3-658-10199-2