2 Lineare Differentialgleichungen

Die einfachste Differentialgleichung ist, abgesehen vom „trivialen“ Fall $\dot{x} = a$, von der Form

$$\dot{x} = ax, \tag{2.1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Die Gleichung modelliert die Eigenschaft, dass das aktuelle Wachstum von x proportional zur aktuellen Größe von x ist. Diese *lineare* Differentialgleichung war uns bereits in der Einleitung bei der Modellierung der Entwicklung einer Population begegnet. Die Lösungen von (2.1) hatten wir dort als

$$x(t) = \exp(at)\, x_0 \tag{2.2}$$

kennengelernt. Hier ist x_0 eine beliebige reelle Zahl, die den Wert $x_0 = x(0)$ der Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$ festlegt, der sogenannte *Anfangswert*. Falls $a \neq 0$ ist, wachsen (für $a > 0$) oder fallen (für $a < 0$) also alle Lösungen exponentiell.

Gleichung (2.1) ist ein besonders einfacher Fall, die folgende Definition beschreibt die allgemeine Form einer (autonomen) linearen Differentialgleichung.

Definition 2.1 Eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ heißt *linear*, falls das Vektorfeld f als Funktion vom $\mathbb{R}^d$ in den $\mathbb{R}^d$ linear ist, d. h. falls

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ist das Vektorfeld linear, dann ist es von der Form $f(x) = Ax$ mit einer (reellen) $d \times d$-Matrix A. Eine autonome lineare Differentialgleichung hat also die Form

$$\dot{x} = Ax. \tag{2.3}$$

L. Grüne, O. Junge, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*,
Springer Studium Mathematik – Bachelor, DOI 10.1007/978-3-658-10241-8_2

Ihre Lösungen lassen sich formal genauso darstellen wie die der skalaren Gl. (2.1):

$$x(t) = \exp(At)\, x_0 \tag{2.4}$$

mit dem Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und einer von At abhängigen[1] Matrix $\exp(At) \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Im folgenden Abschn. 2.1 werden wir klären, was „$\exp(A)$“ bzw. „$\exp(At)$“ für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ bedeuten soll.

Man nennt die Differentialgleichung (2.3) *autonom* (oder auch eine lineare Differentialgleichung *mit konstanten Koeffizienten*), weil das Vektorfeld $f(x) = Ax$ nicht von der Zeit t abhängt. Allgemeiner kann man *nichtautonome* Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{2.5}$$

betrachten, hier ist $f : I \times D \to \mathbb{R}^d$, $I \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^d$, ein (*zeitabhängiges*) Vektorfeld. Eine nichtautonome *lineare* Differentialgleichung ist durch eine „zeitabhängige Matrix“, also eine Funktion $t \mapsto A(t)$ gegeben:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Mit der Lösung solcher Systeme werden wir uns in Abschn. 2.2 beschäftigen.

Frage 5 Formal kann man sich auf autonome Systeme beschränken, da man einer nichtautonomen Differentialgleichung (2.5) eine autonome zuordnen kann, die „dieselben“ Lösungen besitzt. Dazu führt man die neue Variable $y = (t, x) \in I \times D$ ein. Wie lautet das zugehörige Vektorfeld g, so dass $\dot{y} = g(y)$ dieselben Lösungen wie (2.5) hat? **Zusatzfrage:** Falls (2.5) linear ist, ist dann auch $\dot{y} = g(y)$ linear oder zumindest affin linear?

2.1 Autonome Systeme

Wie erwähnt lassen sich alle Lösungskurven des Systems $\dot{x} = Ax$ in der Form $x(t) = \exp(At)\, x_0$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ darstellen. Als Motivation für die Definition der *Exponentialfunktion* $\exp(At)$ oder e^{At} für Matrizen[2] betrachten wir zunächst diagonale und diagonalisierbare Matrizen.

Diagonale Matrizen Falls $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_d)$ eine Diagonalmatrix ist, nimmt $\dot{x} = Ax$ eine besonders einfache Form an: das System ist *entkoppelt*, d. h. es liegen d voneinander unabhängige skalare Gleichungen

$$\dot{x}_i = a_i x_i,$$

[1] Für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $t \in \mathbb{R}$ bezeichnet At die Matrix, in der jeder Eintrag von A mit t multipliziert wird.

[2] Wie im Reellen verwenden wir die Schreibweisen $\exp(At)$ und e^{At} synonym.

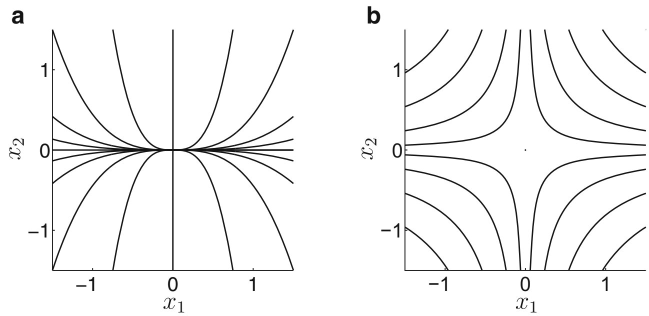

Abb. 2.1 Lösungskurven von $\dot{x} = Ax$ mit Diagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. **a** $A = \operatorname{diag}(-1, -3)$, **b** $A = \operatorname{diag}(-1, 1)$

$i = 1, \ldots, d$, vor. Für den Anfangswert $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0d})^{\mathrm{T}}$ sind deren Lösungen $x_i(t) = \exp(a_i t)\, x_{0i}$, es gilt also

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} \exp(a_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(a_d t) \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

In Abb. 2.1 sind einige Lösungskurven für zwei Systeme mit Diagonalmatrix und verschiedenen Eigenwerten dargestellt. Man beachte, dass die Lösungskurven in dieser Abbildung im *Zustands-* oder *Phasenraum* $\mathbb{R}^2$, also dem Bildraum der Lösungsfunktionen $t \mapsto x(t)$, dargestellt sind. Hier ist insbesondere die zeitliche Abhängigkeit nicht sichtbar. Eine solche Darstellung der Lösung(en) nennt man *Phasenportrait*.

Frage 6 Wie sehen die Phasenportraits für die Systemmatrizen $A = \operatorname{diag}(1, 1)$ und $A = \operatorname{diag}(0, 1)$ aus?

Diagonalisierbare Matrizen Falls A diagonalisierbar ist, können wir das Problem auf eines mit einer Diagonalmatrix zurückführen, indem wir eine Koordinatentransformation in eine Basis aus Eigenvektoren durchführen. Sei dazu V zunächst eine beliebige invertierbare $d \times d$-Matrix und $x(t)$ Lösung von (2.3). Dann gilt für $z = V^{-1}x$ wegen $x = Vz$ die Gleichung

$$\dot{z} = V^{-1}\dot{x} = V^{-1}Ax = V^{-1}AVz. \tag{2.7}$$

Enthält V nun die Eigenvektoren von A, dann ist $V^{-1}AV = L$ mit $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ und es folgt

$$\dot{z} = Lz \tag{2.8}$$

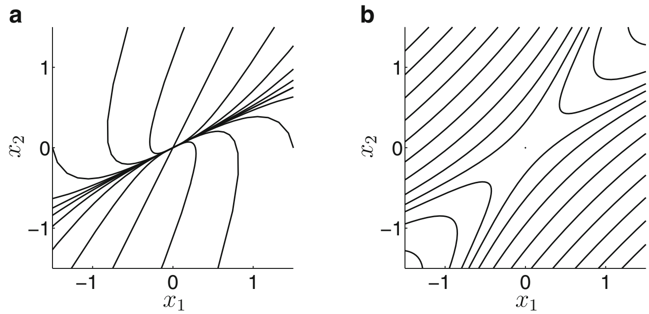

Abb. 2.2 Lösungskurven von $\dot{x} = Ax$, $A = VLV^{-1}$ und $V = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. **a** $L = \mathrm{diag}(-1, -3)$, **b** $L = \mathrm{diag}(-1, 1)$

mit der Diagonalmatrix L, für die wir die Lösungen bereits kennen. Die Lösungen von $\dot{x} = Ax$ sind damit $x(t) = Vz(t)$, bzw. explizit

$$x(t) = V \exp(Lt)\ V^{-1}x_0 = V \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\lambda_d t) \end{bmatrix} V^{-1}x_0$$

mit beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Für eine diagonalisierbare Matrix A muss also

$$\exp(A) = V \exp(L)\ V^{-1} \tag{2.9}$$

gelten, wobei L eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen und V die Matrix mit den zugehörigen Eigenvektoren als Spalten ist. Beispielhafte Lösungskurven für diesen Fall finden sich in Abb. 2.2

Nehmen wir nun an, der Anfangswert x_0 ist ein Vielfaches des Eigenvektors v_i zum Eigenwert λ_i von A,

$$x_0 = c\, v_i\,.$$

Dann ist $V^{-1}\, x_0 = cV^{-1}\, v_i = c\, e_i$ der i-te Einheitsvektor und für die Lösung $x(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= V \exp(Lt) V^{-1}\, x_0 \\ &= V \exp(Lt)\, c\, e_i \\ &= c \exp(\lambda_i t)\, v_i\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

d. h. die Kurve $x(t)$ verbleibt in dem von v_i aufgespannten Raum. Das Argument lässt sich leicht verallgemeinern und wir erhalten:

Proposition 2.2 Jeder Eigenraum $E \subset \mathbb{R}^d$ von A ist *invariant* für die Lösungen $x(t) = V \exp(Lt) V^{-1} x_0$ von $\dot{x} = Ax$, d. h. gilt $x_0 \in E$, dann gilt $x(t) \in E$ für alle t.

Frage 7 Beweisen Sie Proposition 2.2.

Die Matrix-Exponentialfunktion Die skalare Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist als unendliche Reihe definiert:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots .$$

Die Darstellung (2.6) der Exponentialfunktion für eine diagonalisierbare Matrix A lässt sich also umschreiben zu

$$\begin{aligned}\exp(At) &= V \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix} V^{-1} \\ &= I + V(Lt)V^{-1} + V\frac{1}{2!}(Lt)^2 V^{-1} + V\frac{1}{3!}(Lt)^3 V^{-1} + \dots \\ &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \dots\end{aligned}$$

Das motiviert die folgende

Definition 2.3 Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ ist die *Matrix-Exponentialfunktion* $\exp(A)$ definiert als

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots \tag{2.11}$$

Diese Definition ist nur sinnvoll, wenn die Reihe (2.11) für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ konvergiert. Das tut sie: Zur Begründung betrachten wir die Frobeniusnorm $\|A\| = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2}$ von A. Für diese Matrix-Norm gilt $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, also

$$\begin{aligned}1 + \|A\| + \frac{1}{2!}\|A^2\| + \dots &\le 1 + \|A\| + \frac{1}{2!}\|A\|^2 + \dots \\ &= \exp(\|A\|).\end{aligned}$$

Zudem gilt für jeden Eintrag $a_{ij}^{(k)}$ der Matrix A^k, $k \ge 1$, die Ungleichung $|a_{ij}^{(k)}| \le \|A^k\|$; für die Einträge $a_{ij}^{(0)}$ von $A^0 = I$ gilt $|a_{ij}^{(0)}| \le 1$. Folglich ist die Reihe links der Ungleichung eine Majorante für jeden Eintrag der Reihe $I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots$ – und damit ist jeder Eintrag der Reihe (2.11) absolut konvergent.

Diese absolute Konvergenz erlaubt es, direkt die Ableitung der Funktion $t \mapsto \exp(At)$ zu bestimmen: wir dürfen jeden Matrixeintrag der Reihe gliedweise ableiten und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(At) &= \frac{d}{dt}\left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots\right)\\ &= A + \frac{2}{2!}A^2t + \frac{3}{3!}A^3t^2 + \dots\\ &= A\left(I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \dots\right) = A\exp(At),\end{aligned}$$

also genau die gleiche Eigenschaft wie bei der skalaren Exponentialfunktion. Insbesondere haben wir damit bestätigt, dass

$$x(t) = \exp(At)\,x_0$$

eine Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit $x(0) = x_0$ ist. Für eine beliebige Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ sieht man analog leicht, dass

$$x(t) = \exp(A(t - t_0))\,x_0 \tag{2.12}$$

eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit $x(t_0) = x_0$ ist. In dieser Darstellung wird t_0 als *Anfangszeit* und x_0 wie bisher als *Anfangswert* bezeichnet. Tatsächlich ist (2.12) die eindeutige Lösung, die die Bedingung $x(t_0) = x_0$ erfüllt, wie wir im nächsten Kapitel ganz allgemein zeigen werden.

Bemerkung 2.4 Wir wollen noch vier aus der Reihendarstellung folgende wichtige Beobachtungen machen, bevor wir weiter auf die Bestimmung der Matrix-Exponentialfunktion eingehen:

(i) Falls $AB = BA$, so gilt für die Matrix-Exponentialfunktion die übliche Funktionalgleichung $e^{A+B} = e^A e^B$.

(ii) Ist $A = VBV^{-1}$ mit einer regulären Transformationsmatrix $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$, dann gilt

$$\exp(A) = V\exp(B)V^{-1}.$$

(iii) Für eine Matrix mit Blockstruktur

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{bmatrix},$$

wobei $A_1, \dots, A_m$ quadratische Matrizen sind, folgt

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \exp(A_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(A_m)\end{bmatrix},$$

(iv) Ein Unterraum $U \subset \mathbb{R}^d$, für den $Ax \in U$ gilt für alle $x \in U$, heißt *invariant bzgl. A*. Für jedes $x \in U$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt dann auch $\exp(At)x \in U$ (vgl. Prop. 2.2).

Frage 8 Was ist $\exp(At)$ für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Aus (ii) folgt, dass sich die Bestimmung der Matrix-Exponentialfunktion einer Matrix A auf die Bestimmung von $\exp(B)$ einer geeigneten *Normalform* B von A zurückführen lässt (das hatten wir ja bereits für diagonalisierbare Matrizen ausgenutzt). Die Beobachtung in (iii) legt dabei nahe, eine Normalform mit Blockstruktur zu verwenden. Wir werden daher im Folgenden die Jordan-Normalform von A verwenden.

Nicht-diagonalisierbare Matrizen Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ lässt sich auf *Jordan-Normalform*[3] transformieren, d. h. zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt es eine reguläre Matrix $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$, so dass die Matrix

$$J = V^{-1}AV$$

die folgende Gestalt hat:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Die *Jordan-Blöcke* J_i, $i = 1, \ldots, m$, haben die Form

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

dabei ist λ ein Eigenwert von A. Hat der Eigenwert λ die geometrische Vielfachheit e, dann taucht λ in e Jordan-Blöcken auf.

Beispiel 2.5 Im einfachsten nicht-diagonalisierbaren Fall liegt also ein 2×2-System der folgenden Form vor:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} x = Ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Was ist $\exp(At)$ in diesem Fall? Wir zerlegen die Matrix A,

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = D + N,$$

[3] Camille Jordan, französischer Mathematiker, 1838–1922.

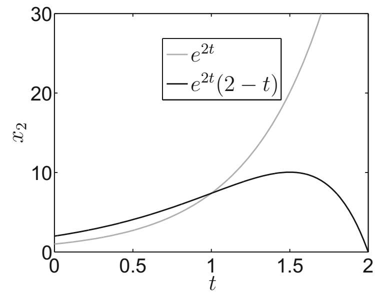

Abb. 2.3 Zeitlicher Verlauf der Lösung von Beispiel 2.5 im Vergleich zum exponentiellen Verlauf

in eine Diagonalmatrix D und eine *nilpotente*[4] Matrix N. Da $DN = ND$, gilt nach Bemerkung 2.4 $\exp(D+N) = \exp(D)\exp(N)$ und damit

$$\exp(At) = \exp((D+N)t) = \exp(Dt)\exp(Nt).$$

Die Exponentialfunktion der Diagonalmatrix D können wir bereits bestimmen, was ist also mit $\exp(N)$? Nun, da $N^2 = 0$ und damit $N^k = 0$ für $k \geq 2$, folgt sofort

$$\exp(Nt) = I + Nt.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\exp(At) &= \exp(Dt)\exp(Nt) \\ &= \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Wir erhalten also in der ersten Komponente der Lösung $x(t) = \exp(At)x_0$ einen in t polynomiellen Anteil, sie lautet nämlich explizit

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{at}x_{01} + e^{at}tx_{02} \\ &= e^{at}\left(x_{01} + tx_{02}\right).\end{aligned}$$

Dass dieser Anteil durchaus einen signifikanten Effekt auf das qualitative Verhalten der Lösung haben kann, ist beispielhaft in Abb. 2.3 für $a = 2$ und $x^0 = (2, -1)^{\mathrm{T}}$ dargestellt.

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall

$$\dot{x} = J_i x,$$

[4] Eine quadratische Matrix N heißt *nilpotent*, falls $N^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

mit dem Jordan-Block J_i aus (2.14). Wieder können wir die Systemmatrix J_i zerlegen,

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = L + N,$$

in eine Diagonalmatrix $L = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ und eine nilpotente Matrix N. Wieder gilt $LN = NL$, also $\exp(L + N) = \exp(L)\exp(N)$. Ist N eine $k \times k$-Matrix, dann gilt $N^k = N^{k+1} = \ldots = 0$ und damit

$$\exp(N) = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}N^{k-1}.$$

Wir erhalten also insgesamt

$$\begin{aligned} \exp(J_i t) &= \exp(Lt)\exp(Nt) \\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \vdots \\ & & 1 & t & \cdots & \vdots \\ & & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Zusammenfassend ergibt sich also das folgende Vorgehen zur Berechnung der Lösung einer linearen autonomen Differentialgleichung (2.3):

1. Berechne die Jordan-Normalform (2.13) und die zugehörigen Koordinatentransformationsmatrizen V und V^{-1}.
2. Berechne die Matrix-Exponential-Funktion $\exp(J_i t)$ für die einzelnen Jordan-Blöcke gemäß (2.15) und daraus die Gesamt-Matrix-Exponentialfunktion mittels (2.4).
3. Die Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ ist dann gegeben durch $x(t) = V\exp(J(t - t_0))V^{-1}x_0$.

Bezeichnen $v_{i1}, \ldots, v_{id_i}$, $i = 1, \ldots, m$, die Hauptvektoren (oder verallgemeinerten Eigenvektoren) zum Eigenwert λ_i – also gerade die Einträge der Matrix V – und ist der Anfangswert x_0 gegeben durch

$$x_0 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{ij} v_{ij},$$

so ergibt sich aus der Formel aus 3. mit etwas Rechnung die ausführliche Lösungsdarstellung

$$
\begin{aligned}
x(t) = \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda_i (t-t_0)} \Big[& \left(\alpha_{i1} + (t-t_0)\alpha_{i2} + \ldots + \tfrac{(t-t_0)^{d_i-1}}{(d_i-1)!}\alpha_{i d_i}\right) \cdot v_{i1} \\
& + \left(\alpha_{i2} + (t-t_0)\alpha_{i3} + \ldots + \tfrac{(t-t_0)^{d_i-2}}{(d_i-2)!}\alpha_{i d_i}\right) \cdot v_{i2} \\
& \vdots \\
& + \alpha_{i d_i} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot v_{i d_i} \Big]
\end{aligned}
$$

Diese Formel ist beim Rechnen per Hand manchmal einfacher zu verwenden als die Formel aus 3., weil sie ohne das Aufstellen der Jordan-Normalform und das explizite Invertieren von V auskommt.

Frage 9 Gilt die Aussage von Proposition 2.2 auch für die verallgemeinerten Eigenräume von A?

Komplexe Eigenwerte Die gerade diskutierten Lösungsdarstellungen gelten gleichermaßen für reelle wie für komplexe Eigenwerte. Zwar betrachten wir in diesem Buch nur reelle Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ – aber natürlich kann auch eine reelle Matrix A komplexe Eigenwerte besitzen. Gibt es eine reelle Interpretation der zugehörigen (komplexen) Lösungen?

Betrachten wir einen komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ von A und die zugehörige Differentialgleichung des diagonalisierten Systems (2.8):

$$\dot{z} = \lambda z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.16}$$

Ihre Lösungen sind

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 = e^{(\alpha + i\beta)t} z_0 = e^{\alpha t} e^{i\beta t}\, z_0 \tag{2.17}$$

für einen beliebigen Anfangswert $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Faktor $e^{\alpha t}$, der den Realteil α des Eigenwerts λ enthält, bewirkt wieder ein exponentielles Anwachsen ($\alpha > 0$) bzw. Abfallen ($\alpha < 0$) der Lösung.

Der Faktor $e^{i\beta t}$, in dem der Imaginärteil vorkommt, sorgt für eine *Drehung* um den Ursprung: Stellen wir Real-und Imaginärteil der Lösung $z = a + ib$ explizit dar, so wird aus (2.17)

$$a(t) + ib(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)(a_0 + ib_0),$$

beziehungsweise, wenn wir $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren,

$$\begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

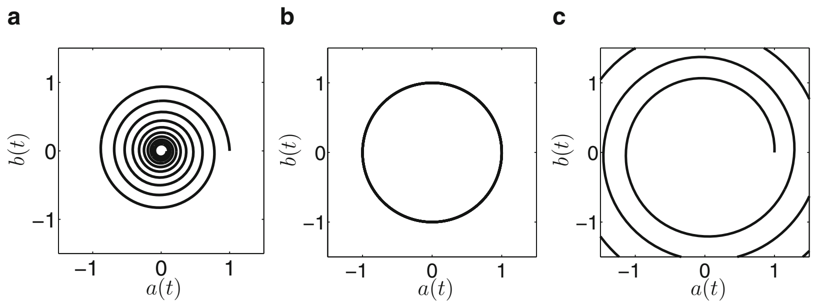

Abb. 2.4 Lösungskurven von $\dot{z} = \lambda z$ für $z_0 = 1$ und verschiedene λ. **a** $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, **b** $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, **c** $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

Die 2×2-Matrix in dieser Darstellung der Lösung dreht den Vektor $(a_0, b_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel βt um den Ursprung. Die Lösungskurve im $\mathbb{R}^2$ bzw. in $\mathbb{C}$ liegt also für $\alpha = 0$ auf einem *Kreis*, vgl. Abb. 2.4b. Entsprechend hat sie für $\alpha \neq 0$ die Form einer Spirale – je nach Vorzeichen von α spiralt die Lösung nach innen ($\alpha < 0$) oder außen ($\alpha > 0$).

Wenn wir die zeitliche Entwicklung des Realteils (oder des Imaginärteils) einzeln betrachten, erhalten wir für $\alpha < 0$ eine *gedämpfte Schwingung*, für $\alpha = 0$ eine (ungedämpfte) Schwingung und für $\alpha > 0$ eine *angeregte* Schwingung, vgl. Abb. 2.5.

Wie lässt sich mit Hilfe dieser reellen Darstellung der Lösung für die skalare Differentialgleichung (2.16) nun die Lösung des allgemeinen linearen Systems (2.3) reell beschreiben? Betrachten wir dazu noch einmal die Darstellung (2.10) der Lösung von $\dot{x} = Ax$ zum Anfangswert $x_0 = v$,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} v \\ &= e^{\alpha t} e^{i\beta t}(u + iw), \end{aligned}$$

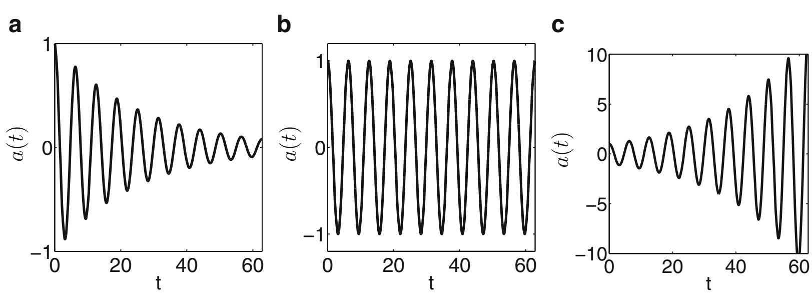

Abb. 2.5 Zeitliche Entwicklung des Realteils $a(t)$ der Lösung von $\dot{z} = \lambda z$ für $z_0 = 1$ und verschiedene λ. **a** $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, **b** $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, **c** $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

http://www.springer.com/978-3-658-10240-1

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme
Grüne, L.; Junge, O.
2016, XI, 249 S. 94 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-10240-1