

3 Spannungszustand

Das Ziel von Kapitel 2 war die Bereitstellung von Grundgleichungen mit deren Hilfe die Spannungsermittlung in Abhängigkeit der Bauteilgeometrie sowie der Art und Höhe der äußeren Beanspruchung ermöglicht wurde. Bei einachsiger Zugbeanspruchung zum Beispiel $\sigma = F/A$. Betrachtet wurden die Grundbelastungsarten Zug, Druck, Biegung, Schub (Abscherung) und Torsion.

Spannungszustand

Unter dem Begriff „Spannungszustand“ versteht man alle Spannungen (Normal- und Schubspannungen), die an einem beliebigen Ort eines Körpers wirken.

Mit Hilfe der in Kapitel 2 abgeleiteten Grundgleichungen ist es allerdings nur möglich, die wirkenden Normal- und Schubspannungen in denjenigen Schnittebenen zu ermitteln, welche für die Herleitung der Grundgleichungen gewählt wurden. Bei einachsiger Zugbeanspruchung also beispielsweise in Ebenen senkrecht zur Beanspruchungsrichtung. Für Festigkeitsnachweise ist es jedoch erforderlich, unter anderem diejenigen Schnittebenen zu ermitteln, in denen die Normalspannungen Extremwerte annehmen (Hauptebenen, siehe Kapitel 6).

Das Ziel von Kapitel 3 ist dementsprechend die Bereitstellung von Methoden, mit deren Hilfe eine Spannungsermittlung in beliebigen Schnittebenen durchgeführt werden kann. Diese Problemstellung soll am Beispiel eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck mit einer überlagerten Torsionsbeanspruchung (Torsionsmoment M_t) erläutert werden (Bild 3.1a). Schneidet man entsprechend Bild 3.1b ein Flächenelement parallel zur Achsrichtung heraus, dann kann man auf einfache Weise die Lastspannungen in den Schnittebenen berechnen. Im vorliegenden Beispiel also:

$$\sigma_x = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} \quad (\text{siehe Kapitel 12})$$

$$\sigma_y = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s} \quad (\text{siehe Kapitel 12})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = M_t / W_t$$

Die Spannungen σ_x , σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ in einem Flächenelement dessen Schnittebenen parallel zu den Koordinatenachsen x und y verlaufen (Bild 3.1b) unterscheiden sich von den Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$ in einem um den Winkel φ gedrehten Flächenelement, dessen Schnittebenen parallel zur x' - und y' -Koordinatenachse verlaufen (Bild 3.1c). Die Herleitung der entsprechenden Zusammenhänge zwischen äußerer Belastung und den Spannungen (Normal- und Schubspannungen) in beliebigen Schnittebenen bzw. Schnittrichtungen soll nachfolgend getrennt für den ein-, zwei- und dreiachsigen Spannungszustand erfolgen (Kapitel 3.2 bis 3.4).

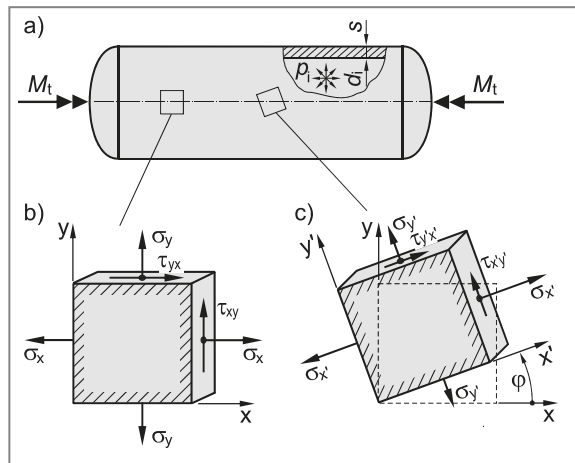


Bild 3.1 Normal- und Schubspannungen in unterschiedlichen Schnittebenen am Beispiel eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck mit überlagelter Torsionsbeanspruchung

3.1 Spannungsbegriff

Denkt man sich ein in A und B gelagertes Bauteil unter der Wirkung einer äußeren Beanspruchung (z. B. Kräfte, Streckenlasten und Momente) an einer beliebigen Stelle durchgeschnitten, dann müssen sich die über die Schnittebene ungleichmäßig verteilten inneren Schnittkräfte mit der äußeren Beanspruchung im Gleichgewicht befinden. Die innere Beanspruchung an einer bestimmten Stelle der Schnittebene wird durch die dort angreifende und auf die Teilfläche ΔA wirkende Kraft $\Delta \vec{F}$ gekennzeichnet. Da die Kräfteverteilung über die Teilfläche ΔA ungleichmäßig ist, stellt $\Delta \vec{F}$ die gemittelte, resultierende Kraft dar. Um eine Aussage über die örtliche Beanspruchung machen zu können, also den Einfluss der Größe von ΔA auf $\Delta \vec{F}$ zu eliminieren, muss die Schnittfläche ΔA klein gemacht werden.

Als Maß für die auf eine unendlich kleine Querschnittsfläche bezogene Schnittkraft $\Delta \vec{F}$ führt man die **(mechanische) Spannung** \vec{s} ein (Bild 3.2):

$$\vec{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA} \quad (3.1)$$

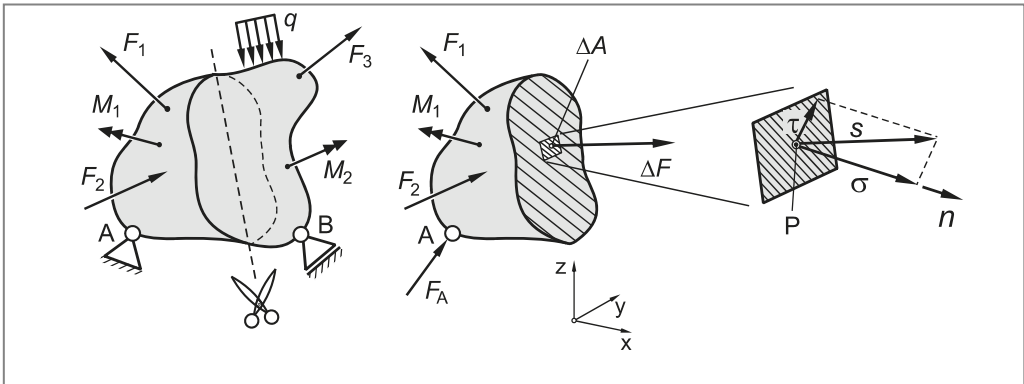


Bild 3.2 Definition der mechanischen Spannung

3.1.1 Normal- und Schubspannungen

Spannungen sind, wie zum Beispiel Kräfte, vektorielle Größen, sie haben also eine Richtung und einen Betrag. Spannungen haben die Dimension Kraft pro Fläche und werden beispielsweise in der Einheit N/mm^2 oder $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ ($1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$) angegeben ¹⁾.

Der Spannungsvektor \vec{s} ist im Allgemeinen schräg zum Flächenelement (Normalenvektor \vec{n}) orientiert. Für Festigkeitsnachweise ist es dabei zweckmäßig, den Spannungsvektor in eine Komponente senkrecht und tangential zur Schnittebene zu zerlegen. Man bezeichnet dann den Betrag der Komponente senkrecht zur Fläche als **Normalspannung** σ , den Betrag der Komponente tangential zur Fläche hingegen als **Schubspannung** τ (Bild 3.2).

¹⁾ Pa = Pascal, benannt nach dem Mathematiker und Physiker **Blaise Pascal** (1623 ... 1662)

3.1.2 Indizierung von Normal- und Schubspannungen

Zur eindeutigen Kennzeichnung von Spannungen führt man zwei Indizes ein. Definitionsgemäß soll gelten:

1. Index: Richtung der Schnittebenennormalen
2. Index: Richtung der Spannung

Liegt beispielsweise eine **Schubspannung** in einer Schnittebene deren Normalenvektor in x -Richtung zeigt, dann ist der 1. Index „ x “. Zeigt die Schubspannung selbst in y -Richtung, dann lautet der zweite Index „ y “. Die Schubspannung wird dementsprechend mit τ_{xy} bezeichnet.

Zur Kennzeichnung von **Normalspannungen** verzichtet man üblicherweise auf eine Doppelindizierung, da die Richtung der Flächennormalen mit der Spannungsrichtung übereinstimmt und schreibt dann beispielsweise σ_x anstelle von σ_{xx} .

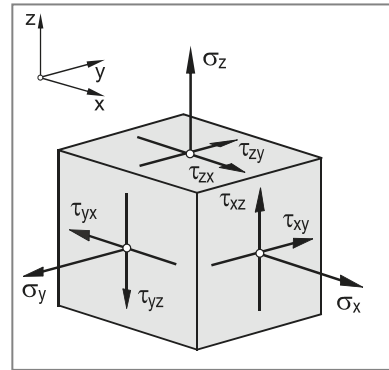


Bild 3.3 Indizierung von Normal- und Schubspannungen

3.1.3 Vorzeichenregelung für Normal- und Schubspannungen

Normalspannungen können entweder zur Schnittebene hin oder von ihr weg gerichtet sein. Dementsprechend unterscheidet man zwischen Zugspannungen (Kapitel 2.1) und Druckspannungen (Kapitel 2.2). Die Unterscheidung von Zug- und Druckspannungen soll im Folgenden durch ein Vorzeichen („+“ für Zugspannung und „-“ für Druckspannungen) erfolgen. Die in Bild 3.3 dargestellten Normalspannungen (σ_x , σ_y , σ_z) sind dementsprechend Zugspannungen.

Bei **Schubspannungen** ist eine Unterscheidung der Spannungen mittels Vorzeichen physikalisch nicht sinnvoll und hat nur für die Richtung der Schubspannung innerhalb der Schnittebene eine Bedeutung. Für die Festlegung des Vorzeichens einer Schubspannung ist die folgende **allgemeine Vorzeichenregelung für Schubspannungen** zweckmäßig:

Eine Schubspannung ist positiv, wenn sie in Schnittebenen mit Normalenvektor in positiver Achsrichtung liegt (positives Schnittufer) und ihre Richtung ebenfalls mit einer positiven Achsrichtung zusammenfällt.

In Schnittebenen mit Normalenvektor in negativer Achsrichtung (negatives Schnittufer) sind Schubspannungen dann positiv, wenn ihre Richtung mit einer negativen Achsrichtung zusammenfällt. Demnach sind alle in Bild 3.3 dargestellten Schubspannungen positiv.

Häufig treten an der zu untersuchenden Stelle des Bauteils in einer der drei Schnittebenen weder Normal- noch Schubspannungen auf (z. B. lastfreie Bauteiloberflächen). Man spricht dann von einem **zweiachsigen** oder **ebenen Spannungszustand** (Kapitel 3.3). In diesem Fall ist es zweckmäßig, die erforderlichen Berechnungen mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises (Kapitel 3.3.4) durchzuführen. Hierfür ist es jedoch empfehlenswert, von der allgemeinen Vorzeichenregelung abzurücken und die nachfolgende **spezielle Vorzeichendefinition für Schubspannungen** anzuwenden (siehe auch Kapitel 3.3.4.2):

Eine Schubspannung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt (zweckmäßige Vorzeichenregel bei Verwendung des Mohrschen Spannungskreises).

3.1.4 Zugeordnete Schubspannungen

In Bild 3.4 ist ein quaderförmiges Werkstoffelement mit den Seitenlängen dx , dy und dz dargestellt. Man kann es sich beispielsweise aus einem Balken herausgeschnitten denken. In den Schnittebenen wirken die Schubspannungen τ_{xy} bzw. τ_{yx} . Die Bedingung $\sum M_A = 0$ für das Momentengleichgewicht führt mit dem Momentenbezugs punkt A auf die Gleichung:

$$\tau_{xy} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = \tau_{yx} \cdot dy \cdot dz \cdot dx \quad (3.2)$$

Hieraus folgt:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.3)$$

Schubspannungen, die in zueinander senkrechten Schnittebenen wirken und auf eine gemeinsame Schnittkante zu oder von ihr weg zeigen, bezeichnet man als **zugeordnete Schubspannungen**. In Bild 3.3 sind somit zugeordnete Schubspannungen:

$$\begin{aligned} &\tau_{xy} \text{ und } \tau_{yx} \\ &\tau_{xz} \text{ und } \tau_{zx} \\ &\tau_{yz} \text{ und } \tau_{zy} \end{aligned}$$

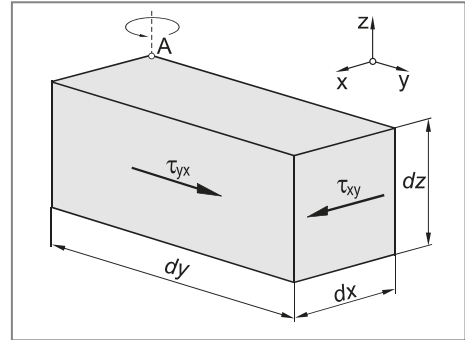


Bild 3.4 Momentengleichgewicht an einem Würfelement eines schubbeanspruchten Bauteils

3.2 Einachsiger Spannungszustand

Für die nachfolgenden Ausführungen soll zunächst ein einachsiger auf Zug beanspruchter Stab betrachtet werden (Bild 3.5a). Zur Ermittlung des Zusammenhangs zwischen äußerer Beanspruchung und den Spannungen in einer beliebigen Schnittebene E , deren Normalenvektor \vec{n} mit der x -Richtung den Winkel φ einschließt, wird das Schnittprinzip angewandt (Bild 3.5b).

Zur Sicherstellung des Kräftegleichgewichts des abgeschnittenen Teils, muss die Schnittkraft F_S in der schrägen Schnittebene der äußeren Kraft F das Gleichgewicht halten. Es ist dabei zweckmäßig, die Kraft F_S in eine Normalkomponente $F_{x'} = F_S \cdot \cos \varphi$ und in eine Tangentialkomponente $F_{y'} = F_S \cdot \sin \varphi$ zu zerlegen.

Geht man von einer gleichmäßigen Spannungsverteilung über der Querschnittsfläche aus, dann folgt mit $A_\varphi = A / \cos \varphi$ und $\sigma = F_S / A$ für die Normalspannung $\sigma_{x'}$ in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ :

$$\sigma_{x'} = \frac{F_{x'}}{A_\varphi} = \frac{F_S \cdot \cos \varphi}{A / \cos \varphi} = \frac{F_S}{A} \cdot \cos^2 \varphi = \sigma \cdot \cos^2 \varphi \quad (3.4)$$

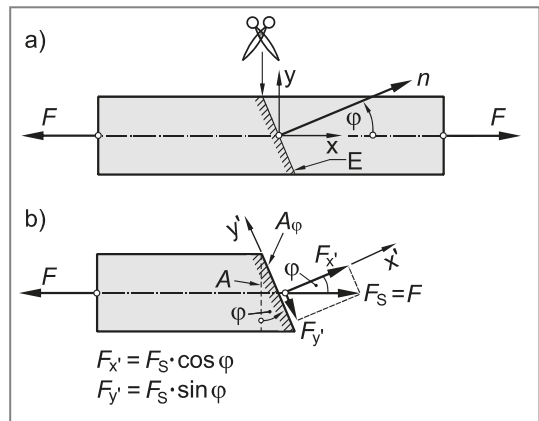


Bild 3.5 Kräftegleichgewicht an einem einachsigen beanspruchten Zugstab

und für die Tangentialspannung $\tau_{x'y'}$ in Abhängigkeit des Schnittwinkels φ :

$$\tau_{x'y'} = \frac{F_{y'}}{A_\varphi} = \frac{F_S \cdot \sin \varphi}{A / \cos \varphi} = \frac{F_S}{A} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \quad (3.5)$$

Unter Anwendung der trigonometrischen Beziehungen:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \quad (3.6)$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.7)$$

folgt aus Gleichung 3.4 für die Normalspannung:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \quad \text{Normalspannung in der Schnittebene } E, \text{ deren Normalenvektor mit der } x\text{-Richtung den Winkel } \varphi \text{ einschließt bei einachsigem Spannungszustand} \quad (3.8)$$

und aus Gleichung 3.5 für die Schubspannung:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad \text{Schubspannung in der Schnittebene } E, \text{ deren Normalenvektor mit der } x\text{-Richtung den Winkel } \varphi \text{ einschließt bei einachsigem Spannungszustand} \quad (3.9)$$

Gleichungen 3.8 und 3.9 zeigen, dass sich in Abhängigkeit der gewählten Schnitttrichtung φ , die Normal- und die Schubspannungen stetig ändern. Bild 3.6 zeigt insbesondere, dass in Schnitttrichtungen von 45° und 135° die Schubspannungen einen Extremwert annehmen und mit $|\tau(45^\circ)| = |\tau(135^\circ)| = 0,5 \cdot \sigma$ betragsmäßig die Größe der Normalspannung in dieser Schnitttrichtung erreichen. In Schnittebenen parallel zur Beanspruchungsrichtung (90°) wirken hingegen keine Normal- und keine Schubspannungen.

Löst man Gleichung 3.8 nach $\cos 2\varphi$ und Gleichung 3.9 nach $\sin 2\varphi$ auf, dann erhält man:

$$\cos 2\varphi = \frac{2 \cdot \sigma_{x'}}{\sigma} - 1 \quad (3.10)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \cdot \tau_{x'y'}}{\sigma} \quad (3.11)$$

Quadriert und addiert man die Gleichungen 3.10 und 3.11, dann folgt:

$$\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = \left(\frac{2 \cdot \sigma_{x'}}{\sigma} - 1 \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \tau_{x'y'}}{\sigma} \right)^2 \quad (3.12)$$

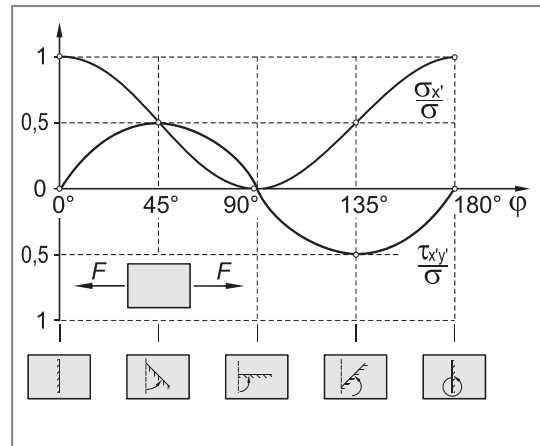


Bild 3.6 Spannungsverlauf eines einachsig beanspruchten Zugstabes in Abhängigkeit der Schnitttrichtung

mit $\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi = 1$ ergibt sich schließlich:

$$1 = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 \cdot \left[\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 \right] \quad (3.13)$$

und somit:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \quad \text{Gleichung des Mohrschen Spannungskreises in der } \sigma\text{-}\tau\text{-Ebene bei einachsigem Spannungszustand} \quad (3.14)$$

Gleichung 3.14 beschreibt einen Kreis in der σ - τ -Ebene mit Mittelpunkt in $(0,5 \cdot \sigma | 0)$ und Radius $\sigma/2$, den **Mohrschen Spannungskreis**¹⁾ (Bild 3.7).

Jeder Bildpunkt des Mohrschen Spannungskreises repräsentiert die Spannungen ($\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$) in einer bestimmten Schnittebene. So repräsentiert beispielsweise der Bildpunkt *A* die Spannungen in einer Schnittebene senkrecht zur Stabachse ($\varphi = 0$). In dieser Ebene tritt bekanntlich nur eine Normalspannung auf. Die Schubspannung ist hingegen Null (siehe auch Bild 3.6).

Zur Ermittlung der Spannungen in einer beliebigen Schnittebene *B*, deren Normalenvektor mit der *x*-Achse (Beanspruchungsrichtung) den Winkel φ einschließt, trägt man den Winkel 2φ bzw. φ in der in Bild 3.7a dargestellten Weise ab (Richtungssinn analog zum Lageplan, Bild 3.7b). Die Koordinaten des Bildpunktes *B* ($\sigma_{x'} | \tau_{x'y'}$) sind dann die Spannungen in der Schnittebene *B*.

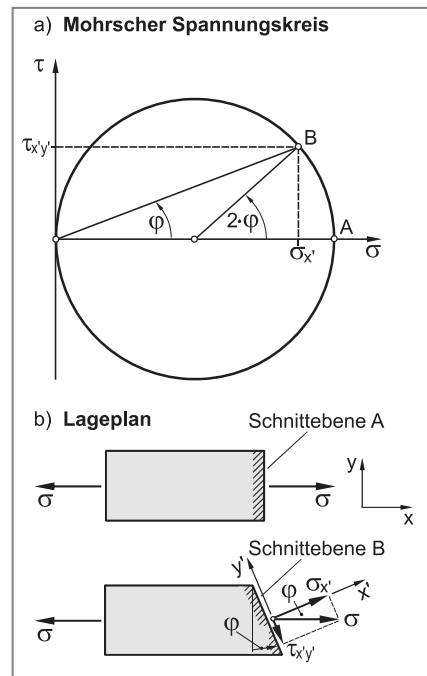


Bild 3.7 Mohrscher Spannungskreis für einachsige Zugbeanspruchung

¹⁾ benannt nach dem deutschen Ingenieur *Christian Otto Mohr* (1835 ... 1918)

3.3 Zweiachsiger (ebener) Spannungszustand

Als Beispiel eines zweiachsig beanspruchten Bauteils wird eine dünne Scheibe mit der Dicke t entsprechend Bild 3.8a betrachtet. Die Scheibe wird durch die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie durch die zugeordneten Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} beansprucht.

Zweiachsige Spannungszustände findet man häufig im Bereich lastfreier Oberflächen, da senkrecht zur Oberfläche aus Gleichgewichtsgründen keine Spannungen auftreten können.

3.3.1 Spannungszustand und Schnitt-richtung

Zur Durchführung von Festigkeitsnachweisen müssen, wie in späteren Kapiteln noch eingehender gezeigt wird, Spannungen in Schnittrichtungen ermittelt werden, die nicht mit der äußeren Beanspruchungsrichtung zusammenfallen.

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in einer beliebigen Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt, wendet man das bereits aus Kapitel 3.2 bekannte Schnittprinzip an und betrachtet das Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung am abgeschnittenen Scheibenelement (Bild 3.8b).

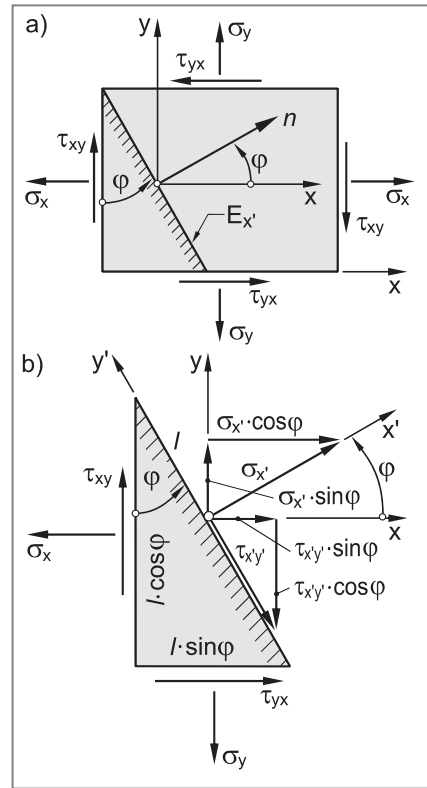


Bild 3.8 Spannungen an einem zweiachsig beanspruchten Scheibenelement

Kräftegleichgewicht in x-Richtung ($\Sigma F_x = 0$):

$$\begin{aligned} -\sigma_x \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot t + \tau_{yx} \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot t + \sigma_{x'} \cdot \cos \varphi \cdot l \cdot t + \tau_{x'y'} \cdot \sin \varphi \cdot l \cdot t &= 0 \quad | : (l \cdot t) \\ -\sigma_x \cdot \cos \varphi + \tau_{yx} \cdot \sin \varphi + \sigma_{x'} \cdot \cos \varphi + \tau_{x'y'} \cdot \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung ($\Sigma F_y = 0$):

$$\begin{aligned} -\sigma_y \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot t + \tau_{xy} \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot t + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi \cdot l \cdot t - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi \cdot l \cdot t &= 0 \quad | : (l \cdot t) \\ -\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Berechnung der Normalspannung $\sigma_{x'}$

Aus Gleichung 3.15 folgt:

$$\tau_{x'y'} = \sigma_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \tau_{yx} - \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (3.17)$$

Gleichung 3.17 in 3.16 eingesetzt und mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (zugeordnete Schubspannungen):

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \left(\sigma_x \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \tau_{xy} - \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.18)$$

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \sin \varphi - \sigma_x \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_{x'} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = 0 \quad (3.19)$$

Multiplikation von Gleichung 3.19 mit $\sin \varphi$ liefert:

$$-\sigma_y \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sigma_{x'} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi = 0 \quad (3.20)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\sin^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 - \cos 2\varphi)$$

$$\cos^2 \varphi = 0,5 \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

$$2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

folgt schließlich aus Gleichung 3.20:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) + \frac{\sigma_y}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi) - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.21)$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.22)$$

Normalspannung in der Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor \vec{n} mit der x-Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand.

Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).

Berechnung der Schubspannung $\tau_{x'y'}$

Aus Gleichung 3.15 folgt:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x - \tau_{yx} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (3.23)$$

Gleichung 3.23 in 3.16 eingesetzt und mit $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (zugeordnete Schubspannungen):

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \left(\sigma_x - \tau_{xy} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \cdot \sin \varphi - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.24)$$

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi + \tau_{xy} \cdot \cos \varphi + \sigma_x \cdot \sin \varphi - \tau_{xy} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \tau_{x'y'} \cdot \cos \varphi = 0 \quad (3.25)$$

Multiplikation von Gleichung 3.25 mit $\cos \varphi$ liefert:

$$-\sigma_y \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \tau_{xy} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \sigma_x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \tau_{x'y'} \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0 \quad (3.26)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,5 \cdot \sin 2\varphi$$

folgt schließlich aus Gleichung 3.26:

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi + \frac{\sigma_x}{2} \cdot \sin 2\varphi \quad (3.27)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad (3.28)$$

Schubspannung in der Schnittebene $E_{x'}$, deren Normalenvektor \vec{n} mit der x -Richtung den Winkel φ einschließt bei zweiachsigem Spannungszustand

Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).

Bei der Anwendung von Gleichung 3.22 und 3.28 ist hinsichtlich des Vorzeichens der Schubspannung τ_{xy} zu beachten, dass eine Schubspannung als positiv anzusetzen ist, falls sie entsprechend Bild 3.8 wirkt. Dies entspricht der Vorzeichenregelung für Schubspannungen für den ebenen Spannungszustand (spezielle Vorzeichenregelung). Erhält man aus Gleichung 3.28 ein negatives Ergebnis, dann wirkt die Schubspannung $\tau_{x'y'}$ entgegen der in Bild 3.8 dargestellten Richtung.

Mitunter findet man in der Literatur in Gleichung 3.22 vor dem letzten Summanden ein Pluszeichen ($\sigma_{x'} = \dots + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$) und in Gleichung 3.28 ein Minuszeichen ($\tau_{x'y'} = \dots - \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$). Die Erklärung für diesen scheinbaren Unterschied findet sich in der Vorzeichenregelung für Schubspannungen. Während bei obiger Herleitung, wie bereits erwähnt, die spezielle Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3) zugrunde gelegt wurde (τ_{xy} ist in Bild 3.8 positiv anzusetzen) wird in der Literatur mitunter auch die allgemeine Vorzeichenregelung für τ_{xy} angewandt. Gemäß der allgemeinen Vorzeichenregelung müsste τ_{xy} für die in Bild 3.8 eingezeichnete Richtung negativ eingesetzt werden, so dass sich die erwähnte Vorzeichenumkehr ergibt.

3.3.2 Mohrscher Spannungskreis

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in einer beliebigen Schnittebene können prinzipiell die Gleichungen 3.22 und 3.28 herangezogen werden. Eine anschaulichere Möglichkeit derartige Fragestellungen zu beantworten, bietet der **Mohrsche Spannungskreis**.

3.3.2.1 Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Spannungskreises

Zur Bestimmung von Mittelpunkt und Radius des Mohrschen Spannungskreises eliminiert man aus den Gleichungen 3.22 und 3.28 den Winkel φ und erhält dann die Gleichung eines Kreises in der σ - τ -Ebene (Mohrscher Spannungskreis). Um den Winkel φ zu eliminieren, werden die Gleichungen 3.22 und 3.28 quadriert und addiert. Aus Gleichung 3.22 folgt:

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \quad | \text{quadriert} \quad (3.29)$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \right)^2 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot \cos^2 2\varphi \\ &\quad - 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy}^2 \cdot \sin^2 2\varphi \end{aligned} \quad (3.31)$$

Aus Gleichung 3.28 folgt:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \quad | \text{quadriert} \quad (3.32)$$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right)^2 \quad (3.33)$$

$$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 2\varphi + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy}^2 \cdot \cos^2 2\varphi \quad (3.34)$$

Addition der Gleichungen 3.31 und 3.34 führt auf eine Kreisgleichung im σ - τ -Koordinatensystem (Mohrscher Spannungskreis):

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cdot (\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi) + \tau_{xy}^2 \cdot (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (3.35)$$

Gleichung des Mohrschen Spannungskreises in der σ - τ -Ebene bei zweiachsigem Spannungszustand

Für den Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises folgt:

$$M = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \mid 0 \right) \quad \text{Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises} \quad (3.36)$$

Der Radius des Mohrschen Spannungskreises ergibt sich zu:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{Radius des Mohrschen Spannungskreises} \quad (3.37)$$

Jeder Bildpunkt P des Mohrschen Spannungskreises repräsentiert die Spannungen ($\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$) in einer Schnittebene, deren Normalenvektor durch den Winkel φ festgelegt ist.

3.3.2.2 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

Gegeben sei ein durch die Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} gekennzeichneteter ebener Spannungszustand (Bild 3.9a). Gesucht sind der Mohrsche Spannungskreis sowie die Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ und $\tau_{y'x'}$ an einem um den Winkel φ gegenüber der x -Richtung gedrehten Flächenelement (Bild 3.9b).

Zur Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises geht man wie folgt vor (Bild 3.9c):

1. Zeichnen eines σ - τ -Koordinatensystems.
2. Eintragen des Bildpunktes P_x ($\sigma_x \mid \tau_{xy}$) der die Spannungen in der Schnittebene mit der x -Achse als Normale repräsentiert (Schnittebene E_x).

Für die graphische Darstellung des Mohrschen Spannungskreises ist es infolge der Kreisgeometrie zweckmäßig, von der allgemeinen Vorzeichenregelung für den dreiachsigen (räumlichen) Spannungszustand (Kapitel 3.1.3) abzurücken und die bereits in Kapitel 3.1.3 erwähnte **spezielle Vorzeichendefinition für Schubspannungen** anzuwenden:

Eine Schubspannung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt.

Unter Verwendung dieser speziellen Vorzeichenregelung ergibt sich eine Übereinstimmung der Vorzeichen der Schubspannungen am Flächenelement und im Mohrschen Spannungskreis. Gemäß dieser speziellen Vorzeichenregelung ist die Schubspannung τ_{xy} in Bild 3.9a positiv, die Schubspannung τ_{yx} hingegen negativ anzusetzen.

3. Eintragen des Bildpunktes P_y ($\sigma_y \mid \tau_{yx}$) der die Spannungen in der Schnittebene mit der y-Achse als Normalenvektor repräsentiert (Schnittebene E_y). Die Schubspannung τ_{yx} ist entsprechend der speziellen Vorzeichenregelung negativ anzusetzen.
4. Die Schnittebenen E_x und E_y stehen senkrecht aufeinander (siehe Lageplan). Da die Bildpunkte zweier senkrechter Schnittebenen bzw. Schnittrichtungen auf einem Kreisdurchmesser liegen, schneidet die Strecke $\overline{P_x P_y}$ die σ -Achse im Kreismittelpunkt M .

5. Kreis um M durch die Bildpunkte P_x oder P_y ist der gesuchte Mohrsche Spannungskreis.

Zur Ermittlung der Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ einer beliebigen Schnittebene $E_{x'}$ überträgt man, ausgehend von einer Schnittebene mit bekannten Spannungen (z. B. Schnittebene E_x mit der x-Achse als Normale), den *doppelten* Richtungswinkel (2φ) in den Mohrschen Spannungskreis. Der Drehsinn muss dabei dem Lageplan entsprechen. Die Koordinaten des Bildpunktes $P_{x'}$ ($\sigma_{x'} \mid \tau_{x'y'}$) kennzeichnen die Spannungen in der Schnittebene $E_{x'}$ (Bild 3.9b und 3.9c).

Für Festigkeitsnachweise werden mithin auch die Spannungen $\sigma_{y'}$ und $\tau_{y'x'}$ in der Schnittebene mit der y' -Achse als Normale ($E_{y'}$) benötigt. Diese Größen werden auf analoge Weise ermittelt (siehe Bild 3.9c).

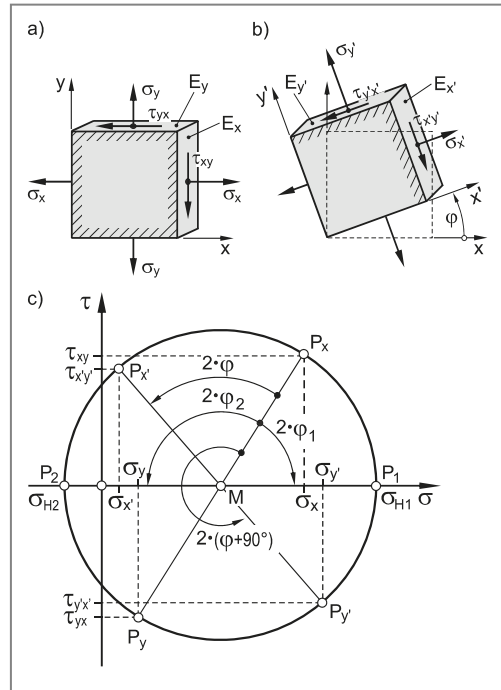


Bild 3.9 Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises

3.3.2.3 Hauptnormalspannungen und Hauptspannungsrichtungen

Aus dem Mohrschen Spannungskreis (Bild 3.9c) ist ersichtlich, dass eine maximale Spannung σ_{H1} und eine minimale Spannung σ_{H2} existieren (Bildpunkte P_1 und P_2 in Bild 3.9c). Diese beiden extremalen Normalspannungen werden als **Hauptnormalspannungen** bezeichnet. Im praktischen Sprachgebrauch nennt man die Hauptnormalspannungen bisweilen auch **Hauptspannungen** (nicht zu verwechseln mit den Hauptschubspannungen, Kapitel 3.3.2.4). Die Richtungen zu den Hauptnormalspannungen (Winkel φ_1 und φ_2) nennt man dementsprechend **Hauptnormalspannungsrichtungen** oder kurz **Hauptspannungsrichtungen** bzw. **Hauptrichtungen** (nicht zu verwechseln mit den Hauptschubspannungsrichtungen). Schnittebenen, deren Normalenvektor mit der Hauptnormalspannungsrichtung zusammenfällt sind schubspannungsfrei.

Eine Richtung ist auch dann Hauptspannungsrichtung, falls die zugehörige Schnittebene völlig frei von Spannungen ist, wie zum Beispiel eine lastfreie Oberfläche (zweiachsiger Spannungszustand). Die zugehörige Hauptnormalspannung ist dann Null. Im Hinblick auf die Bezeichnung soll vereinbart werden, dass mit σ_{H1} die größere der beiden (von Null verschiedenen) Hauptspannungen bezeichnet wird, also $\sigma_{H1} > \sigma_{H2}$.

Die beiden Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} ergeben sich aus den Schnittpunkten des Mohrschen Spannungskreises mit der σ -Achse (Bild 3.9c), da in diesen als **Hauptspannungsebenen** oder **Hauptebenen** bezeichneten Ebenen, die Schubspannungen zu Null werden.

Der Winkel φ_1 zwischen der x-Richtung und der Normalen zur ersten Hauptebene (erste Hauptspannungsrichtung) kann graphisch mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises ermittelt werden. Es gilt dabei: $2 \cdot \varphi_1 = \angle (MP_x, MP_1)$. Für den Winkel φ_2 zwischen der x-Richtung und der Normalen zur zweiten Hauptebene (zweite Hauptspannungsrichtung) gilt dementsprechend: $2 \cdot \varphi_2 = \angle (MP_x, MP_2)$.

Die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} können auch rechnerisch ermittelt werden. Aus dem Mohrschen Spannungskreis lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.38)$$

Hauptnormalspannungen in der x-y-Ebene bei zweiaxsigem Spannungszustand

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.39)$$

Die Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Normalen zur den Hauptebenen (Hauptspannungsrichtungen) lassen sich ebenfalls rechnerisch ermitteln. Man erhält die Richtungswinkel φ_1 bzw. φ_2 aus Gleichung 3.28 mit der Bedingung $\tau_{x'y'} = 0$, da, wie bereits erwähnt, in Schnittebenen mit den Hauptspannungsrichtungen als Normale voraussetzungsgemäß keine Schubspannungen auftreten:

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad (3.40)$$

Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptspannungsrichtung. Vorzeichen von τ_{xy} entsprechend spezieller Vorzeichenregelung (Kapitel 3.1.3).

Der mit Hilfe von Gleichung 3.40 errechnete Winkel kann der Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten *oder* der zweiten Hauptspannungsrichtung sein. Eine Entscheidung kann mit Hilfe von Tabelle 3.1 erfolgen.

Aufgrund der π -Periodizität des Tangens ergibt sich der zweite Winkel zu:

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2} \quad (3.41)$$

3.3.2.4 Hauptschubspannungen

Die im Bauteil auftretenden betragsmäßig größten Schubspannungen τ_{\max} ergeben sich aus dem Mohrschen Spannungskreis (Bild 3.9c) zu:

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2} \quad (3.42)$$

Maximale Schubspannung in der x-y-Ebene bei zweiaxsigem Spannungszustand

Tabelle 3.1 Rechnerische Ermittlung der Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen σ_{H1} und σ_{H2}

Fall ¹⁾	Lageplan	Winkel zu den Hauptspannungsrichtungen ^{1) 2)}	Hauptnormalspannungen	Mohr'scher Spannungskreis ¹⁾
Fall 1: $\sigma_x > \sigma_y$ $\tau_{xy} > 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$	$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 2: $\sigma_x < \sigma_y$ $\tau_{xy} > 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 3: $\sigma_x < \sigma_y$ $\tau_{xy} < 0$		$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$ $\varphi_1 = \varphi_2 + 90^\circ$	$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$	
Fall 4: $\sigma_x > \sigma_y$ $\tau_{xy} < 0$		$\varphi_1 = \frac{1}{2} \cdot \arctan \left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$ $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$		

¹⁾ Vorzeichenregel für Schubspannungen entsprechend der speziellen Vorzeichenregelung für die Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises (Kapitel 3.1.3)

²⁾ φ_1 : Winkel zwischen der x-Richtung und der ersten Hauptspannungsrichtung (σ_{H1}). φ_2 : Winkel zwischen der x-Richtung und der zweiten Hauptspannungsrichtung (σ_{H2}).

3.4 Dreiachsiger (räumlicher) Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines zweiachsigen Spannungszustandes war es mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises möglich, die Normal- und die Schubspannungen in beliebigen Schnittebenen zu ermitteln. Im Falle eines dreiachsigen (räumlichen) Spannungszustandes ist diese Vorgehensweise in der Regel nicht möglich ¹⁾.

Zur Beschreibung des Spannungszustandes in einem Punkt P eines beliebig beanspruchten Körpers (vgl. Bild 3.2) schneidet man ein würfelförmiges Volumenelement heraus, dessen Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems sind. Im allgemeinen Fall wirken am Volumenelement drei voneinander unabhängige Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) sowie drei Paare voneinander unabhängiger, zugeordneter Schubspannungen (τ_{xy} und τ_{yx} , τ_{xz} und τ_{zx} , τ_{yz} und τ_{zy}).

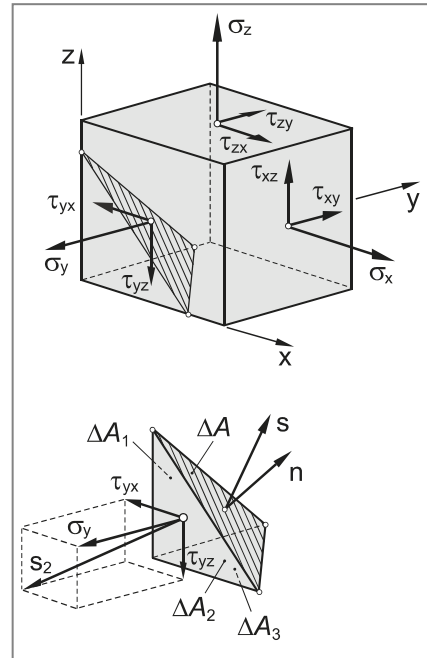


Bild 3.10 Spannungen am räumlichen Tetraederelement

3.4.1 Spannungstensor

Zur Ermittlung der Schnittspannungen in einer beliebigen Schnittebene (charakterisiert durch den Normalenvektor \vec{n}) trennt man, analog zum zweiachsigen Spannungszustand, vom Würfelement ein Tetraeder heraus und betrachtet das Kräftegleichgewicht (Bild 3.10).

Die Spannungsvektoren \vec{s} bzw. \vec{s}_1 , \vec{s}_2 und \vec{s}_3 in den einzelnen Tetraederflächen wirken schräg zur jeweiligen Fläche (Bild 3.10). Multipliziert man den jeweiligen Spannungsvektor mit der entsprechenden Tetraederfläche, dann erhält man die auf die jeweiligen Flächen wirkenden Kräfte, deren vektorielle Summe aus Gleichgewichtsgründen Null sein muss. Ansetzen des Kräftegleichgewichts am freigeschnittenen Tetraederelement liefert (Bild 3.10):

$$\vec{s} \cdot \Delta A = \vec{s}_1 \cdot \Delta A_1 + \vec{s}_2 \cdot \Delta A_2 + \vec{s}_3 \cdot \Delta A_3 = 0 \quad (3.43)$$

Damit Gleichung (3.43) weiter umgeformt werden kann, müssen zunächst die Flächeninhalte der Teilflächen ΔA_1 , ΔA_2 und ΔA_3 berechnet werden. Die Berechnung soll am Beispiel von Teilfläche ΔA_3 erfolgen (Bild 3.11).

Für den Inhalt der Tetraederfläche ΔA gilt:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad (3.44)$$

Für den Inhalt der Tetraederfläche ΔA_3 gilt:

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_3 \quad (3.45)$$

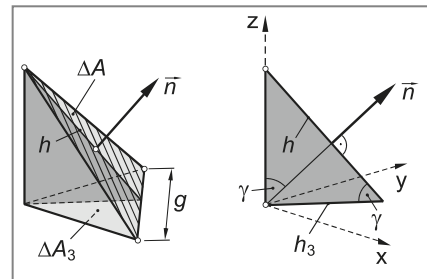


Bild 3.11 Geometrische Beziehungen am Tetraederelement

¹⁾ Die Berechnung von Spannungen in beliebigen Schnittrichtungen mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises gelingt nur, falls das Volumenelement parallel zu den Hauptachsen herausgeschnitten vorliegt (Hauptspannungselement, Kapitel 3.4.3).

Zwischen den Höhen h und h_3 der beiden Dreiecksflächen gilt weiterhin (Bild 3.11):

$$h_3 = h \cdot \cos \gamma \quad (3.46)$$

Damit folgt aus Gleichung 3.45 mit Gleichung 3.44:

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \cdot \cos \gamma = \Delta A \cdot \cos \gamma \quad (3.47)$$

In analoger Weise folgt für die Teilflächen ΔA_1 und ΔA_2 :

$$\Delta A_1 = \Delta A \cdot \cos \alpha \quad (3.48)$$

$$\Delta A_2 = \Delta A \cdot \cos \beta \quad (3.49)$$

Setzt man die Gleichungen 3.47 bis 3.49 in Gleichung 3.43 ein, dann folgt:

$$\vec{s} \cdot \Delta A = \vec{s}_1 \cdot \Delta A \cdot \cos \alpha + \vec{s}_2 \cdot \Delta A \cdot \cos \beta + \vec{s}_3 \cdot \Delta A \cdot \cos \gamma \quad | : \Delta A \quad (3.50)$$

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \cdot \cos \alpha + \vec{s}_2 \cdot \cos \beta + \vec{s}_3 \cdot \cos \gamma \quad (3.51)$$

Für die Komponenten der Spannungsvektoren ergibt sich (Bild 3.10):

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Eingesetzt in Gleichung 3.51 folgt für den Spannungsvektor \vec{s} in der Schnittebene ΔA :

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha + \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \cdot \cos \beta + \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \cos \gamma \quad (3.53)$$

Gleichung 3.53 lässt sich auch in Matrizenform darstellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}}_{\vec{s}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\vec{S}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}}_{\vec{n}} \quad (3.54)$$

Die Größe \vec{S} wird als **Spannungstensor** bezeichnet. Der Spannungstensor beschreibt den Spannungszustand in einem beliebigen Punkt eines Bauteils. Die Hauptdiagonale des Spannungstensors enthält die Normalspannungen σ_x , σ_y und σ_z , daneben stehen die Schubspannungen. Da jeweils drei Paare von Schubspannungen gleich sind (zugeordnete Schubspannungen, d. h. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy}$) ist die Spannungsmatrix symmetrisch, so dass nur 6 voneinander unabhängige Spannungskomponenten vorliegen.

Entsprechend des Gesetzes für zugeordnete Schubspannungen können die Indizes der Schubspannungen vertauscht werden, so dass der Spannungstensor \vec{S} auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

3.4.2 Berechnung der Normal- und Schubspannungen in einer beliebigen Schnittebene

Mit Hilfe des Spannungstensors wird der Spannungszustand in einem beliebigen Körperpunkt eindeutig beschrieben. Mitunter ist es von Interesse, die Spannungen in beliebigen Schnitt-richtungen zu ermitteln. Die räumliche Lage der schrägen Schnittebene ΔA wird durch ihren Normaleneinheitsvektor \vec{n} festgelegt, wobei gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Bei bekanntem Spannungszustand (gekennzeichnet durch den Spannungstensor) errechnet sich der Spannungsvektor \vec{s} zu:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \cdot \cos \alpha + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \cdot \cos \beta + \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \cos \gamma \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \sigma_z \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Sofern \vec{n} keine Hauptspannungsebene kennzeichnet und damit \vec{s} keine Hauptnormalspannung ist, fallen \vec{s} und \vec{n} nicht zusammen. Dann lässt sich der Spannungsvektor \vec{s} in eine Komponente in Richtung der Flächennormalen (Normalspannung) und in eine Komponente senkrecht dazu (Schubspannung) zerlegen (Bild 3.12).

Die Normalspannungskomponente $\vec{\sigma}$ des Spannungsvektors \vec{s} zur Schnittebene ΔA erhält man durch senkrechte Projektion des Spannungsvektors \vec{s} auf den Normaleneinheitsvektor \vec{n} . Der Betrag der Normalspannung σ ergibt sich dann als Skalarprodukt von \vec{s} und \vec{n} :

$$\sigma = \vec{s} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \sigma_z \cdot \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

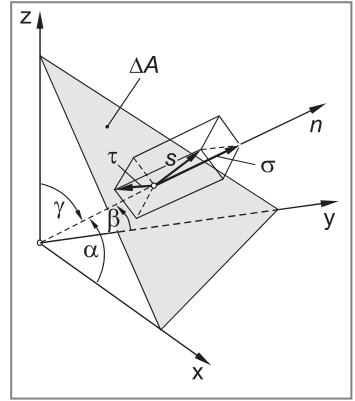


Bild 3.12

Spannungen in beliebiger Schnitt-richtung bei dreiaxsigem Spannungszustand

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \gamma + 2 \cdot (\tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha) \quad (3.59)$$

Betrag der Normalspannung in beliebiger (räumlicher) Schnitttrichtung

Für den Betrag der Schubspannung in der Schnittebene ΔA ergibt sich unter Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} \quad \text{Betrag der Schubspannung in beliebiger (räumlicher) Schnitttrichtung} \quad (3.60)$$

3.4.3 Hauptnormalspannungen bei dreiaxsigem Spannungszustand

Wird ein Bauteil durch äußere Kräfte und Momente beansprucht, dann können zumindest bei einfachen geometrischen Verhältnissen, mit Hilfe der in Kapitel 2 beschriebenen Grundgleichungen die Lastspannungen und damit der Spannungszustand ermittelt werden. Allgemein wird der Spannungszustand in einem Punkt P eines beanspruchten Bauteils durch drei voneinander unabhängige Normalspannungen (σ_x , σ_y und σ_z) sowie drei Paare zugeordneter Schubspannungen (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}) beschrieben (Bild 3.10) und mathematisch durch den Spannungstensor \bar{S} ausgedrückt (Kapitel 3.4.1). In Lastspannungen ausgedrückt lautet der Spannungstensor:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Für einen Festigkeitsnachweis ist in der Regel die Kenntnis von Betrag und ggf. Richtung der Hauptnormalspannungen (σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3}) erforderlich. Zur Ermittlung der Hauptnormalspannungen dreht man das Würfелеlement so, bis die Schubspannungen in den Schnittebenen verschwinden und die Normalspannungen Extremwerte annehmen (**Hauptspannungselement**, Bild 3.13). Die entsprechenden Schnitttrichtungen bezeichnet man als Hauptnormalspannungsrichtungen und die in diesen Schnittebenen (Hauptspannungsebenen bzw. Hauptebenen) wirkenden Normalspannungen als Hauptnormalspannungen (siehe auch Kapitel 3.3.4.3).

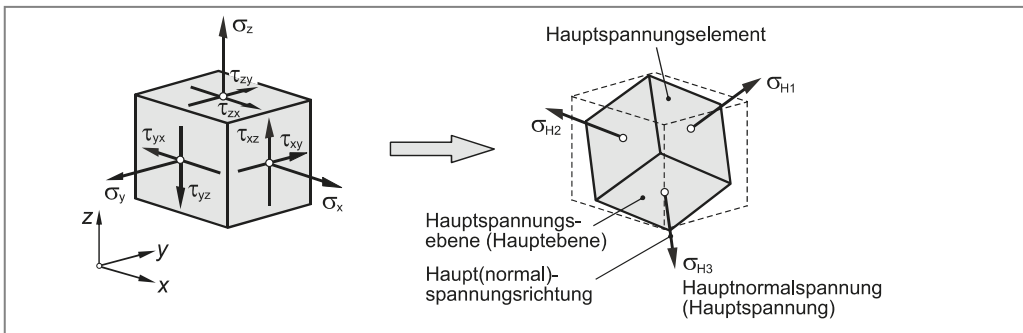


Bild 3.13 Allgemeiner Spannungszustand und Hauptspannungselement

Im Allgemeinen sind in einem beliebigen Punkt eines Bauteils der Spannungsvektor \vec{s} und der Normalenvektor \vec{n} der zugehörigen Schnittebene nicht parallel zueinander (Bild 3.2). Die Hauptspannungsrichtungen sind jedoch dadurch gekennzeichnet, dass die Spannungsvektoren ($\vec{s}_{H1} \equiv \vec{\sigma}_{H1}, \vec{s}_{H2} \equiv \vec{\sigma}_{H2}$ und $\vec{s}_{H3} \equiv \vec{\sigma}_{H3}$) senkrecht zu den zugehörigen Schnittebenen bzw. parallel zu deren Normalenvektoren ($\vec{n}_{H1}, \vec{n}_{H2}$ und \vec{n}_{H3}) sind d. h. die Schubspannungen verschwinden. Der Betrag der Hauptnormalspannungen ist dabei das σ_{H1} - bzw. σ_{H2} - bzw. das σ_{H3} -fache des Normaleneinheitsvektors der jeweiligen Hauptspannungsebene. Mathematisch lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt formulieren:

$$\vec{\sigma}_{Hi} = \sigma_{Hi} \cdot \vec{n}_{Hi} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.62)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Hi x} \\ \sigma_{Hi y} \\ \sigma_{Hi z} \end{pmatrix} = \sigma_{Hi} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{Hi x} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \alpha_i \\ \sigma_{Hi y} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \beta_i \\ \sigma_{Hi z} &= \sigma_{Hi} \cdot \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

Andererseits muss sich bei bekannter Hauptspannungsrichtung und bekanntem Spannungszustand (gekennzeichnet durch den Spannungstensor \bar{S}) derselbe Spannungsvektor $\vec{\sigma}_{Hi}$ auch entsprechend Gleichung 3.54 ergeben:

$$\vec{\sigma}_{Hi} = \bar{S} \cdot \vec{n}_{Hi} \quad (3.64)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{Hi x} \\ \sigma_{Hi y} \\ \sigma_{Hi z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_i \\ \cos \beta_i \\ \cos \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Hi x} &= \sigma_x \cdot \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cdot \cos \beta_i + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma_i \\ \sigma_{Hi y} &= \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_i + \sigma_y \cdot \cos \beta_i + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma_i \\ \sigma_{Hi z} &= \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_i + \tau_{yz} \cdot \cos \beta_i + \sigma_z \cdot \cos \gamma_i \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nach Gleichsetzen von Gleichung 3.63 mit 3.65 und ordnen, erhält man ein homogenes, lineares Gleichungssystem für den Richtungskosinus der Normalenvektoren der jeweiligen Hauptspannungsebenen ($\cos \alpha_i, \cos \beta_i$ und $\cos \gamma_i$) und damit auch der Hauptnormalspannungen.

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \alpha_i + \tau_{xy} \cdot \cos \beta_i + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma_i &= 0 \\ \tau_{xy} \cdot \cos \alpha_i + (\sigma_y - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \beta_i + \tau_{yz} \cdot \cos \gamma_i &= 0 \\ \tau_{xz} \cdot \cos \alpha_i + \tau_{yz} \cdot \cos \beta_i + (\sigma_z - \sigma_{Hi}) \cdot \cos \gamma_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Das Gleichungssystem hat nur dann nicht triviale Lösungen, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems Null ist. Dies führt auf die **charakteristische Gleichung** (E = Einheitsmatrix, S = Spannungsmatrix, σ_{Hi} = Eigenwert der Spannungsmatrix):

$$\det(S - \sigma_{Hi} \cdot E) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{Hi} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{Hi} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_{Hi} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung} \quad (3.67)$$

Die Lösung der charakteristischen Gleichung liefert die Eigenwerte (σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3}) der Spannungsmatrix. Diese Eigenwerte entsprechen den jeweiligen Hauptspannungen. Die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren (\vec{n}_{H1} , \vec{n}_{H2} und \vec{n}_{H3}) sind identisch mit den Hauptspannungsrichtungen.

Die Berechnung der Determinante (Gleichung 3.67) führt auf eine Gleichung dritten Grades (**Eigenwertgleichung**), deren Lösung die gesuchten Eigenwerte der Spannungsmatrix d. h. die Hauptnormalspannungen σ_{Hi} sind. Zu den mathematischen Grundlagen wird an dieser Stelle auf die entsprechende Literatur wie z. B. [3] verwiesen. Die Eigenwertgleichung lautet:

$$\sigma_{Hi}^3 - I_1 \cdot \sigma_{Hi}^2 + I_2 \cdot \sigma_{Hi} - I_3 = 0 \quad \text{Eigenwertgleichung} \quad (3.68)$$

Die Koeffizienten I_1 , I_2 und I_3 der Eigenwertgleichung (Gleichung 3.68) sind die Invarianten des Spannungstensors (unveränderliche Größen in Bezug auf eine Koordinatentransformation) und berechnen sich wie folgt:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.69)$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \quad (3.70)$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{xz} - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 \quad (3.71)$$

**Invarianten des
Spannungs-
tensors**

Aufgrund der Symmetrie der Koeffizientendeterminante hat Gleichung 3.68 stets drei reelle Lösungen, die Hauptspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} . Damit existieren bei einem räumlichen Spannungszustand in jedem Punkt eines Bauteils drei zueinander senkrechte, schubspannungsfreie Schnittebenen.

Zur **Lösung einer Gleichung 3. Grades** der Form entsprechend Gleichung 3.68, schreibt man:

$$\sigma_{Hi}^3 + A \cdot \sigma_{Hi}^2 + B \cdot \sigma_{Hi} + C = 0 \quad (3.72)$$

Die Zahlenwerte für A , B und C erhält man durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 3.68:

$$A = -I_1$$

$$B = I_2 \quad (3.73)$$

$$C = -I_3$$

Zur Lösung von Gleichung 3.72 geht man wie nachfolgend beschrieben vor.

1. Schritt: Elimination von $A \cdot \sigma_{Hi}^2$ durch Substitution, gemäß:

$$\sigma_{Hi} = u - \frac{A}{3} \quad (3.74)$$

liefert die reduzierte Form der Gleichung 3. Grades:

$$u^3 + a \cdot u + b = 0 \quad (3.75)$$

$$\text{mit: } a = B - \frac{A^2}{3} \quad \text{und} \quad b = \frac{2}{27} \cdot A^3 - \frac{1}{3} \cdot A \cdot B + C$$

2. Schritt: Berechnung der Diskriminante D von Gleichung 3.75:

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \quad (3.76)$$

für $D < 0$: eine reelle und zwei konjugiert komplexe Lösungen

$D = 0$: zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen (eine einfache Lösung und eine Doppellösung)

$D > 0$: drei reelle Lösungen

Da die Matrix der Koeffizienten-Determinante symmetrisch ist (Gleichung 3.67), erhält man drei reelle Lösungen aus denen sich die drei Hauptspannungen ermitteln lassen.

3. Schritt: Für die drei (reellen) Lösungen der Gleichung 3. Grades (Gleichung 3.75) folgt:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos \varphi \\ u_2 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ) \\ u_3 &= 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos(\varphi + 240^\circ) \end{aligned} \quad \text{mit } \varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-b}{2 \cdot \sqrt{(-a/3)^3}} \right) \quad (3.77)$$

Die Hauptspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} ergeben sich schließlich aus Gleichung 3.74:

$$\sigma_{Hi} = u_i - \frac{A}{3} \quad (i=1,2,3)$$

Vereinbarungsgemäß wird die größte positive Hauptnormalspannung mit σ_1 und die kleinste Hauptnormalspannung mit σ_3 bezeichnet (siehe auch Kapitel 6), so dass gilt (ordnen der Hauptspannungen entsprechend ihrer algebraischen Größe):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \max\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} \\ \sigma_3 &= \min\{\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \sigma_{H3}\} \\ \sigma_1 &< \sigma_2 < \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.78)$$

4. Schritt: Kontrolle

Zur Kontrolle der Berechnungen kann die erste Invariante (I_1) herangezogen werden. Die Invarianten eines Tensors sind Größen, die sich auch bei einer Koordinatentransformation z. B. vom x-y-z-Koordinatensystem ins Hauptachsensystem nicht ändern, so dass gelten muss:

$$\sigma_{H1} + \sigma_{H2} + \sigma_{H3} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3.79)$$

3.4.4 Mohrscher Spannungskreis für den dreiachsigen Spannungszustand

Unter der Voraussetzung eines zweiachsigen Spannungszustandes konnten mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises die Normal- und Schubspannungen in jeder beliebigen Schnittebene ebenso wie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} auf einfache und anschauliche Weise ermittelt werden (Kapitel 3.3.4).

Liegt hingegen ein dreiachsiger (allgemeiner) Spannungszustand vor, dann ist eine ähnliche Vorgehensweise mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreises nicht mehr möglich. Die Ermittlung der Hauptnormalspannungen sowie der Spannungen in beliebiger (räumlicher) Schnittrichtung muss in diesem Fall analytisch erfolgen (Kapitel 3.4.2 und 3.4.3).

Sind hingegen die drei Hauptnormalspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 bekannt (siehe Gleichung 3.78), dann können für jede durch die Hauptspannungsrichtungen gekennzeichnete Hauptspannungsebene (σ_1 - σ_2 -Ebene, σ_1 - σ_3 -Ebene und σ_2 - σ_3 -Ebene) die Mohrschen Spannungskreise angegeben werden. Man erhält dabei zwei sich berührende **Nebenkreise** (σ_1 - σ_2 -Ebene und σ_2 - σ_3 -Ebene), die von einem **Hauptkreis** (σ_1 - σ_3 -Ebene) eingeschlossen werden (Bild 3.14).

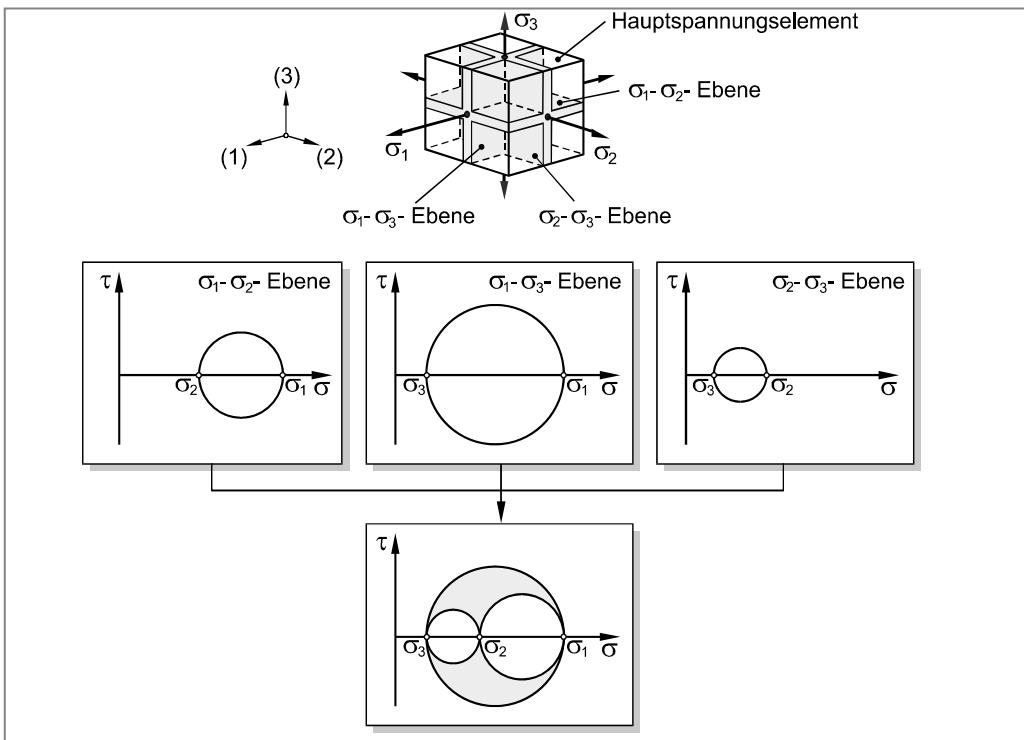


Bild 3.14 Mohrsche Spannungskreise für den dreiachsigen (allgemeinen) Spannungszustand

Die Spannungen (σ_φ , τ_φ) in einem räumlich beliebig gerichteten Flächenelement findet man als Bildpunkt P innerhalb des Hauptkreises und außerhalb der beiden Nebenkreise (grau markierter Bereich in Bild 3.14). Eine graphische Methode für das Auffinden des Bildpunktes bei gegebener Schnittrichtung wird in Kapitel 3.4.6 beschrieben.

Mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise können nunmehr die folgenden Aufgabenstellungen auf anschauliche Weise gelöst werden:

- Ermittlung der Hauptschubspannungen (Kapitel 3.4.5).
- Graphische Bestimmung der Spannungen (σ_φ und τ_φ) in beliebigen räumlichen Schnittrichtungen (Kapitel 3.4.6).

3.4.5 Hauptschubspannungen bei dreiachsigem Spannungszustand

Zweckmäßigerweise ermittelt man die Hauptschubspannungen mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise, nachdem die Hauptnormalspannungen bekannt sind (Kapitel 3.4.3). Die Hauptschubspannungen (τ_{H1} , τ_{H2} und τ_{H3}) ergeben sich sofort als Radien der drei Mohrschen Spannungskreise zu:

$$\begin{aligned}\tau_{H1} &= \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{H2} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{H3} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\end{aligned}\quad (3.80)$$

Die Hauptschubspannungen wirken jeweils in Schnittebenen, die zu den Hauptspannungsebenen einen Winkel von 45° einschließen und zu einer der Hauptachsen parallel sind (Bild 3.15).

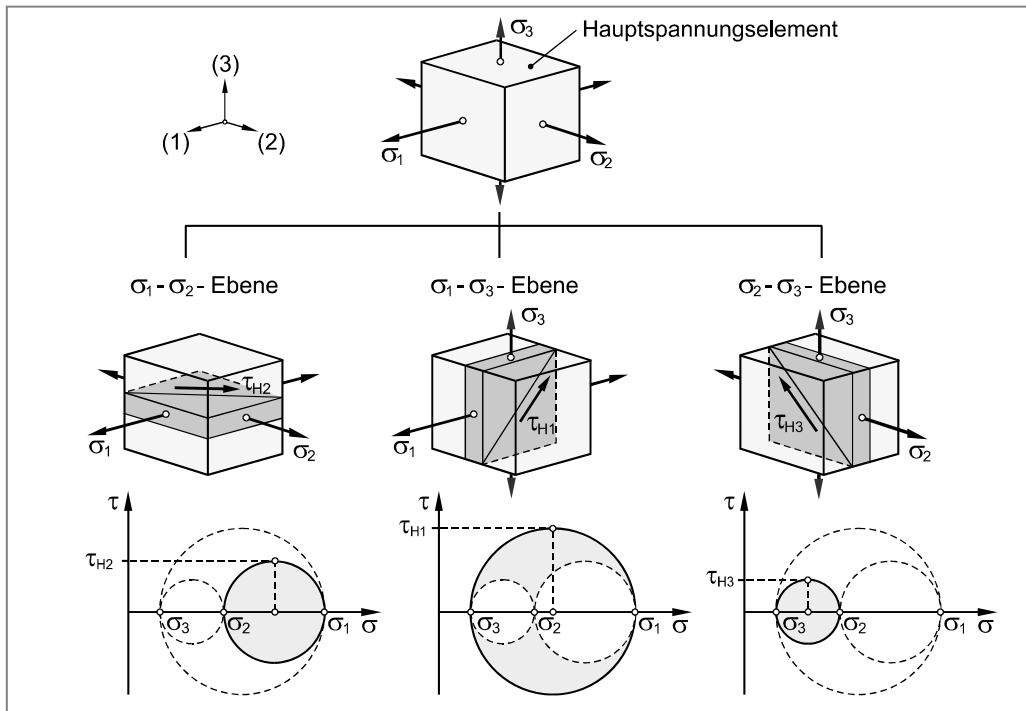


Bild 3.15 Schnittebenen größter Schubspannungen am Hauptspannungselement

3.4.6 Graphische Ermittlung von Schnittspannungen bei dreiaxigem Spannungszustand

Unter der Voraussetzung, dass die Hauptnormalspannungen (σ_1 , σ_2 und σ_3) in einem Punkt P eines beliebig beanspruchten Bauteil bekannt sind, kann die Normalspannung σ_φ sowie die Schubspannung τ_φ in einer beliebigen Schnittebene E auch graphisch ermittelt werden. Die Vorgehensweise soll nachfolgend (ohne Beweis der Konstruktionsbeschreibung) aufgezeigt werden. Die Normale \vec{n} der räumlichen Schnittebene E schließt mit den *Hauptspannungsrichtungen* (1, 2 und 3) die Winkel α , β , und γ ein (Bild 3.16a)

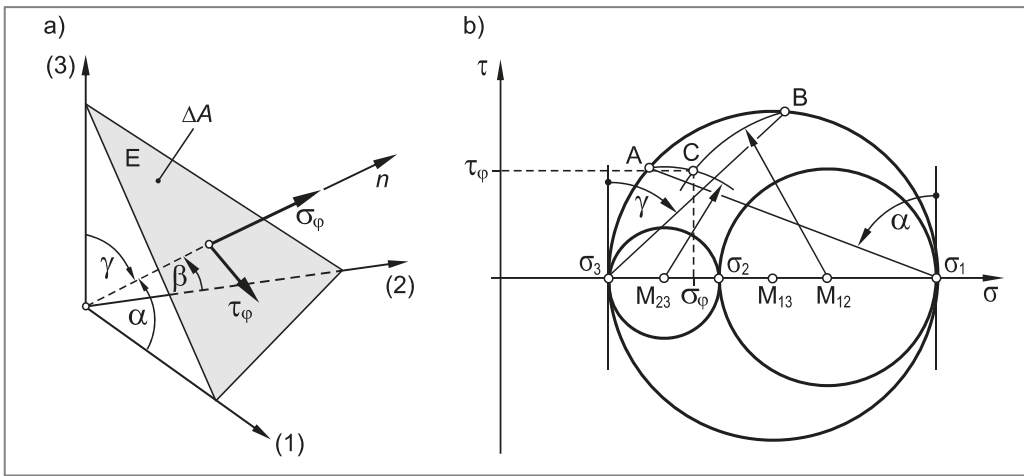


Bild 3.16 Graphische Ermittlung von Schnittspannungen bei dreiaxigem Spannungszustand

Konstruktionsbeschreibung:

1. Konstruktion der Mohrschen Spannungskreise für die drei Hauptspannungsebenen.
2. Die Normale \vec{n} schließt mit der ersten Hauptspannungsrichtung (1) den Winkel α ein. Dementsprechend trägt man zu einer Parallelen zur τ -Achse durch σ_1 den Richtungswinkel α ab und bringt dessen Schenkel zum Schnitt mit den Hauptkreis d. h. dem Mohrschen Spannungskreis der σ_1 - σ_3 -Ebene (Schnittpunkt A).
3. Die Normale \vec{n} schließt mit der dritten Hauptspannungsrichtung (3) den Winkel γ ein. Dementsprechend trägt man zu einer Parallelen zur τ -Achse durch σ_3 den Richtungswinkel γ ab und bringt dessen Schenkel ebenfalls zum Schnitt mit dem Mohrschen Spannungskreis der σ_1 - σ_3 -Ebene (Schnittpunkt B).
4. Kreisbogen um M_{23} (Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises der σ_2 - σ_3 -Ebene) mit Radius $\overline{M_{23}A}$ und Kreisbogen um M_{12} (Mittelpunkt des Mohrschen Spannungskreises der σ_1 - σ_2 -Ebene) mit Radius $\overline{M_{12}B}$ schneiden sich im Punkt C .
5. Die Koordinaten des Schnittpunktes C ($\sigma_\varphi \mid \tau_\varphi$) charakterisieren die Spannungen in der Schnittebene E . Ist die Normalspannung σ_φ positiv, dann liegt eine Zugbeanspruchung vor, ist sie hingegen negativ, dann herrscht in der Schnittebene E eine Druckspannung. Die Wirkrichtung der Schubspannung τ_φ kann dieser Konstruktion allerdings nicht entnommen werden.

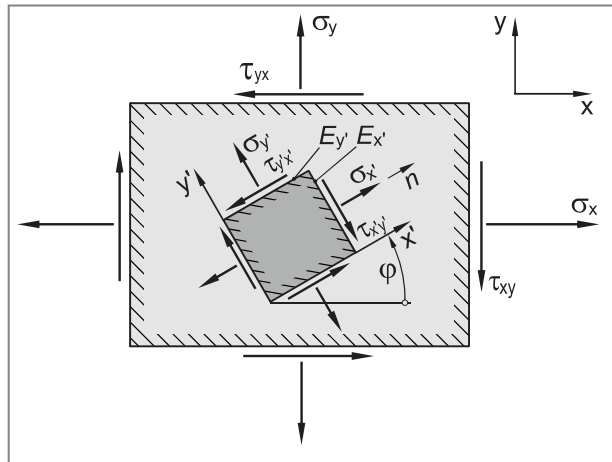
3.5 Aufgaben

Aufgabe 3.1

○○●●●

Die Abbildung zeigt ein durch die Spannungen $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$; $\sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2$ und $\tau_{xy} = 75 \text{ N/mm}^2$ zweiachsig beanspruchtes Scheibenelement aus Werkstoff S235JR.

- Zeichnen Sie maßstäblich den Mohrschen Spannungskreis in der x-y-Ebene.
- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} und σ_{H2} sowie die Richtungswinkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Hauptspannungsrichtungen.
- Ermitteln Sie die Spannungen $\sigma_{x'}$ und $\tau_{x'y'}$ in der Schnittebene $E_{x'}$ sowie $\sigma_{y'}$ und $\tau_{y'x'}$ in der Schnittebene $E_{y'}$ eines um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ zur x-Richtung gedrehten Flächenelementes (siehe Abbildung).

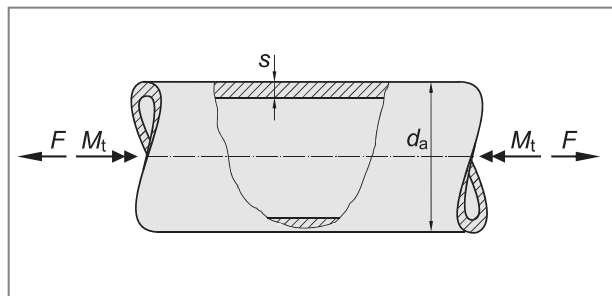


Aufgabe 3.2

○○●●●

Ein Stahlrohr mit einem Außendurchmesser $d_a = 100 \text{ mm}$ und einer Wandstärke $s = 10 \text{ mm}$ wird gleichzeitig durch die Zugkraft $F = 425 \text{ kN}$ und das Torsionsmoment $M_t = 9250 \text{ Nm}$ statisch beansprucht.

- Skizzieren Sie den Mohrschen Spannungskreis für die höchst beanspruchte Stelle.
- Ermitteln Sie die Hauptnormalspannungen, die Hauptschubspannungen und die jeweiligen Richtungswinkel zur x-Achse.



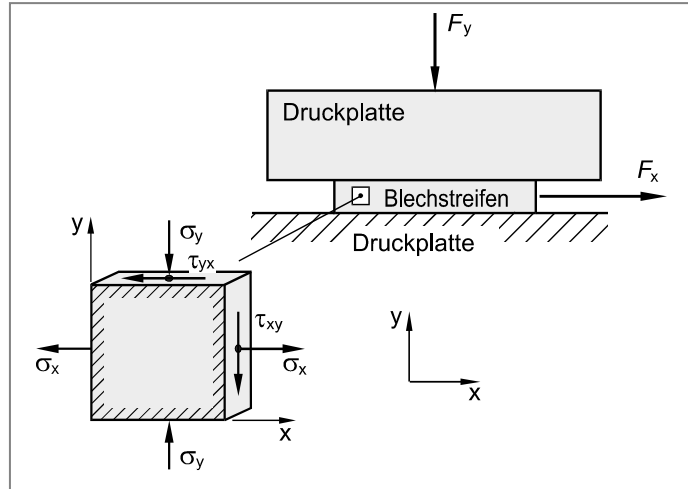
Aufgabe 3.3

○○●●●

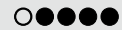
Ein Blechstreifen wird zwischen zwei Druckplatten hindurch gezogen. Dabei entstehen an der höchst beanspruchten Stelle des Bleches die folgenden Spannungen:

- aus Zug: $\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$
- aus Druck: $\sigma_y = -100 \text{ N/mm}^2$
- aus Reibung: $\tau_{xy} = 40 \text{ N/mm}^2$

- a) Berechnen Sie die im Blech auftretenden größten Zug- bzw. Druckspannungen d. h. die Hauptnormalspannungen.
- b) Ermitteln Sie die Lage derjenigen Schnittebenen, in denen die größten Zug- bzw. Druckspannungen auftreten (Winkel φ_1 und φ_2 zwischen der x-Richtung und den Normalen zu diesen Schnittebenen).



Aufgabe 3.4



Die Abbildung zeigt das Maschinengestell für eine Einpressvorrichtung aus dem Gusseisenwerkstoff EN-GJL-350 (alle Maßangaben in mm). Das Maschinengestell wird durch die statisch wirkenden Arbeitskräfte F belastet.

Zur Ermittlung der unbekannten Arbeitskräfte F wird in der Säulenmitte ein Dehnungsmessstreifen (DMS) appliziert. Aufgrund einer Montageungenaugigkeit schließt die Messrichtung des DMS einen Winkel von 10° zur Säulenlängsachse ein.

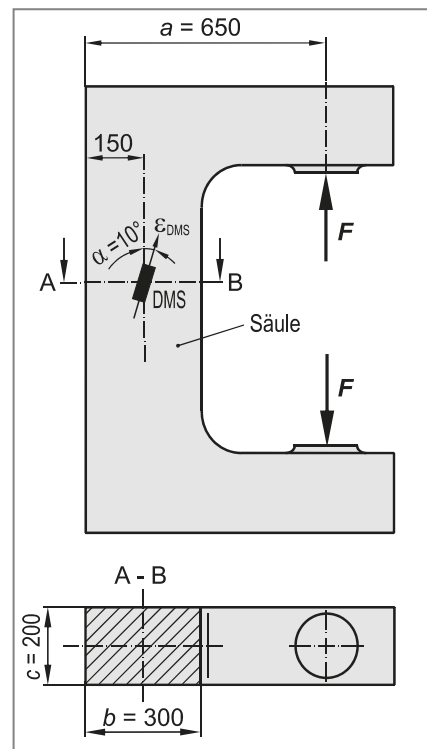
Werkstoffkennwerte EN-GJL-350:

$$R_m = 350 \text{ N/mm}^2$$

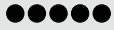
$$E = 108000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,25$$

- a) Auf welche Weise wird der Querschnitt A-B durch die Arbeitskräfte F beansprucht?
- b) Ermitteln Sie den Betrag der Arbeitskräfte F für eine Dehnungsanzeige von $\varepsilon_{\text{DMS}} = 0,1485 \%$
- c) Ermitteln Sie für die höchst beanspruchte Stelle (im Querschnitt A-B) die Sicherheit gegen Bruch. Ist die Sicherheit ausreichend?



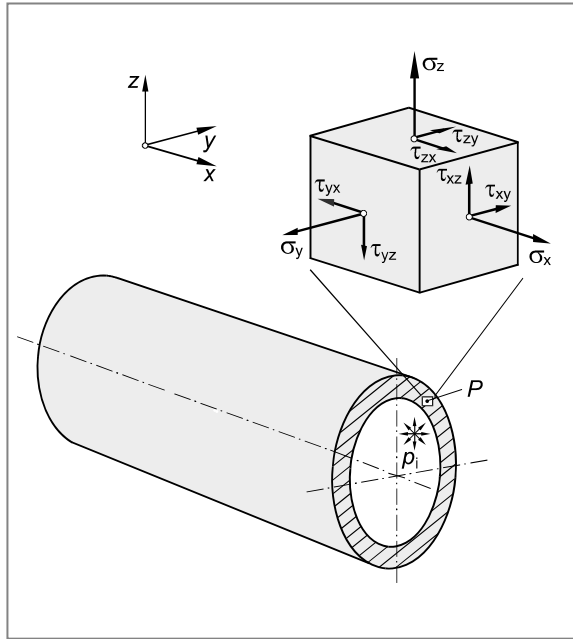
Aufgabe 3.5



Der Spannungszustand im Punkt P einer Hochdruckleitung wird durch die folgenden Spannungskomponenten beschrieben:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 500 \text{ N/mm}^2 & \tau_{xy} &= 250 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_y &= 200 \text{ N/mm}^2 & \tau_{yz} &= 100 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_z &= 300 \text{ N/mm}^2 & \tau_{xz} &= 400 \text{ N/mm}^2\end{aligned}$$

- Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung in einer Schnittebene E_1 , deren Normalenvektor mit dem x - y - z -Koordinatensystem die Winkel $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\gamma = 45^\circ$ einschließt.
- Berechnen Sie die Normalspannung und die Schubspannung in einer Schnittebene E_2 , deren Normalenvektor mit dem x - y - z -Koordinatensystem die Winkel $\alpha = 40,833^\circ$, $\beta = 69,773^\circ$ und $\gamma = 56,291^\circ$ einschließt.



- Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen σ_{H1} , σ_{H2} und σ_{H3} .
- Ermitteln Sie die Hauptspannungsrichtungen im x - y - z -Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie rechnerisch und graphisch die Spannungen σ_{E3} und τ_{E3} in einer Schnittebene E_3 , deren Normalenvektor zu den *Hauptspannungsrichtungen* (zum *Hauptachsensystem*) die Winkel $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 50^\circ$ und $\gamma = 65,4^\circ$ einschließt.

Einführung in die Festigkeitslehre

Lehr- und Übungsbuch

Läpple, V.

2016, XIII, 432 S. 203 Abb., 5 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-10610-2