Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule

2

Lisa Hefendehl-Hebeker

Zusammenfassung

Mathematik als Wissenschaft hat eine Jahrtausende währende Entwicklungsgeschichte. Die Umgangsweisen mit Mathematik an Schule und Hochschule entsprechen verschiedenen Stadien in diesem Entwicklungsprozess und unterscheiden sich in Bezug auf Inhalte, theoretischen Anspruch und Darstellungsmittel. An der Hochschule haben Studierende des Faches Mathematik im Vergleich zu ihren schulischen Erfahrungen ein schnelleres Tempo, eine größere Fülle an Inhalten, einen höheren Grad an Abstraktion und ein stärkeres Maß an Formalisierung zu bewältigen. Zusätzlich müssen sie einen neuen professionellen Habitus mit zugehörigen Einstellungen, Normen und Gepflogenheiten erwerben. Der vorliegende Beitrag verfolgt das Ziel, diese Thesen genauer auszuführen und durch Beispiele zu belegen.

2.1 Verschiedene Stufen der Wissensbildung

> Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlichen Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich, und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen ... Wir wissen nicht, welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen, in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge den Menschen noch blicken lässt (Kähler 1955, zitiert nach Zeidler 2009, S. 556).

Dieses Zitat beschreibt in prägnanter Weise, dass die Mathematik aus elementaren Wurzeln entstanden und zu einem hoch entwickelten Forschungsgebiet herangewachsen ist, wobei nicht abgesehen werden kann, in welche Bereiche die Dynamik dieser Wissenschaft noch vordringen wird. Die Mathematik in der Schule befindet sich nah an den Wurzeln, die

Lisa Hefendehl-Hebeker ✉
Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Essen, Deutschland
e-mail: lisa.hefendehl@uni-due.de

A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase*, Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik, DOI 10.1007/978-3-658-10261-6_2

Mathematik an der Hochschule dagegen in einem weit fortgeschrittenen Stadium dieses Prozesses. Daraus ergeben sich grundlegende Unterschiede in Bezug auf die verhandelten Inhalte, die Stufe der Theoriebildung, die Art der Darstellungsmittel und die begleitenden Standards, Konventionen und Zielsetzungen.

2.1.1 Inhalt und Abstraktionsniveau

> Our mathematical concepts, structures, ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world. Phenomenology of a mathematical concept, structure, or idea means describing it in its relation to the phenomena for which it was created, and to which it has been extended in the learning process of mankind … (Freudenthal 1983, S. ix).

Im Sinne dieser Sprechweise haben die Begriffe und Inhalte der Schulmathematik ihre phänomenologischen Ursprünge überwiegend in der uns umgebenden Realität. „Most concepts in school mathematics can be traced back to an origin in material physical activities of some sort or another (such as counting, measuring, drawing, constructing).“ (Dörfler 2003, S. 154) Die Geometrie (synthetisch und analytisch) ist auf das Erkennen und Beschreiben von Strukturen in unserer Umwelt und somit auf den dreidimensionalen Anschauungsraum bezogen, der Umgang mit Zahlen, Größen und Funktionen findet seine Sinngebung vorwiegend in der Lösung lebensweltlicher Probleme und die Stochastik betrachtet Zufallserscheinungen in alltagsweltlichen Situationen. „Dies alles kann durchaus intellektuell anspruchsvoll behandelt werden, auch mit lokalen Deduktionen, wo sie der Erkenntnissicherung dienen oder der Arbeitsökonomie.“ (Kirsch 1980, S. 231). Jedoch bleibt insgesamt die ontologische Bindung an die Realität bestehen, wie es bildungstheoretisch und entwicklungspsychologisch durch Aufgabe und Ziele der allgemeinbildenden Schule gerechtfertigt ist. Damit geht die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus.

Seitdem hat das mathematische Wissen „einen geradezu exponentiellen Zuwachs“ (Wußing 2009, S. VIII) erfahren und die Phänomenologie hat sich grundlegend geändert. Stichworte wie „Axiomatische Methode“ und „Lösen der ontologischen Bindung“ deuten an, dass moderne mathematische Theorien in erster Linie „deduktiv geordnete Welten eigener Art“ (Winter 1995) sind, die Phänomene der mentalen Welt, dargestellt als abstrakte Mengen mit spezifischen Struktureigenschaften, organisieren (was in einem eigenartigen Spannungsverhältnis zu ihrer hochgradigen Anwendungsrelevanz steht). Dazu haben komplexe Prozesse der fortlaufenden Restrukturierung vorhandener und der Begründung neuer Theorien geführt. Bedürfnisse nach Ausweitung und zugleich tieferer Fundierung sowie streng logischer Hierarchisierung von Wissensbeständen waren dabei maßgebliche Triebkräfte. Mathematik als wissenschaftliche Disziplin ist heute zu einem Geflecht hoch spezialisierter abstrakter Teilgebiete geworden. Dazu legt die Schule elementare Grundlagen, arbeitet aber „ohne Preisgabe des naiven Weltbildes“ (Kirsch 1980, S. 230) und bildet nur eine Vorstufe zur Hochschulmathematik.

2.1.2 Begriffsbildungshierarchien

Da die Schulmathematik sich nah an den Wurzeln des Fachgebietes bewegt, sind ihre Begriffsbildungen noch vergleichsweise elementar. Geometrische Begriffe wie „Kreis" und „Würfel" erfassen Formen, die an einzelnen Gegenständen ablesbar sind. Schwieriger sind bereits Relationsbegriffe wie „senkrecht", die zwei Objekte in Beziehung setzen. Weit komplexer sind Zahlbegriffe, weil Zahlen in einem reichhaltigen relationalen Gefüge zu anderen Zahlen stehen und unter vielen Aspekten erscheinen können. Sehr komplex werden Begriffsbildungen, die aus gedachten Prozessen auf dem Wege der „Einkapselung" mentale Objekte auf höherer Ebene konstituieren (Dubinsky und Harel 1992), die wiederum Operationen unterworfen und zu Objektklassen zusammengefasst werden können.

Eine Funktion stellt in einer ursprünglichen Sichtweise einen (in der Zeit ablaufenden) Prozess der Zuordnung zwischen Größen dar. Von einem höheren Standpunkt aus betrachtet kann eine Funktion zu einem geschlossenen Objekt werden, das man als Ganzes manipulieren kann, indem man es zum Beispiel mit anderen Funktionen verkettet oder verknüpft oder als Glied einer Funktionenfolge auffasst. Die Nebenklassen einer Untergruppe vereinigen diejenigen Gruppenelemente, die sich nur um ein Element der betreffenden Untergruppe unterscheiden. Diese Nebenklassen werden dann selbst wieder als Elemente einer Faktorgruppe aufgefasst, auf die Operationen und Morphismen angewendet werden können.

Solche Prozesse der „Objektivierung" (Radford 2010) oder „Reification" (Sfard 1995, 2000) kommen in der Schule nur in Ansätzen vor, vor allem in der Algebra der Termumformungen und bei der Betrachtung von Folgen und Funktionen sowie geometrischen Vektoren und stellen hier bereits erhebliche Anforderungen an das Verständnis. In der Hochschulmathematik spielen sie von Anfang an in vielen Zusammenhängen eine wichtige Rolle und können bis ins Akrobatische gestaffelt werden. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn Faktorgruppen aus Faktorgruppen betrachtet oder die Reellen Zahlen mit Hilfe von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen konstruiert werden. Zum Nachweis der Vollständigkeit des so gewonnenen Zahlkörpers sind Cauchy-Folgen zu betrachten, deren Glieder aus Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen bestehen.

Diese Prozesse erfordern nicht nur das gedankliche Konzipieren neuer Objekte, sondern auch einen flexiblen Wechsel zwischen der Gesamtsicht des Objektes und der Auflösung in seine einzelnen Zustände bzw. Bestandteile (siehe dazu auch das Beispiel im zweiten Abschnitt). Ein solcher Wechsel wird notwendig,

- wenn für eine Funktion bestimmte Eigenschaften (Linearität, Monotonie ...) nachzuweisen sind,
- wenn die Verkettung von zwei Abbildungen auf bestimmte Merkmale untersucht wird und
- wenn für eine Faktorstruktur die Wohldefiniertheit der Verknüpfung gezeigt werden soll.

2.1.3 Darstellungsmittel

Die Entwicklung der Mathematik zu einem Theoriegebäude abstrakter mentaler Konstrukte hat ein äußeres Pendant in den verwendeten Darstellungsmitteln.

> In *Fachpublikationen* wird Mathematik präsentiert in einer restriktiven konventionalisierten Fachsprache, die wie die Gemeinsprache weitgehend durch lineare Zeichenfolgen dargestellt wird und sich gegenwärtig in der Regel auf die Semantik der Mengenstrukturen bezieht. Die restriktiven Konventionen sind Resultat des Strebens der Mathematiker nach *Konsens* und *Kohärenz* größtmöglichen Ausmaßes (Wille 2005, S. 6).

Somit ist die mathematische Fachsprache ein hoch entwickeltes Artefakt, das eine *große Informationsdichte auf kleinem Raum* erzeugt und dessen verständige Handhabung eine eigene Expertise erfordert. Mathematik in der Schule nimmt diese Kunstsprache nur in moderaten Ansätzen in Gebrauch und bedient sich überwiegend einer mit Fachwörtern durchsetzten natürlichen Sprache.

2.1.4 Zeichen und Bedeutung: das epistemologische Grundproblem

Mathematische Inhalte sind nicht identisch mit ihren materialisierten Ausdrucksformen. Ein symbolischer Ausdruck wie eine unterstützende Graphik liefern nur ein sichtbares Gerüst für einen weiten Kosmos an Bedeutung. Dieser erschließt sich in dem Maße, wie sich, in der Diktion von Tall und Vinner (1981) gesprochen, hinter einer formalen „concept definition“ ein reichhaltiges „concept image“ auftut. Wer sich mit Mathematik beschäftigt, bewegt sich in einem dialektischen Verhältnis zwischen Zeichen und Bedeutung, Syntax und Semantik.

Dieses Spannungsverhältnis zwischen Zeichen und Bedeutung als grundlegende Triebkraft mathematischen Denkens hat Charles S. Peirce (1839–1914) in seiner Theorie des diagrammatischen Denkens genauer zu erklären versucht (Hoffmann 2005). Dabei fasst er unter den Begriff „Diagramm“ jede Art von Darstellungsmitteln in der Mathematik, für die es Regeln und Konventionen der Herstellung und des Gebrauchs gibt. Nicht nur bereichsspezifische graphische Darstellungen wie geometrische Figuren, Funktionsgraphen, Hasse-Diagramme usw. sind Diagramme in diesem Sinne, sondern auch Symbolsequenzen oder Symbolkonfigurationen wie Vektoren und Matrizen. Im Zentrum des mathematischen Denkens steht das „diagrammatische Schließen“ als eine Erkenntnistätigkeit, die an der Konstruktion von Darstellungen und dem Experimentieren mit solchen orientiert ist. Dabei fungieren die Zeichen als Erkenntnismittel im doppelten Sinne. Als äußere Mittel liegen sie konkret und verwirklicht vor uns. Als innere Mittel sind sie Werkzeuge des Geistes, die uns erlauben, die Welt um uns zu konzeptualisieren und zu organisieren, und damit auch „Möglichkeitsräume“ eröffnen. Zeichen werden dann zum inneren Mittel der Erkenntnis, wenn sie uns so vertraut sind, dass wir dahinter etwas Repräsentiertes wahrnehmen. Für den Umgang mit Zeichen ist immer bereits „kollaterales“ (begleitendes) Wissen notwendig. Das kann kulturell vermitteltes Wissen allgemein oder spezielles Wissen einer Gemeinschaft sein. Das Spezialwissen der in der mathematischen Forschung Tätigen geht jedoch weit über das im Schulunterricht vermittelte mathematische Wissen hinaus. Dieser Vorsprung betrifft sowohl fachliche Inhalte wie auch fachinterne Gepflogenheiten.

Der Ansatz von Peirce erklärt im Übrigen auch, warum in der Mathematik Freiheit und Gebundenheit, Kreativität und logische Strenge zusammen wirken. Einerseits eröffnen Diagramme kreative Spielräume, weil sie für Interpretationen offen sind und spielerische Veränderungen erlauben (z. B. ein Vorzeichen umzudrehen, einen zusätzlichen Faktor in Betracht zu ziehen). Andererseits enthält das Experimentieren mit Diagrammen den Charakter logischen Schließens, weil seine Ergebnisse durch die Regeln des Darstellungssystems bestimmt sind.

Der Umgang mit der mathematischen Fachsprache erfordert die Ausbildung einer Lesefähigkeit für symbolische Ausdrücke, die es ermöglicht, diese sinnvoll zu interpretieren und Informationen aus ihnen abzulesen, wie auch die Fähigkeit, diese Ausdruckmittel flexibel und sinnvoll als Werkzeug einzusetzen. Beides zusammen fasste Arcavi (1994) unter den Begriff „structure sense“. Beispiele weiter unten werden zeigen, dass dessen Ausbildung mehr Anstrengung und auch begleitendes Wissen (s. o.) erfordert, als oftmals angenommen wird.

2.2 Die erlebte Diskontinuität zwischen Schule und Hochschule

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat[...]“ (Klein 1908, S. 1). Diese vor mehr als hundert Jahren getroffene Feststellung hat auch heute noch eine weit reichende Aktualität. Das haben die Ausführungen zu den unterschiedlichen Stufen der Wissensbildung bereits deutlich gemacht. Im Folgenden soll die erlebte Diskrepanz aus Sicht der Studierenden noch einmal an drei Problemkreisen erläutert und durch Beispiele belegt werden.

2.2.1 Umgang mit der Fachsprache

Die mathematische Fachsprache erzeugt, wie bereits festgestellt, eine *hohe Informationsdichte auf kleinem Raum.* Welche Anforderungen allein die Ausbildung einer mathematischen Lesefähigkeit stellt, sei an einigen Aspekten genauer beleuchtet.

Mathematische Lesefähigkeit

In dem Ausdruck $M_{n,m}(K)$ für den Ring der $m \times n$-Matrizen über einem Körper K trägt jedes Zeichen zusammen mit seiner Position in der Zeichenfolge und der Art seiner Verwendung (z. B. als Index oder als Hauptzeichen) eine Information. Diese Tatsache allein stellt Novizen bereits vor hohe Anforderungen. Sie verlangt genaues Hinsehen und die Fähigkeit, alle Details fachgerecht zu einer Synthese zusammen zu führen.

Bei der Entschlüsselung symbolischer Ausdrücke können geistige Hürden auftreten. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn Lernende sich von der *Wucht der Signale* irritieren lassen. Vergleichen wir etwa die Ausdrücke $M_{n,m}(K)$ und $s_A(x,y)$, wobei $s_A(x,y) := x^t Ay$ eine durch die Matrix A induzierte Bilinearform auf einem Vektorraum darstellt. Beide Ausdrücke enthalten vier Buchstaben, eine Klammer und ein Komma, beschreiben aber ganz unterschiedlich „große" Objekte. $M_{n,m}(K)$ bezeichnet eine Mannigfaltigkeit von Matrizen über einem Körper, die dem Umfang nach unermesslich sein kann, $s_A(x,y)$ steht nur für ein einzelnes Element eines Körpers, das nach einer gegebenen Abbildungsvorschrift ermittelt wird.

In syntaktischen Konstellationen können *kleine Unterschiede große Wirkungen* haben, so etwa bei der Schachtelung von Quantoren. In der Gruppentheorie wird die Existenz eines neutralen Elementes durch die Sequenz $\exists_{e\in G}\forall_{a\in G}\, a\circ e = a$ erfasst. Vertauscht man darin die Quantoren, so entsteht die viel schwächere Bedingung $\forall_{a\in G}\exists_{e\in G}\, a\circ e = a$, die jedem Gruppenelement nur noch ein „Privatneutrales" einräumt. Bekanntlich fällt es auch vielen Studierenden schwer, in einer Analysis-Vorlesung verschiedene Stetigkeitsbegriffe formal und phänomenologisch zu unterscheiden. Die Definitionen für die lokale Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle c und die gleichmäßige Stetigkeit über einem geschlossenen Intervall $[a,b]$ sind äußerlich weitgehend analog gestaltet. Der entscheidende Unterschied besteht darin, dass im zweiten Fall ein Quantor mehr vorhanden ist, der auch Auswirkungen auf die Variablenkonstellation hat:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\, |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$$
$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in[a,b]}\, |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Der verstehende Umgang mit mathematischen Texten erfordert auch *flexibles Deuten und Umdeuten* von Ausdrücken. Eine Matrix kann je nach Zusammenhang als Konfiguration aus Zeilen- bzw. Spaltenvektoren oder selbst als Element eines linearen Raumes aufgefasst werden. Eine Folge ist ein komplexes Gebilde aus potentiell unendlich vielen Elementen. Aus einer höheren Perspektive wird sie als geschlossenes Objekt oder als Punkt in einem Raum betrachtet.

Subtile Vielfalt – ein Beispiel

Für das verständige Lesen eines mathematischen Textes müssen *viele Ausdrücke, syntaktische Regeln und fachinterne Konventionen gleichzeitig im Bewusstsein* gehalten werden, ähnlich wie der geläufige Umgang mit einer Fremdsprache die Verfügbarkeit von Vokabeln, grammatischen Regeln und Idiomen erfordert. Das wurde der Autorin kürzlich schlagartig bewusst, als sie sich auf eine Kollegialprüfung vorbereiten und dazu ein Kapitel zur Gruppentheorie aus dem Vorlesungsskript eines Kollegen studieren musste – ein Gebiet, mit dem sie sich lange nicht mehr intensiv beschäftig hatte. Die Anforderung sei exemplarisch an einem Auszug von einer knappen Seite demonstriert. Dort werden innere Automorphismen eingeführt und untersucht (Knoop 1997, S. 229 f.).

Ausgangspunkt der nach fachinternen Standards sorgfältig aufgebauten Überlegungen ist eine Gruppe G mit ihrer Automorphismengruppe $Aut(G)$. Dazu wird definiert:

Ist $x \in G$, so definieren wir $\varphi_x : G \to G$ durch $\varphi_x(y) := xyx^{-1}$.

Dieser kurze Satz beschreibt zwei ineinander geschachtelte Abbildungsvorgänge. Jedem Gruppenelement wird eine Abbildung der Gruppe G in sich zugeordnet, deren Wirkung mit Hilfe der Gruppenoperation festgelegt ist. Dadurch enthält der definierende Term xyx^{-1} zwei Typen von Variablen: die unabhängige Funktionsvariable y und den Parameter x. Diese Unterscheidung ist wesentlich für das Verständnis der folgenden Überlegungen:

Wegen $\varphi_x(yz) = x(yz)x^{-1} = xyx^{-1}xzx^{-1} = \varphi_x(y)\varphi_x(z)$ ist φ_x bereits ein Homomorphismus.

In diesem Beweis wird die Homomorphieeigenschaft von φ_x in einer geschlossenen Gleichungskette gezeigt. Die äußeren Terme bilden die nachzuweisende Funktionalgleichung, die Zwischenterme die zum Nachweis erforderlichen Transformationsschritte. Dabei wird zuvor bereitgestelltes Wissen über Gruppenhomomorphismen in der speziellen Situation angewendet. Dieses Wissen bleibt implizit und wird nicht mehr eigens ausgewiesen, muss also für den Leser/die Leserin verfügbar geworden sein. Ähnlich verhält es sich mit der nächsten Feststellung:

Aus $\varphi_x \circ \varphi_{x^{-1}} = \varphi_{x^{-1}} \circ \varphi_x = id_G$ folgt, dass φ_x sogar ein Automorphismus auf G ist.

Sie appelliert an vorhandenes Wissen über notwendige und hinreichende Bedingungen für die Bijektivität von Abbildungen. Zur Verifizierung der behaupteten Identität müssen Ausdrücke wie $\varphi_x \circ \varphi_{x^{-1}}(y) = x(x^{-1}yx)x^{-1}$ gebildet werden. Dazu ist die Abbildungsvorschrift zweimal richtig anzuwenden, und es sind zwei Verknüpfungen zu unterscheiden: die Verkettung von Abbildungen und die innere Verknüpfung der Gruppe.

Im Lehrtext folgen nun zwei Worterklärungen:

Und $\varphi \in Aut(G)$ heißt ein innerer Automorphismus, wenn ein $x \in G$ existiert mit $\varphi = \varphi_x$.

Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $x \in G$ gibt mit

$$\varphi_x(b) = xbx^{-1} = a.$$

Die erste Erklärung folgt dem mathematischen Streben nach Verdichtung von Informationen: Sie gibt den eingeführten Gruppenautomorphismen vom Typ φ_x einen eigenen Namen und setzt zugleich fest, dass der Name ausschließlich für diese Abbildungen reserviert sein soll. Diese beiden Informationen werden in einer einzigen Formulierung zusammengefasst. Das geht nur um den Preis, dass die natürliche Reihenfolge der Gedanken umgedreht wird.

Anschließend wird gezeigt, dass die Abbildung, die jedem Gruppenelement den induzierten inneren Automorphismus zuordnet, selbst ein Homomorphimus ist:

Wir erhalten einen Homomorphismus $\alpha_G : G \to Aut(G)$ durch $a_G(x) := \varphi_x$.

Es ist also die Rede von einem Homomorphismus, dessen Bildbereich aus Automorphismen besteht. Das erfordert in den folgenden Überlegungen die genaue begriffliche und darstellungstechnische Unterscheidung von Betrachtungsebenen, in denen es jeweils um Homomorphismen geht. Zum Beweis ist zu zeigen, dass $\alpha_G(xy) = \alpha_G(x) \circ \alpha_G(y)$ gilt. Dies geschieht durch Übergang zu den definierenden Termen. Damit ergibt sich die Gleichung $\varphi_{xy} = \varphi_x \circ \varphi_y$, deren Gültigkeit nun zu beweisen ist. Da zwei Abbildungen identisch sind, wenn sie auf jedes Element des Definitionsbereiches gleich wirken, ist schlussendlich die Beziehung $\varphi_{xy}(z) = \varphi_x \circ \varphi_y(z)$ zu zeigen. Diese ist wohl zu unterscheiden von der bereits bewiesenen Beziehung $\varphi_x(yz) = \varphi_x(z)\varphi_y(z)$. In beiden Gleichungen kommen dieselben Buchstaben vor, und doch machen sie ganz unterschiedliche Aussagen. In der ersten geht es um die Verkettung von zwei Abbildungen, in der zweiten um die innere Gesetzmäßigkeit einer einzigen Abbildung. In allen Überlegungen greifen verschiedene Aspekte des mathematischen Abbildungsbegriffs ineinander. Eine Abbildung als Zuordnung zwischen Elementen von Mengen ist einerseits ein komplexes Gebilde mit einer eigenen „Infrastruktur", andererseits wird sie als geschlossenes Objekt betrachtet, das selbst wieder zum Bildbereich einer Abbildung gehören oder Element einer algebraischen Struktur sein kann.

Zum Schluss wird noch der Kern von α_G betrachtet und gezeigt, dass er genau die Elemente von G enthält, die mit allen Gruppenelementen kommutieren. Auch für diesen Beweis sind zahlreiche Umdeutungsvorgänge notwendig.

$$\begin{aligned} Ker\, a_G &= \{x \in G | \varphi_x = id_G\} = \left\{x \in G | xyx^{-1} = y \text{ für alle } y \in G\right\} \\ &\Longleftrightarrow Ker\, a_G = \{x \in G | xy = yx \text{ für alle } x \in G\} \end{aligned}$$

Am Übergang von der Gleichung $xyx^{-1} = y$ zu $xy = yx$ lassen sich Grundzüge des diagrammatischen Schließens im Sinne von Peirce (s. o.) demonstrieren. Die Umformungsmöglichkeit kann durch direktes Erkennen oder durch spielerische Veränderung der ersten Gleichung (Multiplikation mit dem Faktor x von rechts) erschlossen werden. So gelangt man durch das Experimentieren mit Darstellungen zu neuen Informationen, die aber an die Regeln des Darstellungssystems (hier: die Gruppenaxiome) gebunden bleiben.

Das Beispiel sollte zeigen, welch ein vielfältiges Geflecht aus gedanklichen Vollzügen und kollateralem Wissen für das Lesen mathematischer Lehrtexte erforderlich ist, damit die Zeichen „Werkzeuge des Geistes" (s. o.) werden. Erst wenn hierin ein Mindestmaß an Geläufigkeit erreicht ist, wird es vermutlich möglich, die Ökonomie mathematischer Darstellungen zu würdigen. Ein Beispiel für diese Ökonomie ist die folgende Beschreibung für die Transformation einer Abbildungsmatrix bei Basiswechsel:

$$M_{B'}^{B'}(f) = T_{B'}^{B} \circ M_{B}^{B}(f) \circ T_{B}^{B'}.$$

2.2.2 Der Perspektivenunterschied zwischen Experten und Novizen

Ein generelles Problem des Lehrens von Mathematik (wohl des Lehrens überhaupt) ist der grundlegende Perspektivenunterschied zwischen Experten und Novizen. Lehrende reden und handeln zumeist aus einer fachsystematisch orientierten Langzeitperspektive, in die Lernende erst hineinwachsen müssen. Wie die Ausführungen im ersten Abschnitt zeigen sollten, ist der Perspektivenunterschied zwischen den Fachkulturen an Schule und Hochschule groß. Das äußert sich bereits in der lokalen Gestaltung von Lehrtexten, hat aber noch weiter reichende Ausprägungen. Diese seien im Folgenden an drei Aspekten entfaltet.

Die Elaboriertheit von Begriffen und Darstellungssystemen
Die Mathematik verwendet Schlüsselbegriffe und Darstellungssysteme, die sich in einer langen Geschichte herausgebildet haben. In ihrer ausgereiften Fassung markierten sie Meilensteine in der Wissenschaftsgeschichte, ihr Anwendungsbereich ist weit reichend und ihre fachinterne Bedeutung umfassend. Wir betrachten dazu drei repräsentative Beispiele.

Beispiel 1 – die algebraische Formelsprache Die elementare algebraische Formelsprache war eine Errungenschaft der frühen Neuzeit, die sich im Europa des 16. Jahrhunderts herausbildete.

> An der „Schnittstelle“ der orientalischen und der griechischen Traditionslinien, dort also, wo das Wissen um Verfahrensweisen in den Rang eines begründeten wissenschaftlichen Wissens gehoben wird, entsteht eine für die neuzeitliche Wissenschaft konstitutive und vorbildlose Neuerung: *die mathematische Formel* (Krämer 1988, S. 72).

Hiermit gelingt es erstmalig, allgemein gültige Beziehungen zwischen Zahlen und Größen symbolisch zum Ausdruck zu bringen und operativ handhabbar zu machen. Dieses Werkzeug hat sich aus antiken Wurzeln in vielen Jahrhunderten langsam und schrittweise entwickelt und ist für die Hochschulmathematik fundamental. Seine verständige Handhabung und der Erwerb von „structure sense“ (s. o.) erfordern ebenfalls einen langen kognitiven Anlauf und viel Übung. Dabei ist ein Mindestmaß an mentaler Investition vermutlich nicht zu unterschreiten, auch wenn der individuelle Lernprozess deutlich kürzer verläuft als die geschichtliche Entwicklung. Zwischen Experten und Novizen besteht meist ein großer Abstand in Bezug auf Erfahrung und Geläufigkeit im Umgang mit dieser Sprache und ihrer Weiterentwicklung.

Beispiel 2 – der Funktionsbegriff Das Denken in Zuordnungen und Abhängigkeiten ist ebenfalls in den antiken und orientalischen Traditionslinien nachweisbar. Der Name „Funktion“ tritt erstmalig bei Leibniz auf, mit Euler wird der Funktionsbegriff für die Analysis zentral (Sonar 2011, S. 460). Mit Hilfe von Funktionen kann ein großes Spektrum von Phänomenen mathematisch erfasst werden. Dieser Begriff wird in der Hochschulmathematik in voller Allgemeinheit (n Variable) grundlegend verwendet.

Beispiel 3 – der Vektorbegriff Der Vektorbegriff ist noch deutlich jünger als der Funktionsbegriff. Das Wort Vektor tritt in der Mathematik nicht vor der Mitte des 19. Jhs. auf (Scriba und Schreiber 2005, S. 432). Mit Hilfe dieses Begriffes gelang es, ganz unterschiedliche Phänomene wie Kräfte in der Physik oder Bewegungen in der Geometrie der algebraischen Berechnung zugänglich zu machen. Heute liefert die Theorie der Vektorräume ein weitreichendes Beschreibungsmittel in der Mathematik. Die Lineare Algebra der Hochschulmathematik löst sich in der Regel von Anfang von der Bindung an den dreidimensionalen Anschauungsraum.

Der Erwerb solcher Begriffe vollzieht sich im Spannungsfeld zwischen „Individualität der Erscheinungen und Abstraktion der Formen“ (Courant und Robbins 1992, S. IXX). Ihr Verständnis muss sich an Beispielen ausbilden und von dort zu allgemeinen Beschreibungen vordringen. Experten verfügen über einen großen Erfahrungshintergrund im Umgang mit Beispielen und können sich deshalb sicher auf der abstrakt-begrifflichen Ebene bewegen, Novizen müssen einen solchen Erfahrungsschatz erst erwerben und sind bei abstrakten theoretischen Erörterungen oft ratlos, wenn keine Anschauungshilfen bereitstehen.

Das Ideal der theoretischen Geschlossenheit

Zum Stilempfinden der Mathematik gehört das Streben nach einem konsistenten und lückenlosen Theorieaufbau, der mit möglichst wenigen Grundannahmen beginnt und alle Begriffe und Aussagen hierauf zurückführt. Dabei werden Aussagen und Verfahren oft in eine möglichst allgemeine Form gefasst. Dadurch entsteht eine Darstellung des Sachgebietes, die dessen genetische Entwicklung nicht mehr erkennen lässt und aus der Sicht von Novizen manche befremdliche Artikulationsform enthält. Dazu betrachten wir einige Beispiele, die sowohl die Grundlegung wie den Aufbau der Theorie betreffen.

Grundlegung Die Formulierung von Axiomensystemen steht wissenschaftsgeschichtlich am Ende einer langen Entwicklung. Sie fassen den Kern, aus dem die gesamte Theorie erwächst. Für Novizen ist es oft fraglich, wie solche Axiomensysteme zustande kommen und warum sie gerade so aussehen. Unklar bleibt insbesondere, warum bestimmte Axiome überhaupt notwendig sind, zum Beispiel die anschaulich evidente Forderung, dass in einem Vektorraum über einem Körper K mit Einselement 1_K für jeden Vektor x gilt: $1_K x = x$.

http://www.springer.com/978-3-658-10260-9

Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase
Herausforderungen und Lösungsansätze
Hoppenbrock, A.; Biehler, R.; Hochmuth, R.; Rück, H.-G. (Hrsg.)
2016, XIII, 722 S. 124 Abb., 21 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-10260-9