



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffel:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Grundbelastungsarten

### Zug

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Spannungsermittlung bei reiner Zugbeanspruchung

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

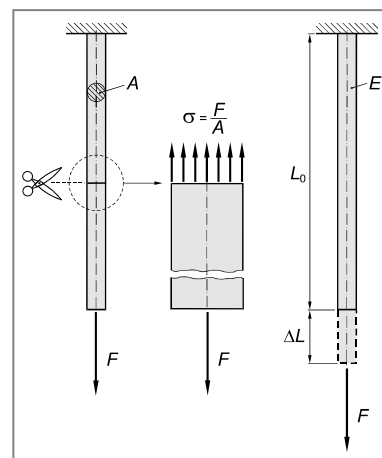
(technische) Dehnung

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Hookesches Gesetz bei einachsiger Beanspruchung

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_1$$

Poissonsches Gesetz



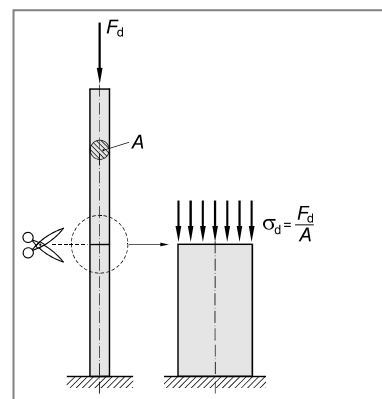
### Druck

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$$

Spannungsermittlung bei reiner Druckbeanspruchung

#### Hinweis:

Ein Versagen unter Druckbeanspruchung kann bei duktilen Werkstoffen durch Fließen oder Knickung, bei spröden Werkstoffen durch Bruch oder Knickung erfolgen.



### Gerade Biegung

$$\sigma(z) = \frac{M_b}{I} \cdot z$$

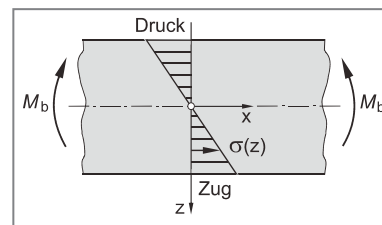
Spannungsverteilung bei gerader, reiner Biegung

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}$$

Spannungsermittlung bei gerader, reiner Biegung

$$z_S = \frac{\sum_i z_i \cdot A_i}{\sum_i A_i}$$

Teilschwerpunktsatz





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lämple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Schub (Abscherung)

$$\tau = \frac{F_a}{A}$$

Mittlere Abscherspannung

$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Definition der Schiebung (Winkelverzerrung)

$$\tau = G \cdot \gamma$$

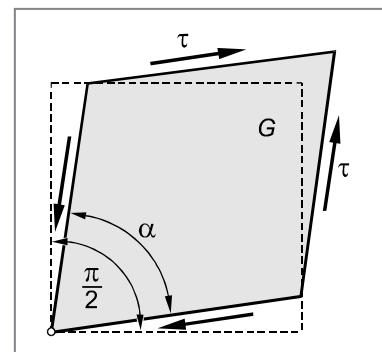
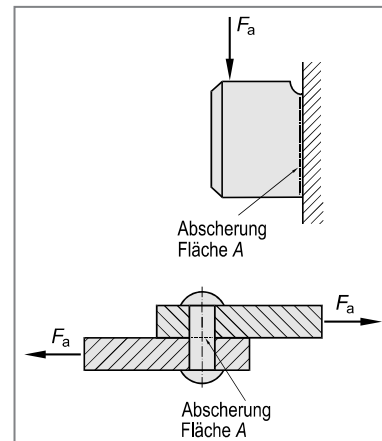
Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Schubmodul

### Hinweise:

1. Zugeordnete Schubspannungen wirken stets in zwei zueinander senkrechten Ebenen des betrachteten Volumenelements. Sie haben den gleichen Betrag und zeigen entweder auf die gemeinsame Kante hin oder von ihr weg.
2. Eine Schiebung  $\gamma$  ist positiv anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des Winkелеlements vergrößert. Verkleinert sich der Winkel, dann ist die Schiebung negativ anzusetzen.



## Torsion kreisförmiger Querschnitte

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Maximale Torsionsschubspannung <sup>1)</sup>

$$\text{mit } W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3 \quad \text{für Vollkreisquerschnitt}$$

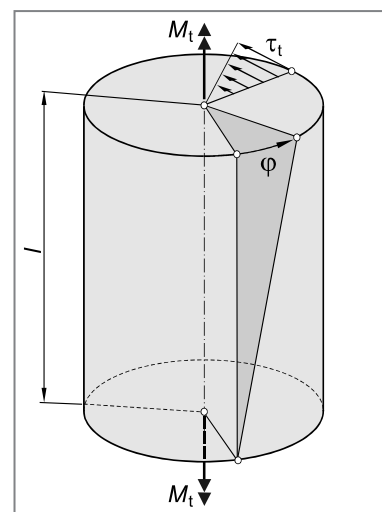
$$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \quad \text{für Kreisringquerschnitt}$$

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

Verdrehwinkel <sup>1)</sup>

$$\varphi \text{ (in Grad)} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \varphi \text{ (in rad)}$$

Umrechnung von Grad- in Bogenmaß



<sup>1)</sup> Nur gültig für gerade prismatische Stäbe mit Vollkreis- oder Kreisringquerschnitt.



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Spannungszustand

### Einachsiger Spannungszustand

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi)$$

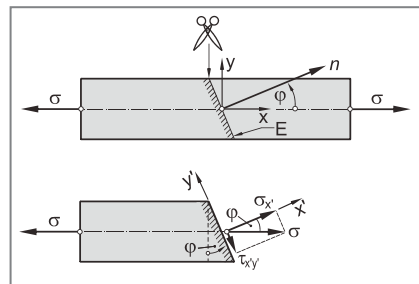
Normalspannung senkrecht zur Schnittebene  $E$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

Schubspannung in der Schnittebene  $E$

$$\left( \sigma_{x'} - \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma}{2} \right)^2$$

Gleichung Mohrscher Spannungskreis



### Zweiachsiger Spannungszustand

Normalspannung senkrecht zur Schnittebene  $E_{x'}$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi$$

Schubspannung in der Schnittebene  $E_{x'}$

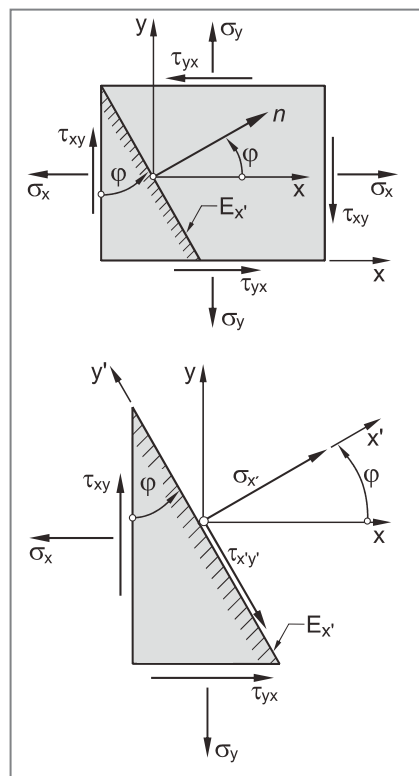
$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi$$

Gleichung des Mohrschen Spannungskreises

$$\left( \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

#### Hinweis:

Die Schubspannung  $\tau_{xy}$  ist positiv (negativ) anzusetzen, falls bei Blick in Richtung der Schubspannung die zugehörige Schnittebene rechts (links) von der Schubspannung liegt.



Berechnung der Hauptnormalspannung

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Berechnung der Hauptnormalspannung



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

### Berechnung der maximalen Schubspannung

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}$$

Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptspannungsrichtung

$$\varphi_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

$$\varphi_{2,1} = \varphi_{1,2} + \frac{\pi}{2}$$

### Dreiachsiger Spannungszustand

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{Spannungstensor}$$

Betrag der Normalspannung in beliebiger (räumlicher) Schnitttrichtung

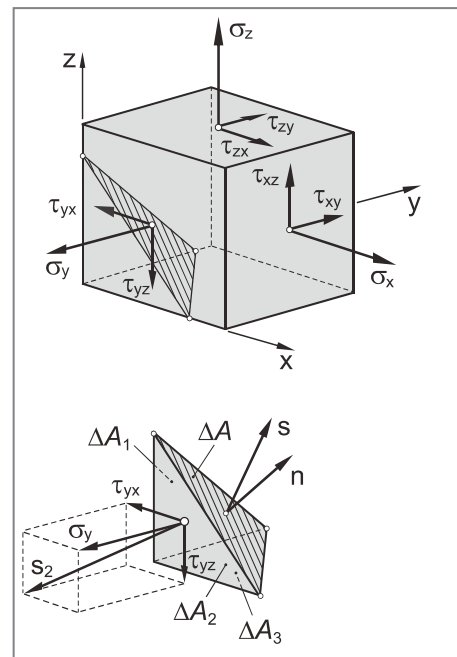
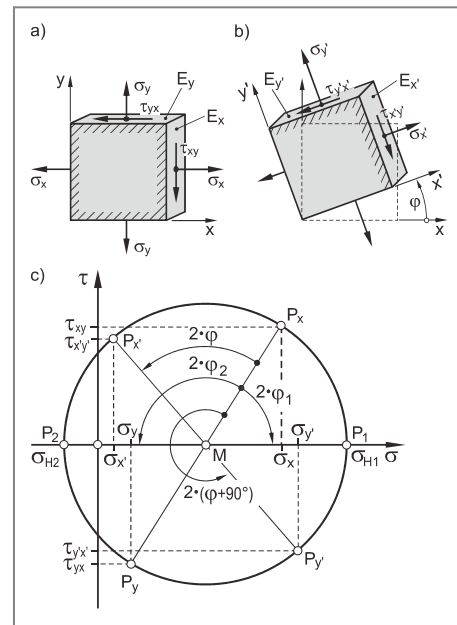
$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \gamma + 2 \cdot (\tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma + \tau_{xz} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha)$$

Betrag der Schubspannung in beliebiger (räumlicher) Schnitttrichtung

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2}$$

mit  $\vec{s} = \bar{S} \cdot \vec{n}$

$$\text{und } \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Verformungszustand

### Definition von Dehnung und Schiebung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

Definition der (technischen) Dehnung

$$\gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

Definition der Schiebung

### Vorzeichenregelung für Schiebungen

Eine Schiebung ist positiv (negativ) anzusetzen, falls sich der ursprünglich rechte Winkel des betrachteten Winkелеlementes vergrößert (verkleinert).

### Zweiachsiger Verformungszustand

Dehnung in  $x'$ -Richtung

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\varphi - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\varphi$$

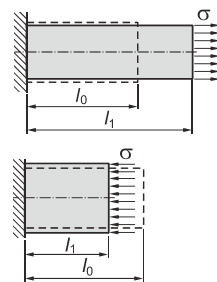
Schiebung mit der  $x'$ -Richtung als Bezug

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos 2\varphi$$

Gleichung des Mohrschen Verformungskreises

$$\left( \varepsilon_{x'} - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{x'y'}}{2} \right)^2 = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

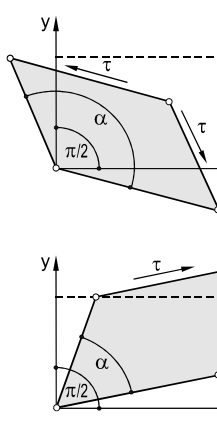
### Dehnung



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} > 0$$

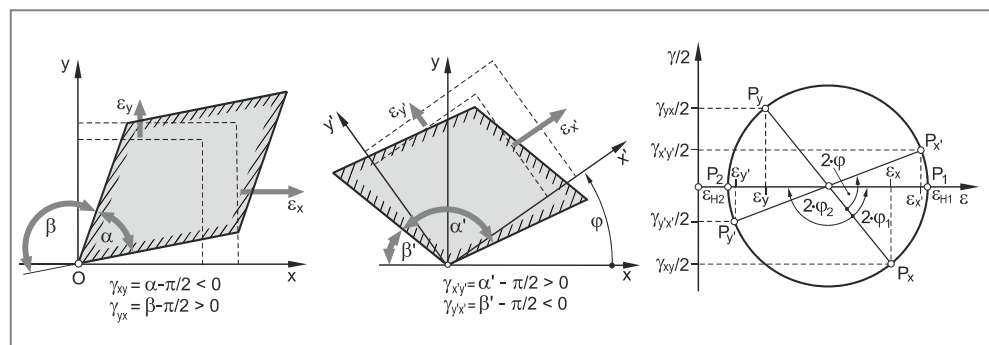
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} < 0$$

### Schiebung



$$\gamma = \alpha - \pi/2 > 0$$

$$\gamma = \alpha - \pi/2 < 0$$





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lämple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Berechnung der Hauptdehnung

$$\varepsilon_{H2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Berechnung der Hauptdehnung

Richtungswinkel zwischen der x-Achse und der ersten oder der zweiten Hauptdehnungsrichtung

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right)$$

(Vorzeichen von  $\gamma_{xy}$  entsprechend Vorzeichenregelung auf vorhergehender Seite)

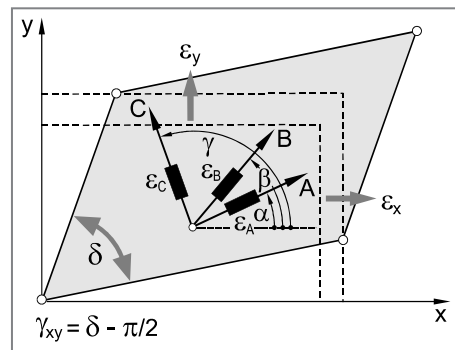
$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + \frac{\pi}{2}$$

## Auswertung dreier beliebig orientierter Dehnungsmessstreifen

$$\varepsilon_A = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\beta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\beta$$

$$\varepsilon_C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 2\gamma - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\gamma$$





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffler:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Elastizitätsgesetze

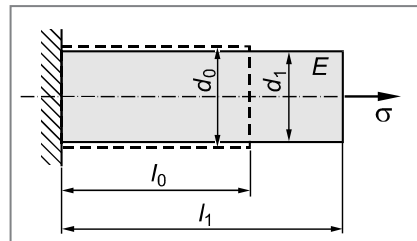
### Formänderungen durch einachsige Normalspannung

Hookesches Gesetz für Normalspannungen

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{l_1 - l_0}{l_0} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

Poissonsches Gesetz

$$\varepsilon_q = -\mu \cdot \varepsilon_l \text{ und } \varepsilon_q = \frac{d_1 - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$



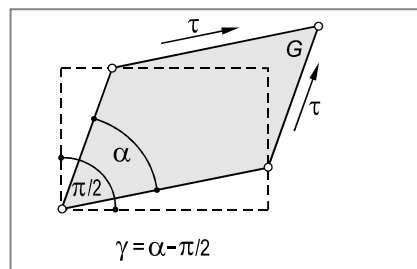
### Formänderungen durch Schubspannungen

$$\tau = G \cdot \gamma$$

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Zusammenhang zwischen den elastischen Werkstoffkonstanten  $E$ ,  $G$  und  $\mu$



### Formänderungen beim ebenen (zweiachsigen) Spannungszustand

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst)

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y)$$

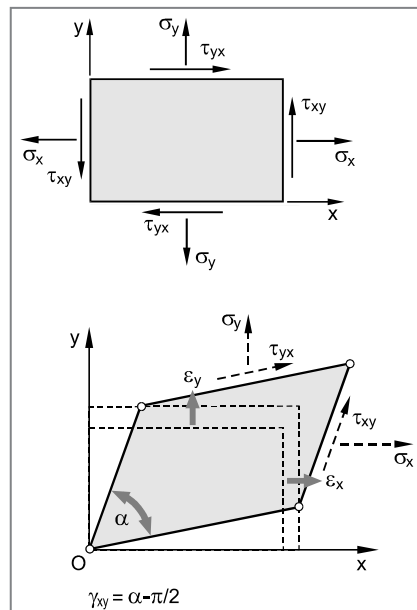
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)$$

$$\sigma_z = 0$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst)

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \text{ bzw. } \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lämple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Formänderungen beim allgemeinen (dreiachsigen) Spannungszustand

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Dehnungen aufgelöst)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]$$

Hookesches Gesetz für Normalspannungen (nach den Spannungen aufgelöst)

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

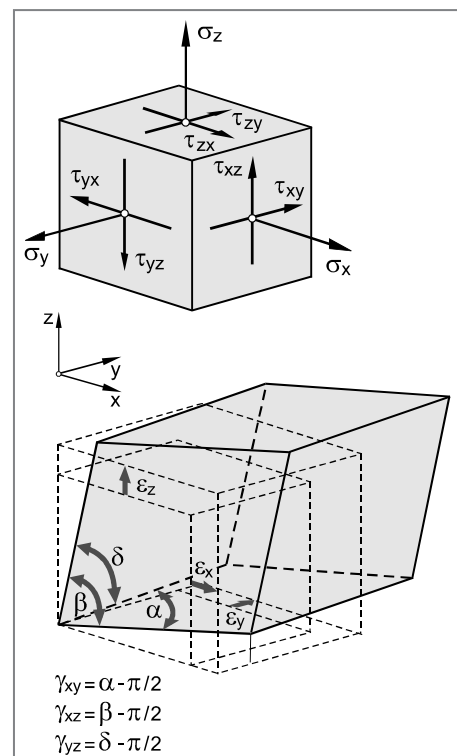
$$\sigma_z = \frac{E}{1+\mu} \cdot \left[ \varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

Hookesches Gesetz für Schubbeanspruchung

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Festigkeitshypothesen

### Normalspannungshypothese (NH)

Vergleichsspannung nach der NH (in **Hauptnormalspannungen**)

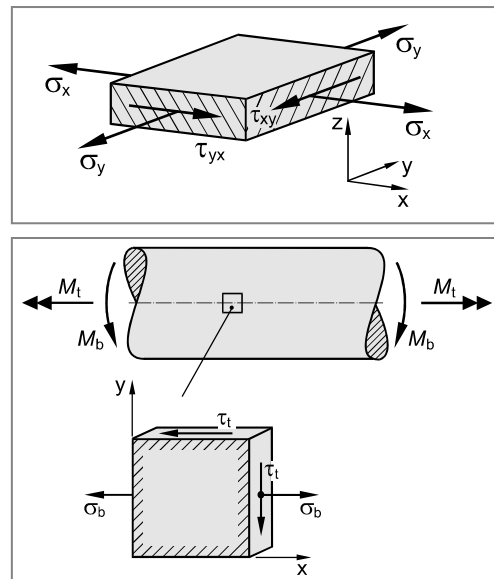
$$\sigma_{VNH} = \sigma_1$$

Vergleichsspannung nach der NH (in **Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand**)

$$\sigma_{VNH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der NH (in **Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion**)<sup>1)</sup>

$$\sigma_{VNH} = \frac{\sigma_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_t^2}$$



### Schubspannungshypothese (SH)

$$\sigma_{VSH} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{VSH} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{VSH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 4 \cdot \tau_t^2}$$

Vergleichsspannung nach der SH (in **Hauptnormalspannungen**)

Vergleichsspannung nach der SH (in **Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand**)

Gilt nur, falls  $\sigma_x \cdot \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$

Vergleichsspannung nach der SH (in **Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand**)

Gilt nur, falls  $\sigma_x \cdot \sigma_y > \tau_{xy}^2$

Vergleichsspannung nach der NH (in **Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion**)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> An die Stelle der Biegebeanspruchung kann auch eine Zug- oder Druckbeanspruchung treten.  
An die Stelle der Torsionsbeanspruchung kann auch eine Abscherbeanspruchung treten.



### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Läpple:  
Einführung in die Festigkeitslehre  
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016  
ISBN 978-3-658-10610-2

### Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH)

$$\sigma_{\text{VGEH}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH  
(in **Hauptnormalspannungen**)

$$\sigma_{\text{VGEH}} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH (in **Lastspannungen bei zweiachsigem Spannungszustand**)

$$\sigma_{\text{VGEH}} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$$

Vergleichsspannung nach der GEH (in **Lastspannungen bei Biegebeanspruchung mit überlagerter Torsion**)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> An die Stelle der Biegebeanspruchung kann auch eine Zug- oder Druckbeanspruchung treten.  
An die Stelle der Torsionsbeanspruchung kann auch eine Abscherbeanspruchung treten.



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffler:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

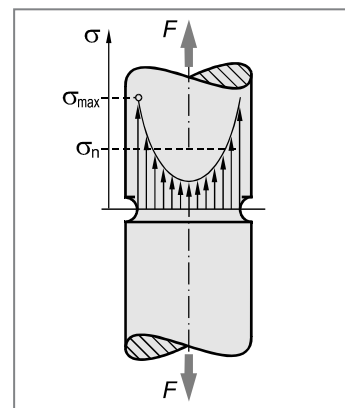
## Kerbwirkung

### Formzahl

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_k = \frac{\tau_{\max}}{\tau_n} \quad \text{Definition der Formzahl}$$

### Bauteilverhalten spröder Werkstoffe

$$\sigma_n \leq \frac{R_m}{\alpha_k \cdot S_B} \quad \text{Festigkeitsbedingung für gekerbte Bauteile aus spröden Werkstoffen}$$



### Bauteilverhalten duktiler Werkstoffe

Äußere Beanspruchung bei Fließbeginn eines gekerbten Bauteils<sup>1)</sup>

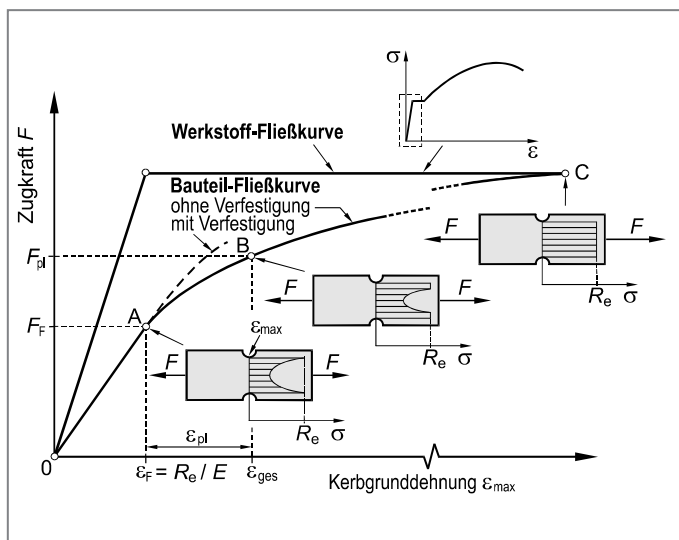
$$F_F = \frac{R_e}{\alpha_k} \cdot A_n$$

Äußere Beanspruchung mit Erreichen einer vorgegebenen plastischen Verformung<sup>1)</sup>

$$F_{pl} = n_{pl} \cdot F_F$$

Plastische Stützziffer

$$n_{pl} = \sqrt{\frac{\epsilon_{ges}}{\epsilon_F}} = \sqrt{1 + \frac{\epsilon_{pl}}{\epsilon_F}}$$



<sup>1)</sup> An die Stelle der (Zug-)Kraft  $F$  können auch andere äußere Belastungsgrößen wie zum Beispiel Druckkraft  $F_d$ , Biegemoment  $M_b$ , Torsionsmoment  $M_t$  oder Innendruck  $p_i$  treten.



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffler:

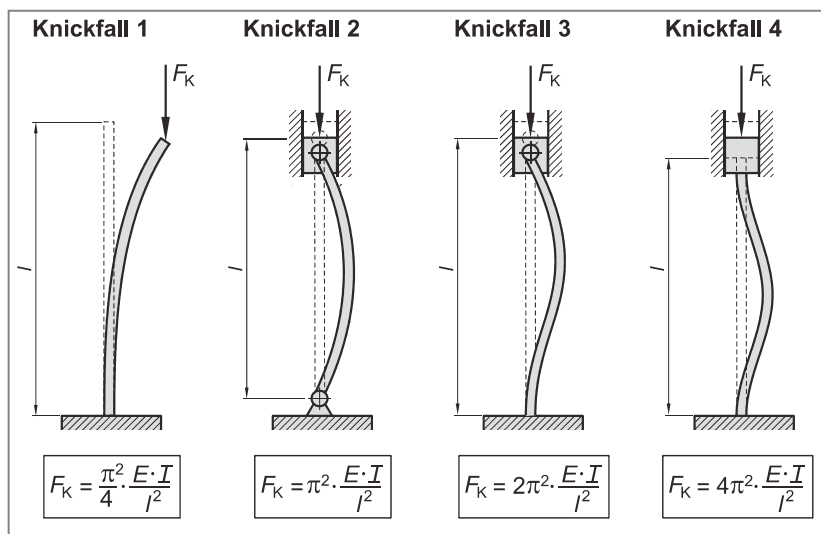
Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Knickung

### Eulersche Knickfälle - Knickkraft



### Knickspannung

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad \text{Knickspannung}$$

### Zulässige Spannungen

Duktile Werkstoffe

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dF}}{S_F} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma_{d0,2}}{S_F} \quad \text{mit } S_F = 1,2 \dots 2,0 \quad \text{Versagen durch Fließen}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad \text{Versagen durch Knickung}$$

Spröde Werkstoffe

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B} \quad \text{mit } S_B = 4,0 \dots 9,0 \quad \text{Versagen durch Bruch}$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K} \quad \text{mit } S_K = 2,5 \dots 5,0 \quad \text{Versagen durch Knickung}$$



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

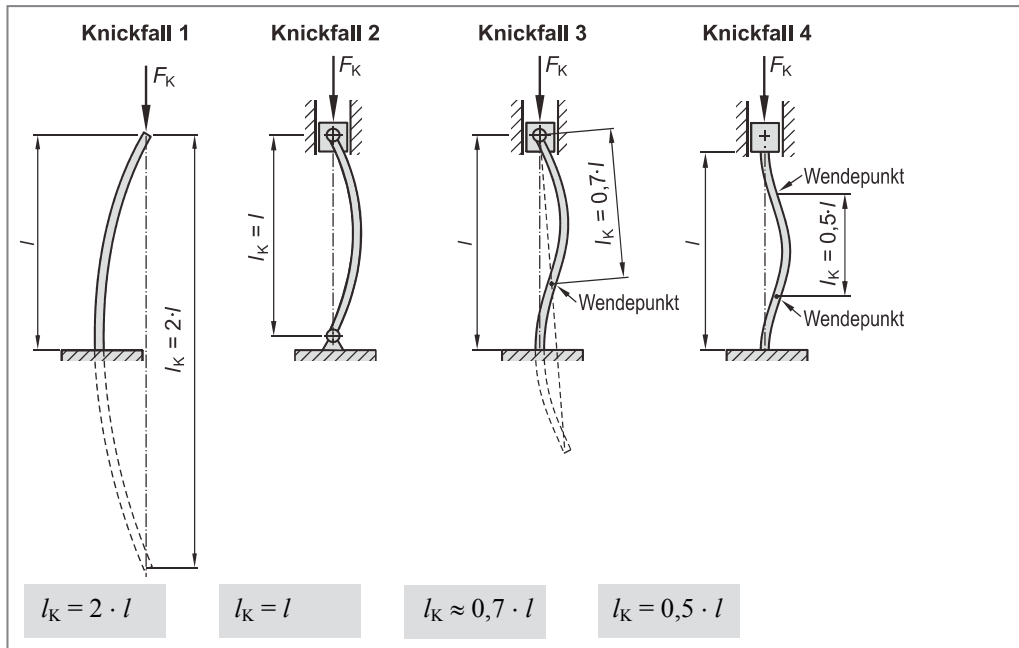
Volker Löffler:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Knicklänge



## Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{l_K}{\sqrt{I/A}}$$

Schlankheitsgrad  
(Definition)

## Knickspannungsdiagramm

$$\sigma_K = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

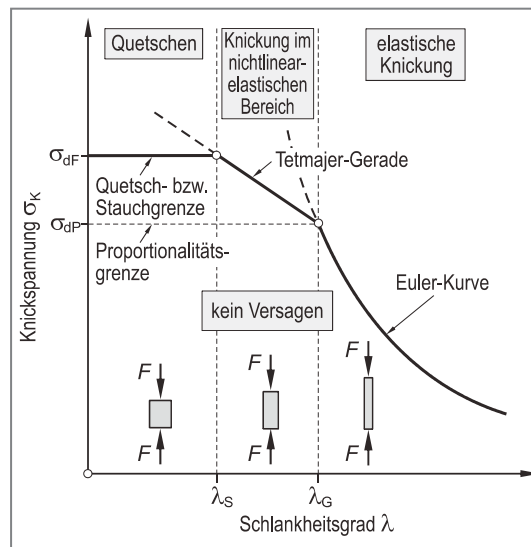
Euler-Kurve

$$\sigma_K = a - b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

Tetmajer-Gerade<sup>1)</sup>

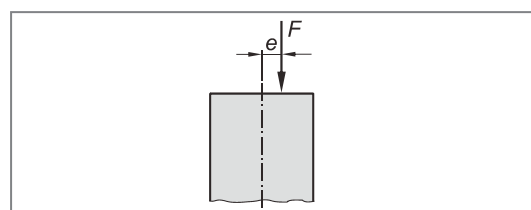
$$\lambda_G = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{dP}}}$$

Grenzschlankheitsgrad für elastische Knickung



## Biegeknickung

$$\sigma_{ges} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{W_b \cdot \cos\left(\frac{l_K}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}\right)}$$



<sup>1)</sup> Koeffizienten der Tetmajer-Gleichung siehe Lehrbuch Kapitel 8.5.



### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lämple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Schiefe Biegung

### Flächenmomente 1. Ordnung

$$H_y = \int_A z \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der y-Achse}$$

$$H_z = \int_A y \cdot dA \quad \text{Flächenmoment 1. Ordnung bezüglich der z-Achse}$$

### Flächenmomente 2. Ordnung

#### Axiale Flächenmomente

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der y-Achse}$$

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der z-Achse}$$

#### Polares Flächenmoment

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA \quad \text{Polares Flächenmoment}$$

#### Gemischtes Flächenmoment

$$I_{yz} = - \int_A y \cdot z \cdot dA \quad \text{Gemischtes Flächenmoment bezüglich des y-z-Koordinatensystems}$$

### Parallelverschiebung des Koordinatensystems

#### Axiales Flächenmoment

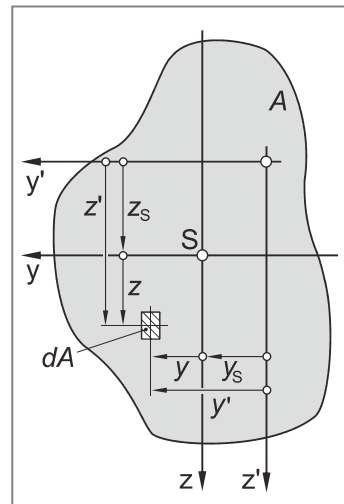
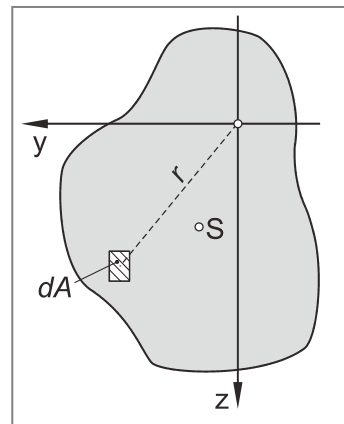
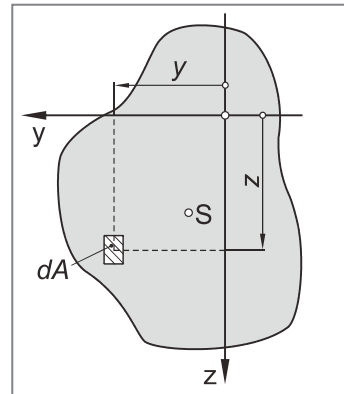
$$I_{y'} = I_y + z_S^2 \cdot A \quad \text{Axiales Flächenmoment 2. Ordnung bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen}$$

#### Gemischtes Flächenmoment

$$I_{y'z'} = I_{yz} - y_S \cdot z_S \cdot A \quad \text{Gemischtes Flächenmoment bei einer Parallelverschiebung der Koordinatenachsen}$$

### Anmerkungen zum gemischten Flächenmoment:

1. Das gemischte Flächenmoment ist in Bezug auf ein die Symmetrieachse beinhaltendes Koordinatensystem Null.
2. Das gemischte Flächenmoment ändert seinen Betrag nicht, falls nur eine Achse parallel verschoben wird.





### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:  
Einführung in die Festigkeitslehre  
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016  
ISBN 978-3-658-10610-2

### Drehung des Koordinatensystems um den Flächenschwerpunkt

$$I_{\eta} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi + I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

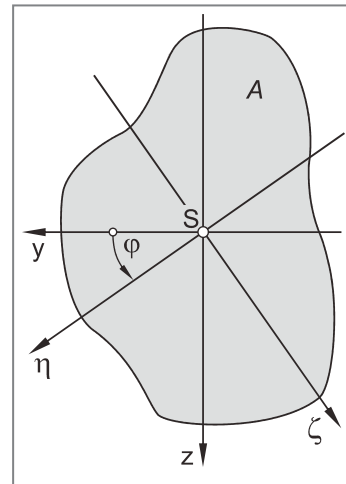
$$I_{\zeta} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos 2\varphi - I_{yz} \cdot \sin 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin 2\varphi + I_{yz} \cdot \cos 2\varphi$$

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z}\right)$$

$$\varphi_{2;1} = \varphi_{1;2} + 90^\circ$$

Richtungswinkel zwischen der y-Achse und der ersten bzw. zweiten Hauptachse



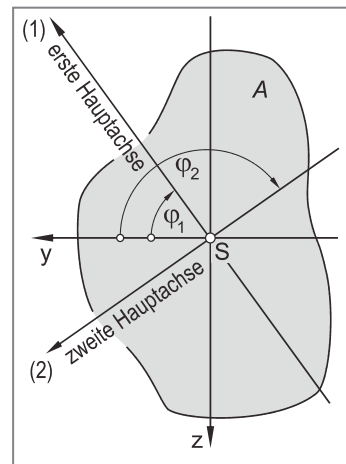
### Hauptflächenmomente

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Maximales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)

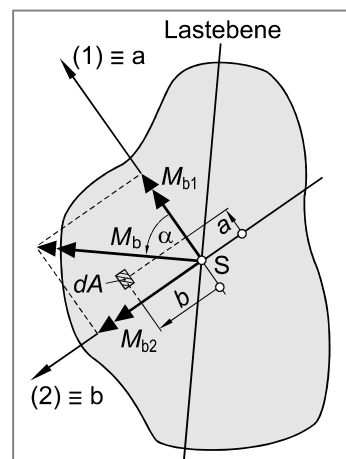
$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

Minimales Flächenmoment 2. Ordnung (Hauptflächenmoment)



### Spannungsermittlung bei schiefer Biegung

1. Ermittlung der Lage der beiden Hauptachsen (1) und (2) der Querschnittsfläche sowie der zugehörigen Hauptflächenmomente  $I_1$  und  $I_2$ .
2. Festlegung eines a-b-Koordinatensystems: Die a-Koordinatenrichtung soll mit der Richtung der großen Hauptachse ( $a \equiv (1)$ ), die b-Koordinatenrichtung mit der kleinen Hauptachse zusammenfallen ( $b \equiv (2)$ ). Die b-Richtung muss dabei aus der a-Richtung durch eine Drehung um  $90^\circ$  im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhreizersinn) hervorgehen.
3. Einführung des Richtungswinkels  $\alpha$  zwischen der a-Achse und dem Biegemomentenvektor  $M_b$ . Der Winkel wird von der positiven a-Achse aus abgetragen und ist im mathematisch positiven Sinn positiv und in die Gegenrichtung negativ zu berücksichtigen.





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffler:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

$$\sigma_x = M_b \cdot \left( \frac{\cos \alpha}{I_1} \cdot b - \frac{\sin \alpha}{I_2} \cdot a \right)$$

Resultierende Biegespannung in einem Flächenelement  $dA$  (Koordinaten  $a$  und  $b$  bezüglich des Hauptachsensystems)

### Nulllinie

$$b(a) = \frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \cdot a$$

Gleichung der Nulllinie im a-b-Koordinatensystem

$$\beta = \arctan \left( \frac{I_1}{I_2} \cdot \tan \alpha \right)$$

Winkel zwischen a-Achse und Nulllinie

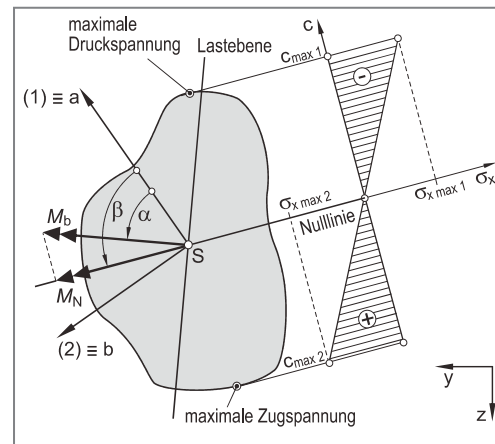
### Ermittlung der maximalen Biegespannung mit Hilfe der Nulllinie

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_{bN}}{I_N} \cdot c_{\max}$$

Maximale Biegespannung in der Querschnittfläche

$$\text{mit } M_{bN} = M_b \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

$$\text{und } I_N = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cdot \cos 2\beta$$





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Querkraftschub

### Grundgleichung

$$\tau_l(z) = \tau_q(z) = \frac{Q \cdot H_y(z)}{b(z) \cdot I_y}$$

Grundgleichung zur Ermittlung der Schubspannungen durch Querkräfte bei Biegung

### Schubspannungsverteilung durch Querkraftschub ausgewählter Querschnitte

Querschnittsfläche	Schubspannungsverteilung	Maximale Schubspannung
<b>Rechteckquerschnitt</b> 	$\tau_q(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \left( 1 - \frac{4 \cdot z^2}{h^2} \right)$	$\tau_{q \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \tau_m$  mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
<b>Vollkreisquerschnitt</b> 	Vertikalkomponente: $\tau_q(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \left( 1 - \frac{z^2}{r^2} \right)$  Resultierende Randschubspannung: $\tau_r(z) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}$	$\tau_{q \max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \tau_m$  mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$
<b>Kreisring (dünnwandig)</b> 	$\tau(\varphi) = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} \cdot \cos \varphi$	$\tau_{\max} = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot t} = 2 \cdot \tau_m$  mit $\tau_m = \frac{Q}{A}$



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Läpple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Anwendung auf dünnwandige Profilträger

<p><b>C-Profil</b></p>	<p>Horizontale Schubspannungen im Flansch</p> $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta \quad \tau_{hF \max} = \frac{Q \cdot b}{I_y} \cdot \eta$ <p>Vertikale Schubspannungen im Steg (<math>-a \leq z \leq a</math>)</p> $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[ b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left( 1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right] \quad \tau_{qS \max} = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[ b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$
<p><b>I-Profil</b></p>	<p>Horizontale Schubspannungen im Flansch (<math>0 \leq \eta \leq b/2</math>)</p> $\tau_{hF}(\eta) = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \eta \quad \tau_{hF \max} = \frac{Q \cdot c}{I_y} \cdot \frac{b}{2}$ <p>Vertikale Schubspannungen im Steg (<math>-a \leq z \leq a</math>)</p> $\tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[ b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \cdot \left( 1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \right] \quad \tau_{qS}(z) = \frac{Q}{I_y} \cdot \left[ b \cdot c \cdot \frac{t_F}{t_S} + \frac{a^2}{2} \right]$

## Anwendung auf genietete Träger

$$\tau_{N \max} = \frac{4}{3 \cdot n} \cdot \frac{Q \cdot H_y(z) \cdot t}{I_y \cdot \pi r^2}$$

Maximale Schubspannung in den Gurnieten eines Profilträgers unter Querkraftschub (gilt nur für die in der Abbildung dargestellten geometrischen Verhältnisse)

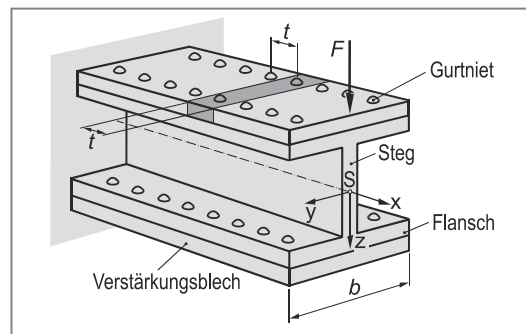
$H_y(z)$  Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche  $A_R$  bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$I_y$  Axiales Flächenmoment der gesamten Querschnittsfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$n$  Anzahl paralleler Nieten

$r$  Radius des Niets

$t$  Nietenteilung





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Läpple:  
Einführung in die Festigkeitslehre  
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016  
ISBN 978-3-658-10610-2

### Anwendung auf geschweißte Träger

$$\tau_S = \frac{Q \cdot H_y(z)}{2a \cdot I_y} \cdot \frac{t}{l_S}$$

Schubspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)

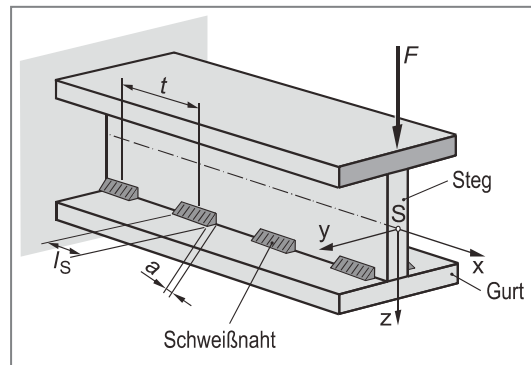
$H_y(z)$  Flächenmoment 1. Ordnung (statisches Moment) der Restfläche  $A_R$  bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

$I_y$  Axiales Flächenmoment der *gesamten* Querschnittsfläche bezüglich der y-Achse durch den Flächenschwerpunkt

Vergleichsspannung in der Schweißnaht zwischen Gurt- und Stegblech eines Profilträgers unter Querkraftschub (zwei parallele Schweißnähte)

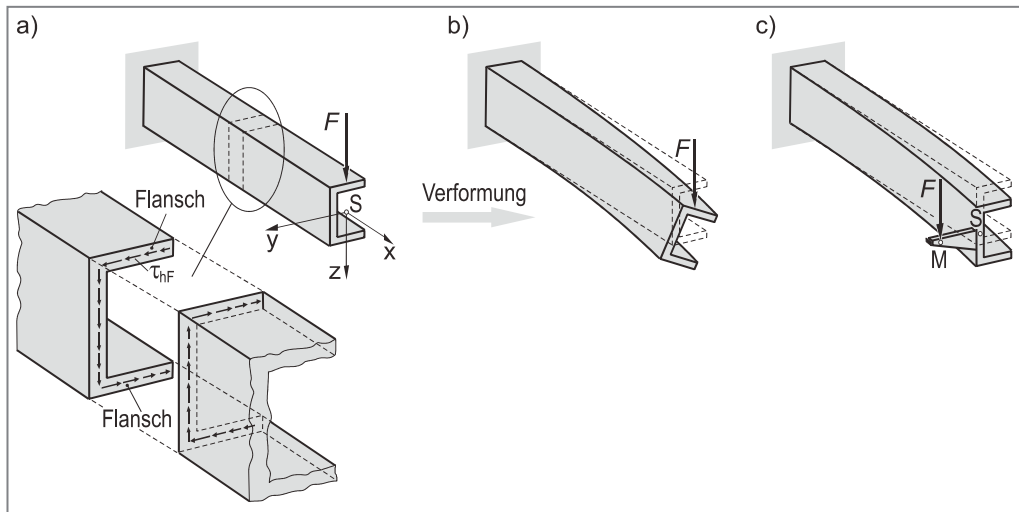
$$\sigma_{VGEH} = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_s^2}$$

mit  $\sigma_b = \frac{M_b}{I} \cdot z$  und  $\tau_s = \frac{Q \cdot H_y(z)}{2a \cdot I_y} \cdot \frac{t}{l_S}$



### Schubmittelpunkt

In dünnwandigen, offenen Profilen (z. B. Abkantprofile aus Blech) können die Schubspannungen im Flansch ( $\tau_{HF}$ ) eine Verdrehung um die Längsachse bewirken. Die aus den Schubspannungen im Flansch (Abbildung a) resultierenden Flansch-Schubkräfte bewirken ein Kräftepaar, die eine Verdrehung des Profils um die Längsachse verursachen (Abbildung b). Diese Verdrehung kann verhindert werden, sofern die Wirkungslinie der Kraft  $F$  durch den Schubmittelpunkt  $M$  geht und dadurch ein den Flansch-Schubkräften entgegengesetzt wirkendes Drehmoment erzeugt (Abbildung c).





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lämple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

## Torsion nicht kreisförmiger Querschnitte

### Torsion dünnwandiger, geschlossener Hohlprofile

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{2 \cdot A_m \cdot t_{\min}} \quad 1. \text{ Bredtsche Formel}$$

### Torsion dünnwandiger, offener Hohlprofile

Torsionsflächenmoment (Drillwiderstand) eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$$

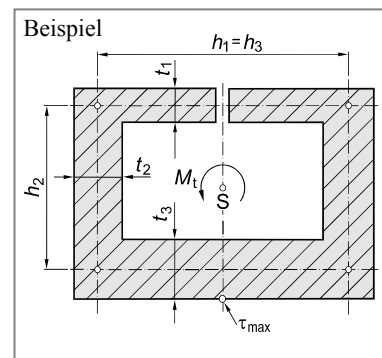
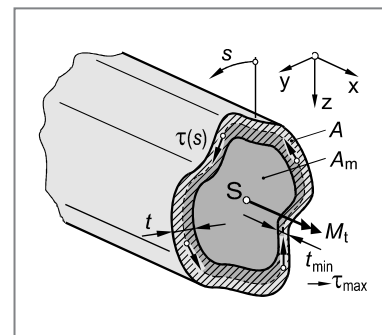
Maximale Schubspannung bei Torsion eines aus schmalen Rechtecken zusammengesetzten offenen Hohlprofils

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t} = \frac{3 \cdot t_{\max}}{\sum_i h_i \cdot t_i^3} \cdot M_t$$

### Grundgleichungen zur Torsion ausgewählter Querschnitte

$$\tau_{\max} = \tau_t = \frac{M_t}{W_t}$$

Maximale Torsionsschubspannung in einem geraden prismatischen Stab mit beliebiger Querschnittform



Torsionsflächenmomente  $I_t$  und Torsionswiderstandsmomente  $W_t$  bedeutsamer Querschnittflächen

Profil	Torsionsflächenmoment $I_t$	Torsionswiderstandsmoment $W_t$
<b>Vollkreis</b> 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot d^3$
<b>Kreisring</b> <sup>1)</sup> 	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} \cdot (D^4 - d^4)$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$

<sup>1)</sup> dickwandig



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

Torsionsflächenmomente  $I_t$  und Torsionswiderstandsmomente  $W_t$  bedeutsamer Querschnittflächen

Profil	Torsionsflächenmoment $I_t$	Torsionswiderstandsmoment $W_t$
<b>Rechteck</b> 	$I_t = c_1 \cdot h \cdot b^3$ <p>mit</p> $c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left( 1 - \frac{0,630}{h/b} + \frac{0,052}{(h/b)^5} \right) \quad \text{und} \quad c_2 = 1 - \frac{0,650}{1 + (h/b)^3}$	$W_t = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2$
<b>Quadrat</b> 	$I_t = 0,141 \cdot a^4$	$W_t = 0,208 \cdot a^3$
<b>Ellipse</b> 	$I_t = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{a^2 + b^2}$	$W_t = \frac{\pi}{16} \cdot a \cdot b^2$
<b>Gleichseitiges Dreieck</b> 	$I_t = \frac{a^4}{46,2}$	$W_t = \frac{a^3}{20}$
<b>Dünnwandiges, geschlossenes Kreisrohr (<math>t = \text{konst.}</math>)</b> 	$I_t = \frac{\pi}{4} \cdot d_m^3 \cdot t$	$W_t = \frac{\pi}{2} \cdot d_m^2 \cdot t$
<b>Dünnwandige offene Hohlquerschnitte <sup>1)</sup></b> 	$I_t = \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$	$W_t = \frac{1}{3 \cdot t_{\max}} \cdot \sum_i h_i \cdot t_i^3$

<sup>1)</sup> aus schmalen Rechteckquerschnitten zusammengesetzt



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

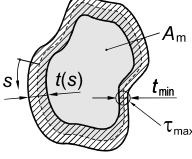
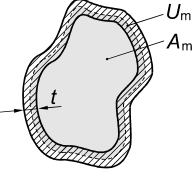
Volker Läßle:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

Torsionsflächenmomente  $I_t$  und Torsionswiderstandsmomente  $W_t$  bedeutsamer Querschnittflächen

Profil	Torsionsflächenmoment $I_t$	Torsionswiderstandsmoment $W_t$
<b>Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit veränderlicher Wanddicke <sup>1)</sup></b> 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t_{\min}$
<b>Dünnwandige, geschlossene Hohlquerschnitte mit konstanter Wanddicke <sup>2)</sup></b> 	$I_t = \frac{4 \cdot A_m^2 \cdot t}{U_m}$	$W_t = 2 \cdot A_m \cdot t$

<sup>1)</sup>  $\oint ds / t(s)$  ist das Linienintegral längs der Profilmittellinie.

<sup>2)</sup>  $U_m$  ist die Länge der Mittellinie.



### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Läpple:  
Einführung in die Festigkeitslehre  
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016  
ISBN 978-3-658-10610-2

## Behälter unter Innen- und Außendruck

### Dünnwandige Behälter unter Innendruck

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{2 \cdot s}$$

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck

$$\sigma_a = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s} = \frac{\sigma_t}{2}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck

$$\sigma_r = -\frac{p_i}{2}$$

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck (Mittelwert)

$$\sigma_{VSH} = p_i \cdot \frac{d_m}{2 \cdot s}$$

Vergleichsspannung eines dünnwandigen Behälters unter Innendruck unter Anwendung der Schubspannungshypothese

### Dünnwandige Behälter unter Außendruck

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{2 \cdot s}$$

Tangentialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck

$$\sigma_a = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Axialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck (Mittelwert)

$$\sigma_r = -\frac{p_a}{2}$$

Radialspannung eines dünnwandigen Behälters unter Außendruck

### Dünnwandige Hohlkugel unter Innen- bzw. Außendruck

$$\sigma_t = p_i \cdot \frac{d_i}{4 \cdot s}$$

Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Innendruck

$$\sigma_t = -p_a \cdot \frac{d_a}{4 \cdot s}$$

Tangentialspannung einer dünnwandigen Hohlkugel unter Außendruck

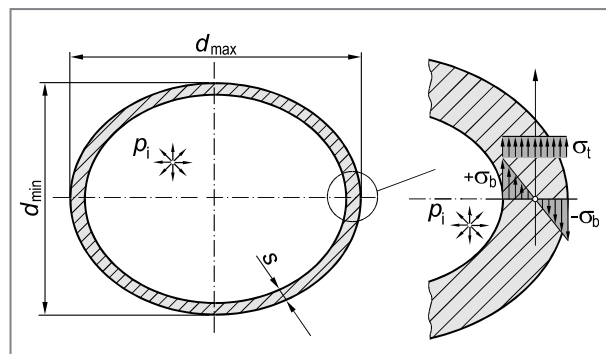
### Dünnwandige Behälter mit elliptischer Unrundheit

Biegespannung in der Wand eines unrunder, dünnwandigen Behälters

$$\sigma_b = \pm \frac{3}{4} \cdot p_i \cdot \left( \frac{d_i}{s} \right)^2 \cdot \kappa \cdot f$$

$$\text{mit } \kappa = \frac{2 \cdot (d_{\max} - d_{\min})}{d_{\max} + d_{\min}}$$

$$\text{und } f = \frac{1}{1 + \frac{1 - \mu^2}{2 \cdot E} \cdot p_i \cdot \left( \frac{d_i}{s} \right)^3}$$



Die Biegespannung  $\sigma_b$  überlagert sich der Tangentialspannung  $\sigma_t$ .



### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Löffel:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

### Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

Elastischer Zustand unter Innen- und Außendruck			
Spannungsverläufe		Spannungen am Innenrand ( $r = r_i$ )	Spannungen am Außenrand ( $r = r_a$ )
<b>Tangentialspannung</b>	$\sigma_t = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r^2 - r_i^2} \cdot \left( 1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ti} = p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r_i^2 - r_i^2}$	$\sigma_{ta} = p_i \cdot \frac{2 \cdot r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - p_a \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}$
<b>Axialspannung</b>	$\sigma_a = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{ai} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$	$\sigma_{aa} = \frac{p_i \cdot r_i^2 - p_a \cdot r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}$
<b>Radialspannung</b>	$\sigma_r = -p_i \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right) - p_a \cdot \frac{r_a^2}{r^2 - r_i^2} \cdot \left( 1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right)$	$\sigma_{ri} = -p_i$	$\sigma_{ra} = -p_a$
Teilplastischer Zustand unter Innendruck - vollplastischer Innenring ( $r_i \leq r \leq c$ )			
<b>Innendruck bei Fließbeginn:</b> $p_{iFB} = R_e \cdot \frac{r_a^2 - r_i^2}{\sqrt{3} \cdot r_i^2}$		Spannungen am Innenrand ( $r = r_i$ )	Spannungen am Außenrand ( $r = c$ )
<b>Tangentialspannung</b>	$\sigma_t = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 + 1$	$\sigma_{ti} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r_i}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 + 1$	$\sigma_{ta} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$
<b>Axialspannung</b>	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r_i}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( \frac{c}{r_a} \right)^2$
<b>Radialspannung</b>	$\sigma_r = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 - 1$	$\sigma_{ri} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \ln \left( \frac{r_i}{c} \right)^2 + \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 - 1$	$\sigma_{ra} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 - 1 \right)$



### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

Fortsetzung: Berechnungsformeln für den dickwandigen Behälter

Teilplastischer Zustand unter Innendruck - elastischer Außenring ( $c < r \leq r_a$ )			
Zusammenhang zwischen Innendruck und Grenzzustand $c$ :		Spannungen am Innenrand ( $r = c$ )	Spannungen am Außenrand ( $r = r_a$ )
$p_{ic} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( \ln \left( \frac{c}{r_i} \right)^2 - \left( \frac{c}{r_a} \right)^2 + 1 \right)$			
Tangentialspannung	$\sigma_t = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right)$	$\sigma_{ti} = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{c^2} + 1 \right)$	$\sigma_{ta} = 2 \cdot \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2}$
Radialspannung	$\sigma_r = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right)$	$\sigma_{ri} = -\frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c^2}{r_a^2} \cdot \left( \frac{r_a^2}{c^2} - 1 \right)$	$\sigma_{ra} = 0$
Vollplastischer Zustand unter Innendruck			
Innendruck mit Erreichen des vollplastischen Zustandes:		Spannungen am Innenrand ( $r = r_i$ )	Spannungen am Außenrand ( $r = r_a$ )
$p_{i \text{ VPL}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)$			
Tangentialspannung	$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left( 1 - \ln \left( \frac{r_a}{r} \right) \right)$	$\sigma_{ti} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \left( 1 - \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \right)$	$\sigma_{ta} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e$
Axialspannung	$\sigma_a = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r} \right) \right)$	$\sigma_{ai} = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \cdot \left( 1 - 2 \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \right)$	$\sigma_{aa} = \frac{R_e}{\sqrt{3}}$
Radialspannung	$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r} \right)$	$\sigma_{ri} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot R_e \cdot \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)$	$\sigma_{ra} = 0$



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

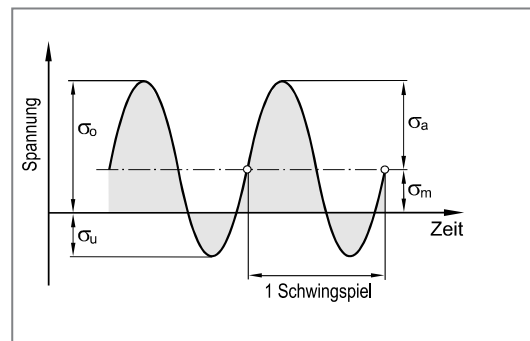
## Werkstoffermüdung und Schwingfestigkeit

$$\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2} \quad \text{Mittelspannung}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2} \quad \text{Spannungsamplitude}$$

$$R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o} \quad \text{Spannungsverhältnis}$$

$$N = f \cdot \Delta t \quad \text{Schwingspielzahl}$$



### Wöhlerkurve

#### • Bereich der quasi-statischen Festigkeit

Zum Bruch führende Spannungsamplitude

$$\sigma_{A \max} = R_m \cdot \frac{1-R}{2}$$

#### • Zeitfestigkeitsbereich

Gleichung der Wöhlerkurve im Zeitfestigkeitsbereich

$$\sigma_A = \sigma_{A1} \cdot \left( \frac{N}{N_1} \right)^{-\frac{1}{k}}$$

$$N = N_1 \cdot \left( \frac{\sigma_A}{\sigma_{A1}} \right)^{-k}$$

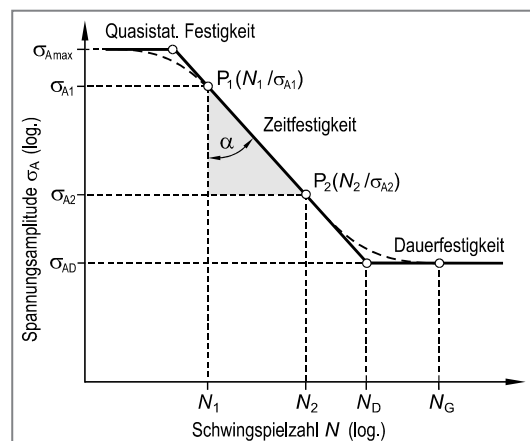
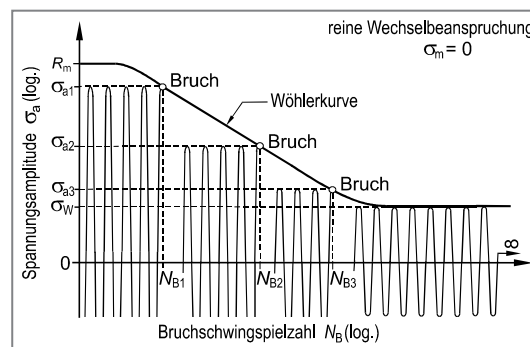
Neigungsexponent

$$k = - \frac{\lg \left( \frac{N_1}{N_2} \right)}{\lg \left( \frac{\sigma_{A1}}{\sigma_{A2}} \right)}$$

$$k = \tan \alpha$$

#### • Bereich der Dauerfestigkeit

$$\sigma_{AD} = \text{konstant}$$





### Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

### Dauerfestigkeitskennwerte unter rein wechselnder Beanspruchung

Werkstoffsorte / Werkstoffgruppe	Dauerfestigkeitskennwert <sup>1)</sup>			
	Zug-Druck- Wechselfestigkeit $\sigma_{zdw}$ <sup>2)</sup>	Biege- wechselfestigkeit $\sigma_{bw}$ <sup>7) 8)</sup>	Schub- wechselfestigkeit $\tau_{sw}$ <sup>2)</sup>	Torsions- wechselfestigkeit $\tau_{tw}$ <sup>7) 8) 9)</sup>
Walzstahl, allgemein <sup>3) 4)</sup>	$0,45 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Einsatzstahl <sup>4)</sup>	$0,40 \cdot R_m$ <sup>5)</sup>	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$ <sup>5)</sup>	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Nichtrostender Stahl	$0,40 \cdot R_m$ <sup>6)</sup>	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Schmiedestahl <sup>4)</sup>	$0,40 \cdot R_m$ <sup>6)</sup>	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{bw}$
Stahlguss	$0,34 \cdot R_m$	$1,15 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$	k. A.
Gusseisen mit Lamellengraphit	$0,30 \cdot R_m$	$1,50 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,850 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,8 \dots 0,9 \cdot \sigma_{zdw}$
Gusseisen mit Kugelgraphit	$0,34 \cdot R_m$	$1,30 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,650 \cdot \sigma_{zdw}$	k. A.
Temperguss	$0,30 \cdot R_m$	$1,40 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,750 \cdot \sigma_{zdw}$	k. A.
Al-Knetlegierungen	$0,30 \cdot R_m$	$1,1 \dots 1,3 \cdot \sigma_{zdw}$	$0,577 \cdot \sigma_{zdw}$	k. A.
Al-Gusslegierungen	$0,30 \cdot R_m$	k. A.	$0,750 \cdot \sigma_{zdw}$	k. A.

<sup>1)</sup> Werkstoffkennwerte sind in N/mm<sup>2</sup> einzusetzen. Anhaltswerte für ungekerbte Proben mit polierter Oberfläche.

<sup>2)</sup> Werte nach [2]. Für  $N = 10^6$  Schwingspiele.

<sup>3)</sup> Außer Einsatzstahl, nichtrostender Stahl und Schmiedestahl.

<sup>4)</sup> Nach DIN 743-3:  $\sigma_{zdw} \approx 0,4 \cdot R_m$ ;  $\sigma_{bw} \approx 0,5 \cdot R_m$ ;  $\tau_{tw} \approx 0,3 \cdot R_m$  (Torsionswechselfestigkeit).

<sup>5)</sup> Blindgehärtet. Der Einfluss einer Einsatzhärtung wird durch den Randschichtfaktor (Tabelle 13.4) berücksichtigt.

<sup>6)</sup> Vorläufiger Wert.

<sup>7)</sup> Anhaltswerte für zähe Werkstoffe.

<sup>8)</sup>  $0,577 = 1/\sqrt{3}$  (Gestaltänderungsenergiehypothese).

<sup>9)</sup> Experimentelle Ergebnisse deuten eher auf ein Verhältnis von  $\tau_{tw} = 0,62 \cdot \sigma_{bw}$  hin.

k. A. = keine Angabe

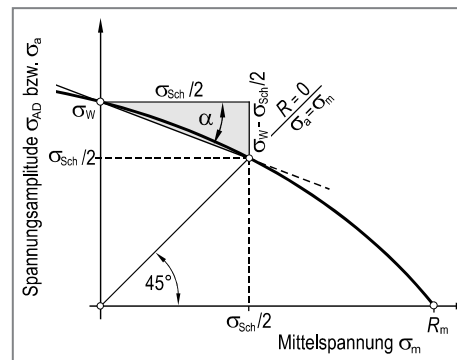
### Festigkeitsbedingung für ungekerbte Bauteile mit polierter Oberfläche unter reiner Wechselbeanspruchung

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_W}{S_D}$$

### Mittelspannungsempfindlichkeit

$$M = \tan \alpha = \frac{\sigma_W - \sigma_{Sch}/2}{\sigma_{Sch}/2}$$

Definition der Mittelspannungsempfindlichkeit





## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

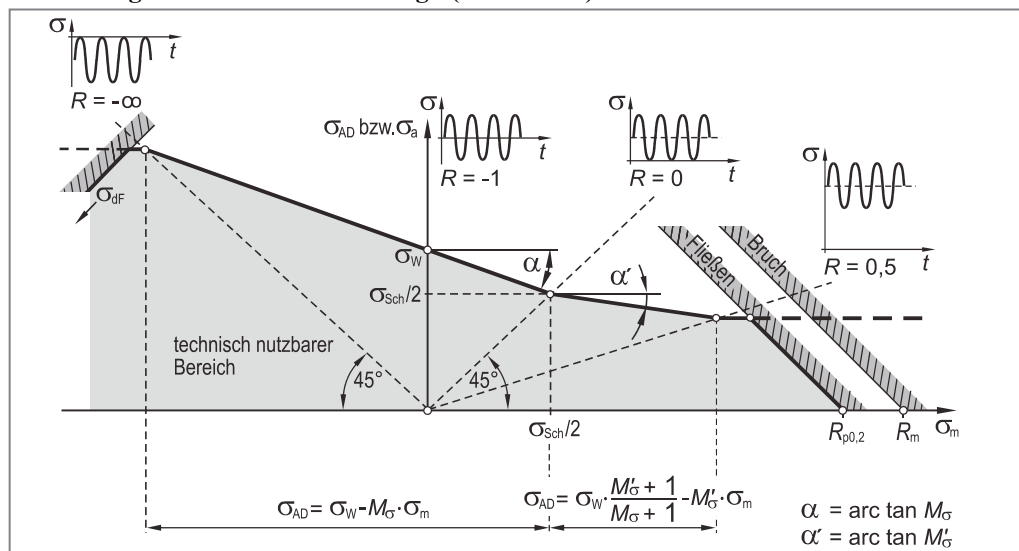
### Mittelspannungsempfindlichkeit unter der Wirkung von Normalspannungen

- Stahl: <sup>1)</sup>  $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m - 0,10$
- Stahlguss:  $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,05$
- GJL: <sup>2)</sup>  $M_\sigma = 0,5$
- GJS: <sup>3)</sup>  $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,08$
- Temperguss:  $M_\sigma = 0,00035 \cdot R_m + 0,13$
- Al-Knetlegierungen  $M_\sigma = 0,001 \cdot R_m - 0,04$
- Al-Gusslegierungen  $M_\sigma = 0,001 \cdot R_m + 0,20$

### Mittelspannungsempfindlichkeit unter der Wirkung von Schubspannungen

- Stahl <sup>1)</sup>  $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- Stahlguss:  $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- GJL: <sup>2)</sup>  $M_\tau = 0,85 \cdot M_\sigma$
- GJS: <sup>3)</sup>  $M_\tau = 0,65 \cdot M_\sigma$
- Temperguss:  $M_\tau = 0,75 \cdot M_\sigma$
- Al-Knetlegierungen  $M_\tau = 0,577 \cdot M_\sigma$
- Al-Gusslegierungen  $M_\tau = 0,75 \cdot M_\sigma$

### Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh (modifiziert) für duktile Stähle



Für  $\frac{\sigma_W}{M_\sigma - 1} < \sigma_m \leq \frac{\sigma_W}{M_\sigma + 1}$ :

$$\sigma_{AD} = \sigma_W - M_\sigma \cdot \sigma_m$$

<sup>1)</sup> auch für nichtrostende Stähle

<sup>2)</sup> GJL: Gusseisen mit Lamellengraphit

<sup>3)</sup> GJS: Gusseisen mit Kugelgraphit



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Läpple:

Einführung in die Festigkeitslehre

Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

$$\text{Für } \frac{\sigma_W}{M'_\sigma + 1} < \sigma_m \leq \frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M'_\sigma + 1} :$$

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M'_\sigma + 1} - M'_\sigma \cdot \sigma_m$$

$$\text{Für } \frac{3 \cdot \sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M'_\sigma + 1} < \sigma_m < \infty :$$

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{3 \cdot M'_\sigma + 1} \cdot \frac{M'_\sigma + 1}{M'_\sigma + 1}$$

$$\text{Für } -\infty < \sigma_m < \frac{\sigma_W}{M'_\sigma - 1} :$$

$$\sigma_{AD} = \frac{\sigma_W}{1 - M'_\sigma}$$

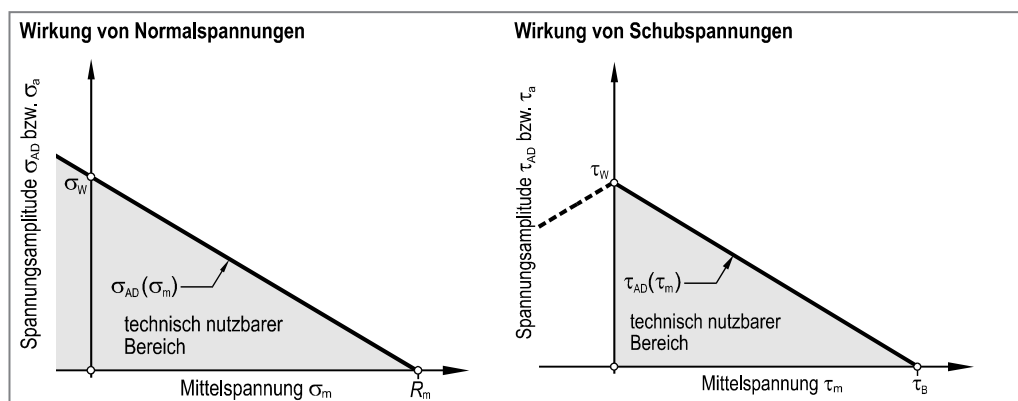
### Grenzkurve für plastische Verformung im DFS nach Haigh

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_{p0,2} - \sigma_m$$

### Grenzkurve für Bruch im DFS nach Haigh

$$\sigma_a(\sigma_m) = R_m - \sigma_m$$

### Dauerfestigkeitsschaubild nach Haigh für spröde Werkstoffe



Dauernd ertragbare Schubspannungsamplitude für spröde Werkstoffe

$$\sigma_{AD} = \sigma_W \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$$

Dauernd ertragbare Normalspannungsamplitude für spröde Werkstoffe

$$\tau_{AD} = \tau_W \cdot \left(1 - \frac{|\tau_m|}{\tau_B}\right)$$



## Das Lehrbuch zur Formelsammlung:

Volker Lüpke:

Einführung in die Festigkeitslehre

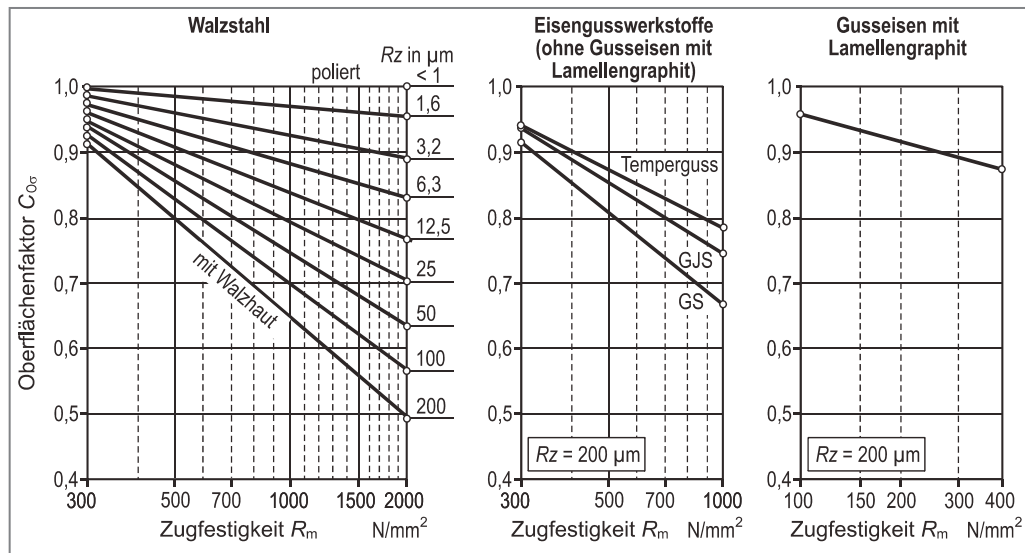
Springer Vieweg, 4. Auflage 2016

ISBN 978-3-658-10610-2

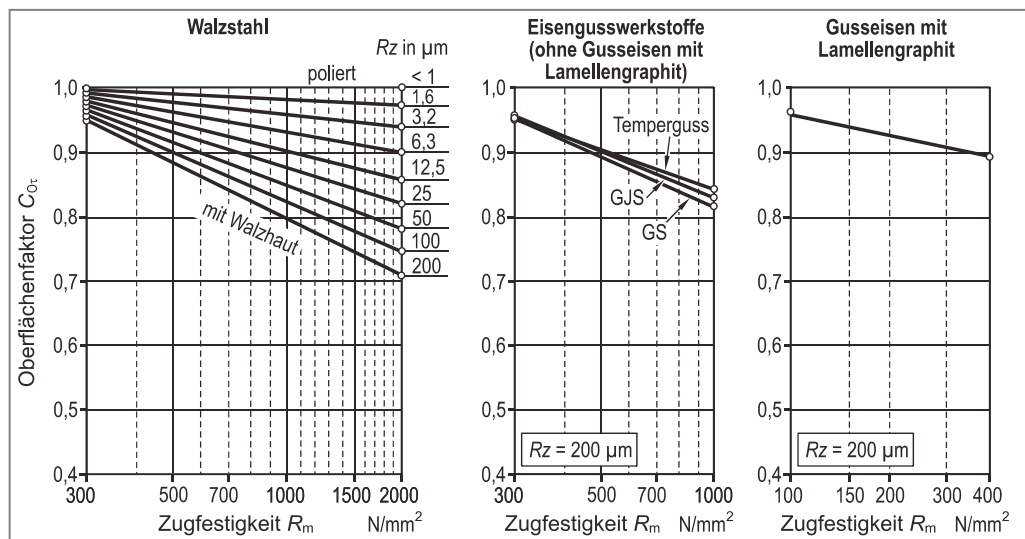
## Festigkeitsbedingung unter Schwingbeanspruchung ungekerbter Bauteile mit polierter Oberfläche unter der Wirkung einer von Null verschiedenen Mittelspannung

$$\sigma_a \leq \sigma_{a \text{ zul}} = \frac{\sigma_{AD}}{S_D}$$

## Einfluss der Oberflächenrauigkeit unter der Wirkung von Normalspannungen



## Einfluss der Oberflächenrauigkeit unter der Wirkung von Schubspannungen



GJS: Gusseisen mit Kugelgraphit

GS: Stahlguss