2 Die Unendlichkeit der Primzahlfolge – Euklids Beweis – Trick oder System?

2.1 Der Satz und sein Beweis

Im Buch IX der „Elemente des Euklid (um 300 v. Chr.; nach Proklos (410 - 485 n. Chr.) „jünger als die Schüler des Platon und älter als Eratosthenes und Archimedes“) steht als 20. Theorem:

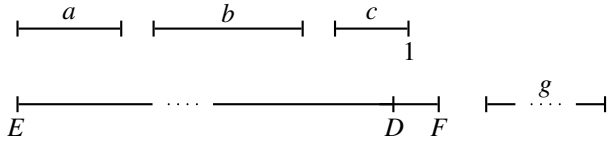
„Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgegebene Anzahl von Primzahlen.“

(Beweis)

„Die vorgelegten Primzahlen seien $a,\ b,\ c$. Ich behaupte, dass es mehr Primzahlen gibt als $a,\ b,\ c$.

Man bilde die kleinste von $a,\ b,\ c$ gemessene Zahl. Sie sei DE, und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist dann EF eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als $a,\ b,\ c$ gefunden, nämlich $a,\ b,\ c,\ EF$.

Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muss es von irgendeiner Primzahl gemessen werden; es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, dass g mit keiner der Zahlen $a,\ b,\ c$ zusammenfällt. Wenn möglich, tue es dies nämlich. $a,\ b,\ c$ messen nun DE; auch g müsste dann DE messen. Es misst aber auch EF. g müsste also auch den Rest, die Einheit DF, messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen $a,\ b,\ c$ zusammen; und es ist eine Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr als die vorgelegte Anzahl $a,\ b,\ c$ gefunden, nämlich $a,\ b,\ c,\ g$.“ (Euklid [3], S. 204 f.).



$$ED = a \cdot b \cdot c \qquad EF = a \cdot b \cdot c + 1$$

Abb. 2.1

Übrigens „misst“ heißt heute im Allgemeinen „teilt“ und die Einheit 1 ist bei Euklid keine Zahl, denn Zahlen sind ja definiert als Mengen von Einheiten.

Wahrscheinlich ist dieser Satz – wie das meiste Arithmetische in den „Elementen“ – nicht von Euklid selbst, sondern war bereits den Pythagoräern bekannt. Van der Waerden ([18] 1966, S. 323) attestiert dem Buch IX ein sehr hohes mathematisches Niveau,

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016
H.W. Winter, *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*, DOI 10.1007/978-3-658-10605-8_3

weil Euklid sich hier auf erstklassige Mathematiker stützen konnte. Wo der Verfasser der „Elemente“ das nämlich nicht könne, seien seine Texte weitaus schwächer.

„Eukleides ist vor allem Didaktiker, kein schöpferisches Genie“ ([18], S. 323). „Es ist merkwürdig, dass ein so hervorragender Didaktiker wie Eukleides manchmal so wenig logisch ist. Aber das gibt es auch sonst“ ([18], S. 324).

Wie dem auch sei, der Satz ist fürwahr erstaunlich und der Beweis von einer Brillanz, dass man immer nur über Didaktiker staunen kann, wenn sie sich beeilen, hervorzukehren, dass der Beweis „sehr einfach“ sei (so übrigens auch Wagenschein). Ob er der erste indirekte Beweis der Mathematik-Geschichte ist, wie Kropp vermutet ([9], S. 35), ist deshalb zweifelhaft, weil es im Hauptteil überhaupt kein indirekter Beweis ist, lediglich die Passage „Wenn möglich, …“ klingt nach indirektem Schließen. Wohl aber sind die meisten modernen Fassungen des Beweises indirekt angelegt, wo es dann immer in etwa heißt: Seien 2, 3, 5, …, p_n alle endlich vielen Primzahlen (und p_n also die größte), dann ist $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ usw.

Euklids Beweis ist sehr viel „besser“, weil konstruktiver als die modernen Fassungen. Euklid sagt nicht: Ich will beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt und das tue ich so, dass ich das Gegenteil dieser Behauptung ad absurdum führe. Er sagt vielmehr: Gebt mir irgendwelche Primzahlen und ich zeige euch, dass es mindestens noch eine Primzahl mehr als diese gibt. Dieser Haufen von Primzahlen kann wirklich ganz beliebig sein, der Anzahl nach, der Größe nach, es brauchen nicht die n ersten zu sein, noch müssen sie aufeinander folgen. Insofern ist der originale Euklidische Beweis nicht nur konstruktiver, sondern auch von höherer intellektueller Freiheit als seine modernen Abarten. Vielleicht kommt in der folgenden dialogischen Darstellung die wunderbare Gestalt des Beweises klarer zum Vorschein:

Opponent	**Proponent**
	Zu jeder mir vorgegebenen Menge von Primzahlen kann ich eine weitere konstruieren.
? 2, 3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$ ist ein Primzahl
? 2, 3, 7	$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ ist eine Primzahl
? 5, 7	$5 \cdot 7 + 1 = 36$ ist nicht Primzahl, aber enthält die Primzahl 3 als Teiler
? 5, 11, 13	$5 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 716$ ist keine Primzahl, aber enthält 2 (und 179) als Teiler
? a, b, c	$a \cdot b \cdot c + 1$ ist selbst Primzahl, dann fertig
? $a \cdot b \cdot c + 1$ nicht Primz.	enthält Teiler g und g ist Primzahl
? $g = a$ (oder $= b$ oder $= c$)	g teilt $a \cdot b \cdot c$ und g teilt $a \cdot b \cdot c + 1$, dann also auch g teilt **1**, g teilt 1 ist aber Unsinn, denn „g ist eine Zahl“ (d. h. größer als eine Einheit)

Eine besondere Feinheit dieses Beweises ist, dass das Konstruktionsverfahren für die neue Primzahl eigentlich mehr ein Existenznachweisverfahren ist; die neue Primzahl kann nur in einem „Fall“ mit $a \cdot b \cdot c + 1$ explizit angegeben werden, aber man weiß gar nicht, ob dieser „Fall“ vorliegt und braucht es auch nicht zu wissen.

Leider wissen wir überhaupt nichts darüber, wie ein Mensch erstmalig auf die Beweisidee gekommen ist. Zuerst erscheint sie wie ein Trick, nachträglich dann aber geradezu selbstverständlich und systematisch herausgearbeitet und das kann lähmend wirken.

Der Inhalt des Satzes ist nicht minder erstaunlich, besagt er doch, dass, obgleich die Primzahlen immer rarer werden, je weiter man in der Zahlenreihe fortschreitet und obgleich man beliebig große Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen nachweisen kann, es immer wieder weitere Primzahlen geben muss. Und dass dies wirklich so ist, hängt nicht von konkreten empirischen Überprüfungen ab, sondern wird einzig und allein garantiert von einer endlichen Überlegung: Es muss denknotwendig so sein. So ist es kein Wunder, dass Menschen hierbei ob der Kraft menschlichen Denkens ins Schwärmen geraten.

Nicht minder faszinierend scheint es aber auch zu sein, immer größere Primzahlen nun tatsächlich auch numerisch aufzustöbern, bei riesigen Zahlen ein hartes Geschäft und ohne Computer ein aussichtsloses. Da gibt es eine internationale Rekordjagd; 1985 fand ein Team aus Houston die Primzahl $2^{216091} - 1$ mit 65 050 Dezimalstellen (Führer [6] 1985, S. 62), doch dieser Rekord wird inzwischen gebrochen sein.

Nur anfügen möchte ich noch, dass Euler den Satz ganz anders bewiesen hat (über die Divergenz von $\sum \frac{1}{p}$) und noch ganz anders Polya (über Fermatsche Zahlen, Hardy-Wright [7] 1958, S. 15 f.).

2.2 Über den Bildungswert des Satzes

Inwieweit kann es dieser Satz mit seinem Beweis in der allgemeinbildenden Schule verdienen, von allen gelernt zu werden?

Eine Antwort kann natürlich nicht allein aus dem Satz selbst entnommen werden, so wenig wie die Frage: „Soll man sich ein Häuschen bauen?“ ohne Kenntnis des Kontextes beantwortet werden kann.

Dass überhaupt eine Antwort notwendig ist, sei ausdrücklich hervorgehoben, denn bei einer Konzeption des entdeckenden Lernens, wie sie mir vorschwebt, kann auf keinen Fall die Frage nach dem, *was* warum gelernt werden soll, ausgespart werden.

In der traditionellen Volksschule mit ihrem vorherrschenden Selbstverständnis als der Schule für den 3. Stand, die vor allem einige als lebenswichtig angesehene Fertigkeiten und ein schlichtes Weltbild vermitteln sollte, wurde (und wird) die Beschäftigung mit einer so lebensfern erscheinenden Angelegenheit wie Primzahlen als nicht rechtfertigbar betrachtet. Abgesehen von einigen Bemühungen um Teilbarkeitsregeln im Zusammenhang mit Rechenproben und evtl. von der Beschäftigung mit Primfaktor-Zerlegung, kgV und ggT im Zusammenhang mit der Bruchrechnung gab es (und gibt es) kaum eine Einlassung auf Zahlentheoretisches. Speziell: „Der euklidische Nachweis, dass die Zahl der Primzahlen unendlich groß ist, findet sich meines Wissens in keinem Rechenbuche“, resümiert

Lietzmann [12] (1912, S. 60). Der große Reformer Johannes Kühnel erwähnt Primzahlen mit keinem Wort, Fettweis empfiehlt zahlentheoretische Aufgaben als Denktraining.

Im Zuge der New-Math-Reform gab es kurzfristig eine enorme Hochschätzung und Ausbreitung zahlentheoretischer Inhalte, die jedoch mitunter zum Einüben der Mengensprache missbraucht wurden und heute wieder erheblich eingeschränkt sind.

Im Mathematikunterricht des traditionellen und heutigen Gymnasiums spielen zahlentheoretische Inhalte in aller Regel aber auch nur eine nachgeordnete und dienende Rolle im „Hauptstoff" der 5./6. Klasse. Lediglich im Hessischen Bildungsplan von 1957 wurde für die Oberstufe altsprachlicher Gymnasien u. a. auch das Thema „Über Primzahlen und Euklids Beweis für das Nichtabbrechen ihrer Folge" empfohlen, um so „an einzelnen Problemen das Wesentliche des mathematischen Denkens gründlich und bildend bewusst zu machen" und „philosophische Vertiefung" anzustreben (Lenné [11], S. 312 f.).

Demgegenüber heißt es bei Wagenschein ([19] 1980, S. 74): „Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, dass die Reihe der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen lässt er erfahren, was es heißt, mathematisch zu denken. Für die überhaupt dafür Empfänglichen ist das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergessliches Erlebnis." Wieso dieses „Stück" unentbehrlich ist, wird von Wagenschein nicht näher analysiert. Vielmehr erfolgt die ausführliche Schilderung einer von ihm selbst durchgeführten 5-stündigen Unterrichtsreihe an einer Paul-Geheeb-Schule in der Schweiz mit 14- bis 17-jährigen Schülerinnen und Schülern aus verschiedenen Ländern. Es handelt sich um eines der leider seltenen Dokumente über entdeckendes Lernen in einer besonders überzeugenden Ausgestaltung und man sollte diesen Eindruck nicht sogleich durch Verweis auf die besonderen Umstände zu relativieren suchen. Einige wesentliche Momente sind: die in Muße entwickelte Ausfaltung des Themas und des Problems, das Wechselspiel zwischen Vermutungen und ihrer Überprüfung, das Nachdenken über das eigene Tun (und dabei z. B. die Klärung des Verhältnisses Satz/Umkehrsatz), die Beharrlichkeit in der Problemverfolgung auch außerhalb der Mathematikstunden, die starke emotionale Beteiligung und der Nachhall über dieses Mathematik- (und Mensch!-) Erlebnis.

Eine Begründung für die Wichtigkeit, sogar Unentbehrlichkeit des Themas liefert Wagenschein somit indirekt und gewissermaßen empirisch: weil es nachweislich von ihm erfolgreich entdeckend-genetisch entwickelt, zum vollen Verständnis gebracht und als Exempel für grundsätzliche Einsicht in mathematische Denkweisen angesehen werden kann.

Stark verkürzt und verallgemeinert würde das Auswahlkriterium lauten: Ein Inhalt ist dann als Lehrgut aufzunehmen, wenn er „gut" (hier im Wagenscheinschen Sinne „sokratisch") zu unterrichten ist. Vermutlich wurde und wird weit mehr Lehrstoff als man glauben möchte nur deshalb in den Schulen behandelt, weil er im Sinne der vorherrschenden Lehrweisen behandlungsfreundlich ist, wenn dies auch nicht immer offen zugegeben wird. So ist es natürlich kein Zufall, dass bisher durchgehend solche Stoffe überwiegen, die sich in Rechnungen (Zins-, Differential-, …) darstellen, in Lehrgängen organisieren, in zahllosen Aufgaben einüben und gut prüfen lassen.

Tatsächlich ist die Lehrbarkeit ein durchaus lauteres und wichtiges Kriterium und zeigt nur, wie sehr Lehrinhalt und Lehr/Lernweisen aufeinander bezogen sind. Dabei ist aber

zu bedenken, dass beide alles andere als konstante und fest umrissene Größen sind. Und genau das ist der Punkt. Die Erweiterung der fachdidaktischen Kompetenzen und die Verfügbarkeit über leistungsfähigere Medien können z. B. zu einer veränderten Einschätzung eines potentiellen Lehrstoffes führen.

Konsequenterweise sollten Lehrpläne dem Lehrenden genügend Freiraum für eigene (auch ungesicherte) Unternehmungen belassen, eine ebenso alte wie (zunehmend) missachtete Forderung. Es kann auch eine problematische Forderung sein, nämlich wenn die Gefahr entsteht, dass der Mathematikunterricht in zwei Teile zerfällt: normalen Lernunterricht mit dem trockenen Haferbrot der üblichen Mathematik, interessanter Entdeckungsunterricht mit den Rosinen von der Art des Primzahlsatzes. So kann man übrigens Wagenschein tatsächlich (miss)verstehen. In jedem Falle haben wir einen noch eher zunehmenden Pensumdruck. Und das offenbar unaufhaltsame Vordringen der Computer verschärft die curriculare Situation zusätzlich. Umso dringlicher wird die Frage nach konsensfähigen Kriterien für die Auswahl, Akzentuierung und Detaillierung der Lehrinhalte.

Hier müsste nun eigentlich die ganze Problematik übergeordneter Lernziele oder anzustrebender Qualifikationen angesprochen werden (wobei man dann schon die Frage ausblenden würde, inwieweit Lerninhalte u. U. auch dann schon legitimiert sind, wenn sie den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten zur intellektuellen oder emotionalen Identifikation bieten, also etwa Spaß machen, ohne irgendwelche Verhaltensverbesserungen im Auge zu haben). Aus Platzgründen müssen einige Bemerkungen genügen. Wenn die allgemeinbildende Schule auf das spätere Leben (einschließlich weiterer Bildung und Ausbildung) im Sinne von Qualifizierung vorbereiten soll, dann ist (in materialer Hinsicht) ein Thema wie der Euklidische Primzahlsatz offenbar nicht zu rechtfertigen: Nirgendwo im privaten, beruflichen und öffentlichen Leben (von Nichtmathematikern) kann ein Wissen über Primzahlen zur Meisterung von Situationen verwendet werden. Insofern stimme ich der Kritik von Volk ([17] 1980, S. 71) an Wagenschein zu, allerdings mit zwei Einschränkungen. Erstens weise ich auf die neuere Kryptoanalyse hin, wo – wahrscheinlich zum ersten Mal in der Geschichte – u. a. auch Primzahlwissen zur Verschlüsselung von Nachrichten benutzt wird (etwa im RSA-System, Heider u. a. [8]) und Verschlüsselungsfragen hängen mit Datenschutz, Überwachung, Spionage u. a. äußerst heiklen Fragen zusammen, die jeden Bürger betreffen. Damit fordere ich nicht schon, in der Schule Codierungstheorie zu betreiben; es sei lediglich angemerkt, dass das Primzahlthema nicht für alle Zeit nur ein Schatz im berühmten Elfenbeinturm bleiben muss.

Zweitens ist nicht einzusehen, inwiefern ausschließlich auf die Meisterung von Situationen im späteren Leben hin erzogen werden soll. Das spätere Leben bietet doch wahrscheinlich nicht nur eine ununterbrochene Kette von Problemen, die eine beständige und auf Erfolg ausgerichtete angespannte Aktivität erfordern. Müssen wir nicht auch in die Fähigkeit zum gelassenen Betrachten, zur Kontemplation, ja zum Träumen zu erziehen versuchen? Das Getriebensein zum rastlosen Handeln und die Gier, auftauchende Probleme möglichst sofort zu erledigen (zu erschlagen!), können das Zusammenleben zu einer Qual werden lassen und zur Blindheit gegenüber Daseinsbestimmungen, die sich nicht als Probleme formulieren lassen, führen. Überdies: Die Fähigkeit, Mathematik anzuwenden, erfordert selbst schon „theoretische Distanzierung“ (griech.: théa = Anschauen, Schau) von der praktischen Sache. „Wer die Mathematik mit Erfolg anwenden will, muss Phan-

tasie besitzen und träumen können“, lässt Renyi ([14] 1967, S. 53) Archimedes zu König Hieron sagen. Kurz: Gerade wer auf die Praxis des Lebens vorbereiten will, darf „Theoretisches“ nicht einfach als zur „Rätselecke“ gehörig diskreditieren, wie das Volk ([17], S. 70) tut, auch wenn er andererseits „Muße-Erörterungen“ als zulässig (!) (S. 71) erachtet.

Soviel zur Wichtigkeit/Unwichtigkeit des Themas, was seinen Inhalt für die spätere Lebenspraxis angeht. Wagenschein rechtfertigt das Thema überhaupt nicht mit solchen „materialen“ Überlegungen. Für ihn gehört der Euklidische Primzahlsatz zu denjenigen „Stücken“, an denen im Sinne des exemplarischen Lehrens und Lernens grundsätzlich paradigmatisch (griech. parádeigma = Musterbeispiel) erfahren werden kann, was das Spezifische mathematischen Denkens ist. Es handelt sich um ein sogenanntes „Initiationsproblem“, ein Problem also, das ohne systematisches Vorwissen und ohne technische Fertigkeiten erfasst, im Wesentlichen selbsttätig gelöst und vor allem restlos verstanden werden kann. Auch, und gerade der Mathematik fernstehende, entmutigte, ja hasserfüllte Lernende sollen die Chance für einen Einstieg oder Wiedereinstieg dadurch erhalten, dass sie erleben können, wie sie allein mit den Mitteln alltäglichen Denkens erfolgreich sein können. Abgesehen von der nur empirisch überprüfbaren Frage, inwieweit ein solches Thema auch unter „normalen“ Schulverhältnissen eine initiierende Wirkung entfaltet, bleibt die Grundproblematik aller Ansätze der sogenannten formalen Bildung auch in dieser exemplarischen Variante bestehen: Die erhoffte Ausstrahlung von einem solchen Initiationsproblem auf den „üblichen“ Unterricht müsste erst noch belegt werden. Wenn eine Schülerin in Wagenscheins Unterricht bekennt: „Das ist wunderbar, aber Mathematik ist scheußlich“ (Wagenschein [19] 1980, S. 82), dann deutet das doch eher auf eine gerade nicht erwünschte Zweiteilung hin.

Noch zurückhaltender wird heute die weitere Transferhypothese betrachtet, die Lichtenberg so schön prägnant formuliert hat: „Was man sich selbst erfinden muss, lässt im Verstand die Bahn zurück, die auch bei anderer Gelegenheit gebraucht werden kann.“ (S. 145). Gerade darüber, inwieweit Begriffe und Prozeduren, die im Thema A (sogar wirklich verständig) erworben, auf die Bearbeitung des Themas B übertragen und dort − mehr oder weniger spontan − angewandt und verallgemeinert werden, wissen wir noch viel zu wenig. „Eine moderne Transfertheorie als psychologisches Kernstück der Lehr-Lern-Forschung ist nicht einmal in Umrissen erkennbar“ (Treiber/Weinert [16] 1982, S. 8). Vielmehr wird heute besonders stark betont, wie wichtig fachspezifisches Wissen und Können beim Lösen von Problemen ist, ja dass überhaupt Denkprozesse in hohem Maße bereichsbeschränkt sind. Andererseits wird durchaus Denktraining für möglich und erfolgversprechend gehalten. „Die Möglichkeiten und Grenzen der geistigen Entwicklung eines Menschen kann man zur Zeit wohl kaum besser abschätzen, als durch das Gelingen oder Misslingen des Versuches, die geistige Kapazität des entsprechenden Individuums zu erweitern. Dazu scheint uns ein Training komplexer Denkabläufe […] derzeit das am meisten geeignete Mittel zu sein. Auf diesem Gebiet hat aber die empirische Forschung erst zaghaft begonnen“ (Dörner [2], S. 142).

Fest scheint zu stehen, dass sich Transfereffekte kaum wie von selbst ergeben, das Transferieren muss offenbar mitgelernt werden. Darüber freilich erfahren wir bei Wagenschein nicht viel, seine Unterrichtsbeispiele − alle aus der vornehmen und reinen Mathematik − ruhen je in sich.

So kann die Frage, ob der Euklidische Primzahlsatz ein unentbehrliches Thema im Mathematikunterricht sein soll, erst überzeugend beantwortet werden, wenn wir es aus seiner Exklusivität befreien.

2.3 Aktivitäten am Sieb des Eratosthenes

Mir ist z. Zt. kein ergiebigerer Einstieg in unser Thema bekannt als das Sieb des Eratosthenes (von Kyrene 276 (?) - 194 (?) v. Chr.), das voller Ideen steckt, die mit den Augen des Körpers und Geistes aufgedeckt werden können. Die Schülerinnen und Schüler werden in den Stand gesetzt, geradezu empirische Mathematik zu betreiben (siehe auch Freudenthal [5] 1973, I, S. 138).

Die Schülerinnen und Schüler – und es können für den ersten Teil Grundschülerinnen und Grundschüler sein – erhalten eine (zunächst total unscheinbar wirkende) Zahlenliste und werden – bewusst vage– zum Beobachten angeregt: Fällt irgendetwas auf?

1	2	3		4	5	6
7	8	9		10	11	12
13	14	15		16	17	18
19	20	21		22	23	24
25	26	27		28	29	30
31	32	33		34	35	36
			⋮			
			(zunächst)	bis		
109	110	111		112	113	114
115	116	117		118	119	120

Erfahrungsgemäß wird in aller Regel zuerst festgestellt, dass in der 6. Spalte das „1×1 der 6“ steht.

Und wie ist es mit anderen „Reihen“? Auch schwächere Schülerinnen und Schüler können kleine Entdeckungen machen, etwa dass die Vielfachen der 3 (Dreierzahlen) in der 3. und 6. Spalte (und nur dort) stehen, und zwar schön sortiert nach ungeraden und geraden Dreierzahlen, dass die Sechserzahlen besondere (nämlich gerade) Dreierzahlen sind, dass die Zweierzahlen in der 2., 4. und 6. Spalte stehen, dass die Viererzahlen auch dort stehen, aber die Spalten mit geraden Nicht-Viererzahlen teilen müssen. „Die Viererzahlen springen hin und her“ usw. Und die Fünferzahlen? Auch die sind nicht wild verstreut, sie liegen auf „schrägen“ Linien; ebenfalls die Siebenerzahlen, jedoch „quer dazu“.

Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, durch farbige Linien 1×1-Reihen auszuzeichnen, z. B. für die Zweier-Reihe rot, die Dreier-Reihe blau. Für die Sechser-Reihe brauchen wir keine neue Farbe, die Sechserzahlen sind schon rot-blau gezeichnet.

Auch die Zahlen der Vierer-Reihe sind bereits (als besondere Zweierzahlen) gefärbt. Die Fünferzahlen werden mit grüner Linie, die Siebenerzahlen mit schwarzer markiert.

Soweit handelt es sich um eine einfache, wenn auch für manche Kinder aufregende und in jedem Falle vermehrte Einsicht intendierende Wiederholung des 1×1. Neue Sachverhalte werden aufgedeckt, u. a. von der Art: Von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer genau eine durch 3 teilbar, eine hinterlässt den Rest 1, die andere den Rest 2 bei Teilung durch 3.

Etwas anspruchsvoller ist die Frage nach der Begründung des Musters. Es ist wirklich eine schöne Entdeckung, wenn (9- bis 11-jährige) Kinder beobachten, welche Gesetzmäßigkeiten das Zahlenfeld beherrschen:

1 Schritt nach rechts bedeutet $+1$
1 Schritt nach unten bedeutet $+6$

(Bei Zeilenende: 1 Sprung zur nächsten Zeile nach vorn bedeutet $+1$). Wenn also irgendwo eine Fünferzahl steht, dann muss links unter ihr wieder eine stehen (oder in derselben Zeile 5 Schritte nach rechts) und so weiter.

Zum Primzahlbegriff kann man gelangen, wenn man dazu auffordert, das mit farbigen Linien gemusterte Zahlenfeld noch einmal genauer zu betrachten. Eventueller Anstoß: Ist überhaupt noch eine Zahl nicht bunt durchkreuzt? Außer 1 werden 11, 13, 17, 19, bis 113 genannt, erstaunlich viele noch und dazu in seltsamer Unordnung. Sie sind als übrig gebliebene zunächst negativ „definiert“: als Nicht-Zweier- und Nicht-Dreier- und Nicht-Fünfer- und Nicht-Siebener-Zahl. Dass alle diese Zahlen in gar keiner 1×1-Reihe („richtig“ d. h. ohne Faktor 1) vorkommen, ist damit noch keineswegs erkannt. Dazu bedarf es einer gesonderten und auf dieser Stufe recht anspruchsvollen Argumentation, etwa exemplarisch so: 79 (als stehengebliebene Zahl) ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar (sonst wäre sie ja mindestens einmal durchkreuzt worden). 79 kann aber auch durch keine andere Zahl teilbar sein; durch 4, 6, 8, 9, 10 nicht (weil sie dann ja doch schon durchkreuzt wäre). Durch 11 und größere Zahlen ist 79 aber auch nicht teilbar, weil in $11 \cdot * = 79$ der andere Faktor $*$ ja kleiner als 11 sein müsste. Das geht aber nicht, weil alle kleineren Zahlen als 11 nicht in 79 enthalten sind. Zur Einübung in diese komplizierte Argumentation mögen weitere Zahlen auf diese Art betrachtet werden.

Jetzt dürfte der Boden vorbereitet sein, die Bezeichnung „Primzahl“ einzuführen (Primzahlen sind unteilbare Zahlen, genauer: sind Zahlen, die man nur durch 1 oder sich selbst (ohne Rest) teilen kann o. ä.) und über Primzahlen zu sprechen, auch mit außermathematischen Beziehungen, z. B.: Was ist, wenn eine Schulklasse 17, 19 oder 23 Kinder hat? Welche Rolle spielen Primzahlen in unserem Münzsystem oder in unserem System der Zeitmaße? Die Primzahlen 2, 3, 5 … werden in unserer Sieb-Tabelle besonders gekennzeichnet. Was fällt weiterhin auf?

Eine der sich optisch fast immer aufdrängenden Beobachtungen ist: Außer 2 und 3 liegen sämtliche Primzahlen in der 1. und in der 5. Spalte. Das muss so sein, wenn wir an unsere Aktion mit den bunten Linien denken. Wir könnten eine Formulierung anstreben: Jede Primzahl über 3 ist entweder Vorgänger oder Nachfolger einer Sechserzahl.

Schauen wir uns die Sache noch genauer an. Manchmal ist nur der Vorgänger einer Sechserzahl eine Primzahl (z. B. **23** vor 24), manchmal nur der Nachfolger (**37** nach 36),

manchmal sind beide Nachbarn Primzahlen (**11** vor und **13** nach 12, **17** vor und **19** nach 18), man kann hier über Primzahlzwillinge sprechen. Kann es auch vorkommen, dass beide Nachbarn einer Sechserzahl *keine* Primzahlen sind? Erfahrungsgemäß wird dies (sogar von Mathematikstudenten) zunächst einmal verneint, offenbar weil der obige Satz (Jede Primzahl über 3 ist entweder Vorgänger oder Nachfolger einer Sechserzahl) stillschweigend umgekehrt wird. Tatsächlich ist auch erst 120 die kleinste Sechserzahl, die keine prime Nachbarschaft hat. Und die nächste solche Sechserzahl? Und was wäre, wenn doch immer eine Primzahl vor oder hinter einer Sechserzahl stünde?

Es ist offensichtlich, wie man von unserer (endlichen) Sieb-Tabelle aus auch zu anderen Primzahlfragen, speziell zu den üblichen Standardthemen gelangen kann, etwas zur Primzahlzerlegung (und von dort dann zu ggT und kgV): Außer 1 sind ja die Nichtprimzahlen gerade die, durch die mindestens eine bunte Linie verläuft. Die Anzahl der bunten Linien durch eine Zahl gibt die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren wieder, allerdings nicht ihre Vielfachheit. Letzteres kann man einbringen, indem man Doppel-, Dreifach-, ... Linien derselben Farben zulässt. So gehen z. B. durch 8 drei rote Linien, weil $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Will man mit jüngeren Schülerinnen und Schülern (5. bis 7. Klasse) noch weiter in Richtung Euklidischer Primzahlsatz fortzuschreiten versuchen, so bietet es sich zunächst an, den Zahlenraum über 120 hinaus zu erweitern. Wie findet man noch größere Primzahlen (als 113)?

121 ist die erste bisher noch nicht durchstrichene Zahl, die aber trotzdem keine Primzahl ist, $121 = 11 \cdot 11$. Ach ja, wir haben ja bisher nur $2 \cdot 11$, $4 \cdot 11$, $6 \cdot 11$, $8 \cdot 11$, $10 \cdot 11$ (rot), $3 \cdot 11$, $6 \cdot 11$, $9 \cdot 11$ (blau), $5 \cdot 11$, $10 \cdot 11$ (grün) und $7 \cdot 11$ (schwarz) durchkreuzt (manche davon auch mehrfarbig). Wir brauchen eine neue Farbe, etwa gelb, für die 11er-Reihe. Wie wird das Muster in unserem Feld aussehen? 2 Schritte nach unten und 1 Schritt nach links bedeutet $+11$, also liegen die Elferzahlen auf steileren Schräglinien von rechts oben nach links unten.

Es wäre ein ziemlich harter Test auf das Verständnis, wenn jetzt das Problem gestellt würde: Angenommen, wir hätten unsere Zahlentabelle mit den Linien aus jetzt 5 Farben sehr weit fortgesetzt. Bis zu welcher Zahl hätten wir dann alle Primzahlen gefunden?

Die Überlegung könnte sein: Durch das farbige Linienmuster sind genau alle diejenigen Zahlen durchkreuzt, die – als Produkt geschrieben – mindestens einen Faktor haben, der 2, 3, 5, 7, oder 11 ist. Die kleinste Zahl, die nicht durchkreuzt ist und doch auch keine Primzahl ist, ist daher $13 \cdot 13 = 169$. Also haben wir jetzt bis 168 alle Primzahlen gefunden. Das wird natürlich auch empirisch bestätigt (oder man geht überhaupt empirisch vor).

Und wenn wir alle Primzahlen bis 200, 500, gar bis 1000 suchen sollten? Dass wir „nur“ die Vielfachen von 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 durchzukreuzen brauchen (immerhin bräuchten wir doch 11 Farben!), um alle Primzahlen bis 1000 zu „bekommen“, dürfte etwas von der Kraft des Suchalgorithmus des Eratosthenes lebhaft vor Augen führen.

Es wird vielleicht zu aufwendig sein, die Zahlentabelle wirklich von Hand bis 1000 aufzustellen, obwohl es ein Stück authentischer Arbeit wäre, den Zahlensinn förderte und dabei das multiplikative Rechnung sinnvoll wiederholte und vertiefte. Speziell könnten das Chaos der Primzahlverteilung (mal eng – mal weit, ohne erkennbaren Grund) und ihre durchschnittlich abnehmende Dichte genauer studiert werden:

Zahlenabschnitt	Anzahl der Primzahlen
1 bis 100	25
1 bis 200	46
1 bis 300	62
1 bis 400	78
1 bis 500	95
1 bis 600	109
1 bis 700	125
1 bis 800	139
1 bis 900	154
1 bis 1000	168

Bis 100 sind $\frac{1}{4}$ der Zahlen Primzahlen, bis 1000 nur noch rund $\frac{1}{6}$ aller Zahlen. Es kann ein Schaubild der empirischen Zuordnung

$$n \to \text{Anteil Primzahlen bis } n$$

gezeichnet werden, das eine erste Ahnung vom sogenannten Primzahlsatz aufkommen lassen kann.

Erst jetzt dürften genügend Erfahrungen vorliegen, um die Frage nach dem Abbrechen oder Nichtabbrechen der Primzahlfolge als sinnvoll erscheinen zu lassen.

Für jüngere Schülerinnen und Schüler reicht, wenn die Frage überhaupt angeschnitten wird, der Verweis auf das praktizierte konstruktive Suchverfahren: Wir haben ja mit jeder neuen Farbe (Primzahl) uns weitere Zahlen mit neuen Primzahlen eröffnet.

Wenn man hier tiefer eindringen will, so ist es sinnvoll, die Frage aufzuwerfen, ob man vielleicht planmäßig Primzahlen ausrechnen kann. Das scheint unmöglich: Wie soll man auch 13 oder 37 oder 97 oder 997 ausrechnen können? Primzahlen bleiben halt als Monster übrig, wenn man alle brav teilbaren Zahlen weggekreuzt hat. Anstoß: Das genaue Gegenteil wäre dagegen leicht zu machen, nämlich Zahlen auszurechnen, die sowohl durch 2 als durch 3 als durch 5 als durch ... teilbar sind.

Die Zahlen

$$2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$
$$\ldots$$

stehen sämtlich in der 6. Spalte. Wie könnten wir von dort aus eventuell auf Primzahlen kommen? Natürlich durch $+1$ oder -1.

http://www.springer.com/978-3-658-10604-1

Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht
Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik
Winter, H.W.
2016, XVI, 289 S. 101 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-10604-1