

Wir stellen wichtige Notationen sowie Beweistechniken zusammen. Um den Leser auf das in den Kap. 3 und 5 vorgestellte Software-System Sage einzustimmen, geben wir vereinzelt bereits an, wie die behandelten Konzepte in diesem System reflektiert werden.

2.1 Grundbegriffe der mathematischen Logik

Sowohl mathematische Schlussweisen als auch Computer-Programme beruhen auf den Grundprinzipien der mathematischen Logik. Die Formalisierung dieser logischen Elemente geht maßgeblich auf die Abhandlung „The mathematical analysis of logic“ von George Boole (1815–1864) aus dem Jahr 1847 zurück. Wir stellen einige Begriffe, Symbole und Sprechweisen bereit, die zur Formulierung mathematischer Sachverhalte dienen und sowohl in mathematischen als auch in computerorientierten Kontexten häufig verwendet werden.

Aussagenlogik Gegenstand der *Aussagenlogik* ist die Untersuchung einfacher logischer Verknüpfungen zwischen elementaren Aussagen. Hierbei versteht man unter einer *Aussage* ein sprachliches oder auf mathematischen Zeichen aufgebautes Gebilde, dem man entweder den Wahrheitswert *wahr* oder den Wahrheitswert *falsch* zuordnen kann. Wir verwenden für diese beiden Wahrheitswerte die Abkürzungen *w* und *f*.

Beispiel 2.1

1. In der Mathematik kommen Aussagen häufig in der Form von Gleichungen vor. So ist die Gleichung (in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$) $3^2 = 9$ eine wahre Aussage. Beachten Sie, dass etwa

$$3^2$$

keine Aussage ist, sondern ein *Ausdruck* oder *Term*.

2. „17 ist eine Primzahl“ ist eine wahre Aussage.

3. „ $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“ ist eine falsche Aussage. Wir kommen bei der Behandlung von Beweistechniken in Beispiel 2.6 hierauf zurück.
4. Die *Goldbachsche Vermutung* „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden“ ist entweder eine wahre oder eine falsche Aussage. Bis heute ist jedoch unbekannt, welchen der beiden Wahrheitswerte die Aussage hat.
5. Bei dem *Russellschen Paradoxon* „Dieser Satz ist falsch.“ handelt es sich nicht um eine Aussage, da der Satz weder den Wahrheitswert *wahr* noch den Wahrheitswert *falsch* haben kann.¹
6. Die *Legendresche Vermutung* „Für jede natürliche Zahl n gibt es mindestens eine Primzahl zwischen n^2 und $(n + 1)^2$ “ ist auch eine Aussage, deren Wahrheitswert bis heute unbekannt ist.

Durch Verknüpfung von Aussagen entstehen neue Aussagen, deren Wahrheitswerte sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen ergeben. Wir stellen einige gebräuchliche Verknüpfungen zusammen. Für zwei Aussagen A und B bezeichnet

$\neg A$	die <i>Negation</i> von A ,	
$A \wedge B$	die <i>Konjunktion</i> von A und B	(„ A und B “),
$A \vee B$	die <i>Disjunktion</i> von A und B	(„ A oder B “),
$A \implies B$	die <i>Implikation</i>	(„wenn A gilt, so gilt B “),
$A \iff B$	die <i>Äquivalenz</i> von A und B	(„ A gilt genau dann, wenn B gilt“).

Für die Negation $\neg A$ existiert auch die Schreibweise $\overline{A}$. Die Verknüpfungen werden durch folgende Wahrheitstabelle beschrieben:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \implies B$	$A \iff B$	$\neg A$
f	f	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	f	w
w	w	w	w	w	w	f

Beispiel 2.2 Bezeichnet A die Aussage „17 ist Primzahl“ und B die Aussage „ $\sqrt{2}$ ist rational“, dann ist $A \vee B$ eine wahre Aussage und $A \implies B$ eine falsche Aussage.

Quantoren Tritt in einer Formulierung eine Variable auf (z. B. $x \geq 3$), dann kann sie durch einen *Quantor* „gebunden“ werden. Der *Allquantor* $\forall$ und der Existenzquantor $\exists$ haben die folgende Bedeutung:

$\forall$ „Für alle ... gilt ...“

$\exists$ „Es existiert (mindestens) ein ... mit ...“.

¹ Mit Paradoxa dieser Art hat Bertrand Russell (1872–1970) zu Beginn des 20. Jahrhunderts die zuvor angenommene These, dass allen Sätzen ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann, tief erschüttert.

Beispiel 2.3 Die Aussage „ $\forall x \in \mathbb{R} \ x \geq 3$ “ ist eine falsche Aussage, die Aussage „ $\exists x \in \mathbb{R} \ x \geq 3$ “ hingegen hat den Wahrheitswert w. Ferner ist die Aussage „ $\forall x \in \mathbb{R} \ (x \geq 3 \implies x^2 \geq 9)$ “ eine wahre Aussage, da für jede konkrete Wahl einer reellen Zahl x die Implikation „ $x \geq 3 \implies x^2 \geq 9$ “ eine wahre Aussage ist.

Beispiel 2.4 In dem ab Kap. 3 ausgiebig verwendeten Software-System Sage liefert beispielsweise die Eingabe

```
5 > 3
```

die Ausgabe `True`.

2.2 Beweistechniken

Unter einem *Beweis* versteht man eine Folge mathematisch korrekter Schlussfolgerungen, aus denen auf die Gültigkeit einer zu beweisenden Aussage geschlossen werden kann. Beachten Sie hierbei, dass ein mathematischer Satz oft aus Voraussetzungen und Behauptungen besteht. Die Argumentation in einem Beweis muss die Gültigkeit der Behauptungen in *all* den Situationen nachweisen, in denen die Voraussetzung gilt.

In den vergangenen Abschnitten haben wir bereits einige nützliche Schreibweisen kennengelernt. Um anzudeuten, dass vom computerorientierten Standpunkt der Beweis einer Aussage der Berechnung des Wahrheitsgehaltes einer Aussage entspricht, stellen wir noch einmal die Schreibweisen für einige Verknüpfungen von Aussagen zusammen, ergänzt um die Umsetzung in Sage.

Operation	Schreibweise	Sage
Konjunktion	$A \wedge B$	<code>and</code>
Disjunktion	$A \vee B$	<code>or</code>
Negation	$\neg A$	<code>not</code>

In Sage kann die Äquivalenz zweier Ausdrücke A und B mittels `A == B` ausgedrückt werden und die Implikation $A \implies B$ durch `not(A) or B`.

Beispiel 2.5 In diesem und späteren Sage-Beispielen sind auf der rechten Seite die jeweiligen Ausgaben angegeben.

<code>7 > 5</code>	<code>True</code>
<code>True or False</code>	<code>True</code>
<code>False == True</code>	<code>False</code>

Wir betrachten einige Beweistechniken. Bei einem *direkten* Beweis startet man von den gegebenen Voraussetzungen und überführt diese durch eine Folge von Schlussfolgerungen in die zu zeigende Aussage. Wir werden diesen Beweistyp beispielsweise bei Satz 2.11 weiter unten sehen.

Ein *indirekter Beweis* beruht auf der Tatsache, dass für zwei Aussagen A und B gilt:

$$A \implies B \text{ genau dann, wenn } \neg B \implies \neg A.$$

Hiermit eng verwandt ist der *Beweis durch Widerspruch*. Dieser beruht auf der Idee, dass eine Aussage B auf jeden Fall dann gilt, wenn aus der Aussage $\neg B$ ein Widerspruch hergeleitet werden kann.

Beispiel 2.6 Es soll folgende Behauptung gezeigt werden:

$$\sqrt{2} \text{ ist irrational (d. h. } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{).}$$

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und führen diese Aussage zum Widerspruch.

Im Fall $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ existieren teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Durch Quadrieren folgt $p^2 = 2q^2$, so dass p^2 gerade ist. Dann ist aber auch p gerade, d. h., p ist von der Form $p = 2t$ mit $t \in \mathbb{N}$. Es folgt $4t^2 = 2q^2$, also $2t^2 = q^2$, so dass aus dem gleichen Grunde wie zuvor auch q gerade ist. Damit liegt ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q vor.

Vollständige Induktion Das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* ist in der Mathematik unerlässlich. Wir werden es beispielsweise bei der Untersuchung von Algorithmen einsetzen.

Zu jeder natürlichen Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Eine Strategie, um die Richtigkeit der Aussage *für alle* $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, ist die folgende: Alle Aussagen $A(n)$ sind richtig, wenn die nachstehenden beiden Eigenschaften bewiesen werden können.

1. $A(1)$ ist richtig (*Induktionsanfang*).
2. Für jedes n , für welches $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig (*Induktionsschluss*).

Das Induktionsprinzip reflektiert also einen „Dominoeffekt“. Um alle Steine einer Kette von Dominosteinen umzuwerfen, muss dafür gesorgt werden, dass der erste Stein umfällt (Induktionsanfang) und jeder beliebige Stein den darauffolgenden umwirft (Induktionsschluss).

Beispiel 2.7 Ein klassisches Beispiel lautet: Für jede natürliche Zahl n gilt die Aussage

$$A(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1). \quad (2.1)$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ stimmt die Formel.

Induktionsschluss: Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $A(n)$ (*Induktionsannahme*) auch die Aussage $A(n + 1)$ gilt. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n + 1) \\ &\stackrel{\text{Ind.-Annahme}}{=} \frac{1}{2}n(n + 1) + (n + 1) \\ &= \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \end{aligned}$$

Mit der Kurznotation für Summen $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n$ lässt sich (2.1) als $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n + 1)$ schreiben.

Bemerkung 2.8 Tatsächlich lässt sich diese spezielle Summenformel noch eleganter beweisen. Carl-Friedrich Gauß (1777–1855) löste als Kind die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, indem er die 50 gleichen Summen $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots, 50 + 51$ bildete. Allgemein liefert diese Idee für gerade n die Schlussweise $1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$ und für ungerade n analog $1 + \cdots + n = \frac{1}{2}(n - 1)(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Beispiel 2.9 Es soll die Formel $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1}{4}1^2(1 + 1)^2$.

Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$): Unter der Induktionsannahme, dass die Aussage für den Index n richtig ist, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n + 1)^3 \\ &\stackrel{\text{Ind.-Ann.}}{=} \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^3 \\ &= \frac{(n + 1)^2}{4}(n^2 + 4n + 4) = \frac{1}{4}(n + 1)^2(n + 2)^2. \end{aligned}$$

Die Aussage ist also auch für den Index $n + 1$ richtig, so dass der Induktionsschluss gezeigt ist.

Wir beobachten, dass die vollständige Induktion beim Nachweis einer Summenformel erfordert, die nachzuweisende Formel bereits vorab zu kennen. Es erhebt sich die weiterführende Frage:

Wie sehen für gegebenes k die Koeffizienten einer Summenformel für die k -ten Potenzen aus?

Wir nutzen diese Frage für einen ersten Vorgeschmack auf die Rechnernutzung. Die gängigen Summenformeln sind in Sage implementiert, auch für symbolischen (d.h., variablen) Endindex. In Sage liefert die mit einer Variablendefinition beginnende Kommandosequenz

```
var('k')
sum(k^2, k, 1, n)
```

die Ausgabe

```
1/3*n^3 + 1/2*n^2 + 1/6*n
```

und verrät damit $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Für die Summe der fünften Potenzen ergibt sich mittels `sum(k^5, k, 1, n)` die Formel $\frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$. In Abschn. 9.2 werden wir untersuchen, wie die Koeffizienten der Summenformeln für höhere Grade aussehen.

2.3 Mengen

Den Begriff der Menge wollen und können wir hier nicht im strengen mathematischen Sinne definieren. Er dient uns nur als Hilfsmittel für eine möglichst kurze Notation konkreter Mengen. In dieser Situation ist es nützlich und üblich, die Mengendefinition von Georg Cantor (1845–1918), dem Begründer der Mengentheorie, zum Auftakt seiner berühmten Abhandlung [Can95] aus dem Jahr 1895 zu zitieren: *Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.*²

Eine Menge ist *definiert* oder *gebildet*, wenn angegeben ist, welche Elemente in ihr enthalten sind. Das kann durch explizite Aufzählung der in ihr enthaltenen Elemente erfolgen, z. B. $\{2, 3, 5, 7, 11\}$, oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft, z. B. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ Primzahl}\}$. Wenn das Bildungsgesetz klar ist, können auch unendliche Aufzählungen verwendet werden, z. B. $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$. Oft verbirgt sich hinter einer solchen unendlichen Aufzählung eine vollständige Induktion (siehe Abschn. 2.2). Die *Kardinalität* $|M|$ einer Menge M bezeichnet die Anzahl der Elemente von M ; im Falle unendlicher Mengen schreibt man $|M| = \infty$.

Beispiel 2.10 Einige Beispiele wichtiger Mengen und ihrer üblichen Bezeichnungen sind die *Menge der natürlichen Zahlen* ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$), die *Menge der ganzen Zahlen* ($\mathbb{Z}$), die *Menge der rationalen Zahlen* ($\mathbb{Q}$) oder die *Menge der reellen Zahlen* ($\mathbb{R}$), die in den voranstehenden Abschnitten auch bereits aufgetreten sind. In

² In dieser Definition steckt eine gewisse Unschärfe. Je nach Art der Formalisierung kann diese bei gewissen Mengenbildungen zu Widersprüchen führen, zum Beispiel bei der *Russellschen Antinomie*: die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.

den grundlegenden Analysis-Vorlesungen und -Büchern werden die fundamentalen Eigenschaften dieser Mengen sehr intensiv untersucht (zum Beispiel Ring- bzw. Körperstruktur, Anordnung von $\mathbb{R}$). Einige der für das vorliegende Buch relevanten Analysis-Aspekte sind in Kap. 12 zusammengestellt.

Eine Menge A heißt eine *Teilmenge* einer Menge B , wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. Unter Verwendung des Symbols $:\Longleftrightarrow$, das den Wahrheitswert des Ausdrucks auf der linken Seite durch den Wahrheitswert auf der rechten Seite definiert, kann diese Definition formal auch mittels

$$A \subseteq B :\Longleftrightarrow \forall x \in A (x \in A \implies x \in B)$$

notiert werden. Zwei Mengen sind *gleich*, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d. h.,

$$A = B :\Longleftrightarrow (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A).$$

Mit den folgenden Operationen lassen sich zwei Mengen A und B verknüpfen:

$$\begin{aligned} A \cup B &:= \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{(Vereinigung)}, \\ A \cap B &:= \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{(Durchschnitt)}, \\ A \setminus B &:= \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\} && \text{(Differenz)}, \\ A \times B &:= \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\} && \text{(kartesisches Produkt)}. \end{aligned}$$

Wir stellen einige Regeln für Operationen auf Mengen zusammen.

Theorem 2.11 *Für beliebige Mengen A, B, C gelten die folgenden Eigenschaften.*

$$\begin{aligned} \text{Assoziativität:} \quad & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \\ \text{Kommutativität:} \quad & A \cup B = B \cup A, \\ & A \cap B = B \cap A. \\ \text{Distributivität:} \quad & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Beweis Wir begnügen uns hier damit, die vorletzte Aussage zu zeigen. Zu zeigen ist: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Ist $x \in A \cap (B \cup C)$, dann gilt $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Es folgt $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$, je nachdem, ob $x \in B$ oder $x \in C$. Insgesamt ergibt sich $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Den Beweis der anderen Inklusion erhalten wir dadurch, dass die soeben ausgeführten Beweisschritte rückwärts betrachtet werden. $\square$

Die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M , $\mathcal{P}(M) = \{T : T \subseteq M\}$.

Beispiel 2.12 Für $A = \{a, b, c\}$ ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Für eine endliche Menge M besteht $\mathcal{P}(M)$ aus $2^{|M|}$ Elementen, so dass man die Potenzmenge gelegentlich auch mit 2^M abkürzt.

Zur Voreinstimmung auf Kap. 3 des Buches ein weiterer kleiner Vorgriff auf das Sage-System: Sage kennt den Datentyp einer Menge (engl. Set).

```
S = Set([1,3,3,5,7])
5 in S                                True
S.intersection(Set([3,7,23]))        3, 7
```

Hierbei prüft `in` das Enthaltensein eines Elements in einer Menge und `intersection` bestimmt eine Schnittmenge.

2.4 Relationen

Eine *binäre Relation* R (kurz: *Relation*) zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$. Im Falle $A = B$ spricht man von einer Relation auf der Menge A . Eine Relation auf A heißt

- *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt $(a, a) \in R$.
- *symmetrisch*, wenn für $a, b \in A$ mit $(a, b) \in R$ stets folgt, dass $(b, a) \in R$.
- *transitiv*, wenn für $a, b, c \in A$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ stets folgt, dass $(a, c) \in R$.

Beispiel 2.13

a) Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert

$$(a, b) \in R :\Longleftrightarrow a < b$$

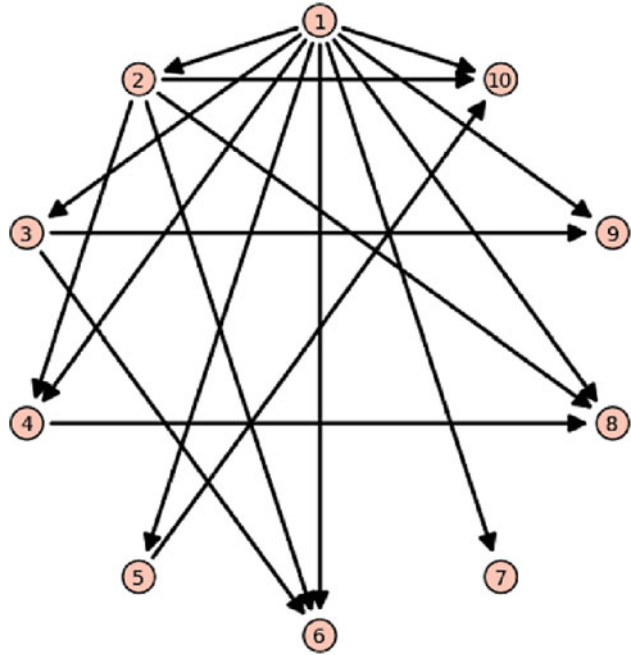
eine transitive Relation. R ist nicht reflexiv und nicht symmetrisch.

b) Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen:

$$(a, b) \in R \Longleftrightarrow b = m \cdot a \text{ mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Im Falle $(a, b) \in R$ sagen wir: a ist ein Teiler von b . Die Relation ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

c) Im Fall einer endlichen Menge A kann eine Relation auf A durch einen *Graphen* visualisiert werden; in Kap. 4.1 werden Graphen eingehender studiert. Von einem

Abb. 2.1 Relationsgraph

Element a führt genau dann eine Kante zu einem Element b , wenn $(a, b) \in R$. Für $A := \{1, \dots, 10\}$ zeigt Abb. 2.1 den Graphen zu der Relation

$$(a, b) \in R : \iff a \text{ ist ein Teiler von } b \text{ und } a \neq b.$$

Im Falle einer Relation, bei der ein Element a mit sich selbst in Relation steht, würde eine Kante von dem Element a zu sich selbst führen (*Schlinge*).

Eine Relation auf einer Menge A heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall schreiben wir für $(a, b) \in R$ auch $a \stackrel{R}{\sim} b$ oder kurz $a \sim b$, wenn R aus dem Zusammenhang klar ist.

Die Bedeutung einer Äquivalenzrelation R auf A liegt darin, dass man damit die Menge A in Teilmengen (Klassen) einteilen kann. Für jedes $a \in A$ ist die *Äquivalenzklasse* von a definiert als die Menge aller Elemente in A , die mit a in Relation stehen:

$$[a] := \{b \in A : a \stackrel{R}{\sim} b\}.$$

a heißt *Repräsentant* der Klasse $[a]$. Man beachte, dass jedes $b \in A$ mit $a \stackrel{R}{\sim} b$ als Repräsentant für $[a]$ Verwendung finden kann.

Beispiel 2.14

- a) Die Blutgruppen A, AB, B, 0 dienen zur groben Einteilung des Blutes einer Person. Auf einer Menge M von Personen erklären wir eine Relation durch

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ haben dieselbe Blutgruppe.}$$

In der Tat liegt eine Äquivalenzrelation vor. Durch die Äquivalenzklassen wird die Menge der Personen in vier Klassen eingeteilt.

- b) Auf der Menge der Studierenden im Hörsaal wird durch

$$x \sim y \iff x \text{ und } y \text{ haben am gleichen Tag Geburtstag}$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

- c) Auf der Menge aller endlichen Mengen wird durch

$$X \sim Y \iff X \text{ und } Y \text{ haben die gleiche Kardinalität}$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Lemma 2.15 Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A . Dann gilt:

1. Für $a, b \in A$ mit $a \sim b$ gilt $[a] = [b]$.
2. Für $a, b \in A$ gilt $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$. Das heißt, je zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt.

Beweis (1) Seien $a, b \in A$ mit $a \sim b$. Um zunächst $[a] \subseteq [b]$ zu zeigen, betrachte ein $z \in [a]$, d. h., $a \sim z$. Mit der Symmetrie und der Transitivität folgt $b \sim z$, also ist $z \in [b]$. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass aus der Voraussetzung $a \sim b$ und der Symmetrie von $\sim$ auch $b \sim a$ gilt. Der Beweis für $\subseteq$ lässt sich daher wörtlich – lediglich durch Vertauschung der Symbole a und b – auf $\supseteq$ übertragen.

(2) Es genügt zu zeigen: Falls $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, dann gilt $[a] = [b]$.

Sei $z \in [a] \cap [b] \neq \emptyset$. Dann gilt $a \sim z$ und $b \sim z$. Mit der bereits bewiesenen ersten Aussage folgt $[a] = [z]$ und $[b] = [z]$, insgesamt also $[a] = [b]$. $\square$

Eine *Partition* einer Menge X ist eine Menge Y nichtleerer Teilmengen von X , für die gilt, dass jedes Element von X in genau einem Element von Y enthalten ist. Sind die Elemente von Y mit den Elementen einer Menge I (*Indexmenge*) indiziert, d. h. $Y = \{Y_i : i \in I\}$, dann ist die Partitionseigenschaft gleichwertig zur Erfüllung der folgenden beiden Bedingungen:

1. $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ für $i \neq j$;
2. $\bigcup_{i \in I} Y_i = X$.

Einführung in die computerorientierte Mathematik mit
Sage

Theobald, T.; Ilman, S.

2016, IX, 195 S. 26 Abb., 13 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-10452-8