

Dieses Kapitel fasst aus fachwissenschaftlicher Sicht die wichtigsten ökonomischen und mathematischen Grundlagen derjenigen Inhalte zum Thema Zinsrechnung zusammen, die Gegenstand der im Teil III vorgestellten Unterrichtseinheiten sind. Im ökonomischen Teil wird auf wichtige Begriffe im Zusammenhang mit der Zinsrechnung sowie auf verschiedene Sparmodelle eingegangen. Im mathematischen Teil erfolgt zunächst eine Analyse der linearen und exponentiellen jährlichen Verzinsung, bevor erläutert wird, was unter einer unterjährigen sowie einer gemischten Verzinsung zu verstehen ist. Das Kapitel schließt mit der Betrachtung von verschiedenen Sparplänen. Wir setzen beim Leser grundlegende Kenntnisse zu Folgen und Reihen sowie zur Prozentrechnung voraus. Die Ausführungen der ökonomischen Inhalte beziehen sich im Wesentlichen auf Pollert/Kirchner/Polzin (2004) und Rittershofer (2009), die mathematischen Inhalte auf Schwenkert/Stry (2012) und Tietze (2011).

2.1 Was sind Zinsen?

Zinsen sind ein Entgelt, das ein Schuldner (Empfänger) einem Gläubiger (Bereitsteller) für die befristete Überlassung von Kapital zahlt. Als Schuldner bzw. Gläubiger sind unterschiedliche Institutionen möglich, häufig werden Zinsen jedoch bei Bankgeschäften fällig. Im Folgenden betrachten wir lediglich das Geschäft zwischen Banken und Privatpersonen. Sowohl Banken als auch Privatpersonen können dabei als Gläubiger oder Schuldner auftreten, wie die Abb. 2.1 zeigt. Leih sich eine Bank bei ihrem Kunden zeitweise Geld aus den Einlagen des Sparguthabens, zahlt diese dem Kunden eine Entschädigung in Form von **Habenzinsen**. Banken beteiligen damit die Kunden an den Gewinnen, die sie durch das Verleihen des Geldes in Form von Krediten erzielen. Grundsätzlich werden Habenzinsen auf alle denkbaren Sparformen gewährt. Hierzu zählen beispielsweise Spar- und Termineinlagen sowie Guthaben auf Tagesgeld-, Festgeld- und Girokonten. Dabei kann die Höhe der Zinsen stark variieren. Dies gilt sowohl für unterschiedliche Produkte als auch un-

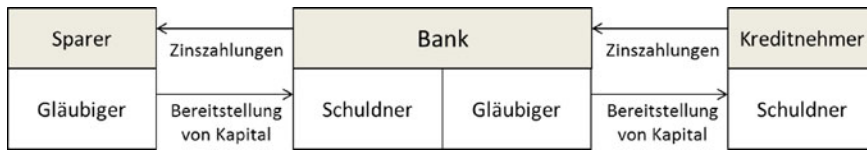


Abb. 2.1 Übersicht über Zahlungsströme im Spar- und Kreditwesen

terschiedliche Banken. Für die Bereitstellung eines Kredites werden in der Regel die so genannten **Sollzinsen** fällig, die der Kreditnehmer an die Bank zahlt. **Überziehungszinsen** als eine Unterform der Sollzinsen werden erhoben, wenn das Girokonto durch Inanspruchnahme eines Dispositionskredites überzogen wird. Hinsichtlich der Sollzinsen gibt es weitere Klassifizierungen. Der **Nominalzinssatz** gibt die Höhe der zu leistenden Zinszahlungen an, die ein Kreditnehmer für sein Darlehen theoretisch zahlen muss. Dabei wird bei der Berechnung der Nominalzinsen angenommen, dass sich die Zinszahlung auf ein Jahr bezieht und diese am Jahresende erfolgt. In der Realität werden jedoch mit jeder üblicherweise monatlich fälligen Kreditrate sowohl der Kredit getilgt als auch Zinsen zurückgezahlt. Durch die vorzeitige Zahlung der Zinsen entsteht daher für den Kreditnehmer ein rechnerisch höher Zinssatz, der so genannte **Effektivzinssatz**. Dieser berücksichtigt neben der vorzeitigen Zinszahlung auch weitere Kosten (z. B. Bearbeitungsgebühren), die durch den Abschluss eines Kredites entstehen.

Neben den genannten Zinsarten spielt der **Leitzins** eine wichtige Rolle. Der in Europa von der europäischen Zentralbank bestimmte Leitzins legt fest, zu welchem Zinssatz sich Banken entsprechendes Zentralbankgeld leihen dürfen. Durch eine überlegte Wahl des Zinssatzes kann der europäische Geld- und Kapitalmarkt geregelt werden. So kurbelt ein niedriger Leitzinssatz das Wirtschaftswachstum zumindest theoretisch an. Dies ist damit zu begründen, dass die Banken die niedrigen Zinsen häufig an ihre Kunden weitergeben. Niedrige Zinsen bei Krediten führen dazu, dass sowohl Unternehmen tendenziell stärker investieren, als auch private Verbraucher mehr auf Raten konsumieren. Niedrige Leitzinsen haben zwar den Vorteil, dass Sollzinsen niedrig sind, ebenso gering sind aber auch die Habenzinsen.

In Hinblick auf die Länge der Zinsperiode sind zwei verschiedene Zinsarten von Bedeutung. Bei der **jährlichen Verzinsung** werden die Zinsen einmal im Jahr zu einem bestimmten Zeitpunkt bezahlt, die Zinsperiode beträgt also ein Jahr. Beziehen sich die Zinsen hingegen auf den Bruchteil eines Jahres (z. B. drei Monate), spricht man von **unterjährlicher Verzinsung**.

Berücksichtigen wir die Fälligkeit der Zinsen, wird zwischen nachschüssiger und vor-schüssiger Verzinsung unterschieden. Während bei der in der Realität am häufigsten ge-nutzten **nachschüssigen Verzinsung**¹ die Zinsen am Ende der Zinsperiode fällig werden,

¹ In den folgenden Ausführungen gehen wir stets von der nachschüssigen Verzinsung aus.

ist bei der **vorschüssigen Verzinsung** bereits zu Beginn der Laufzeit die Auszahlung der Zinsen vorgesehen.

Weitere Unterschiede gibt es auch bei der Auszahlungsweise der Zinsen: Bei einer **linearen Verzinsung** wird auch bei längerer Anlagedauer lediglich die Spareinlage verzinst. Die Zinsen werden in der Regel am Ende der Laufzeit vollständig und unverzinst ausgezahlt. Bei der **exponentiellen Verzinsung** hingegen werden auch die gutgeschriebenen Zinsen als Zinseszins berücksichtigt. Dies bedeutet, dass die Zinsen nach jeder Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen werden und in den darauffolgenden Zinsperioden ebenfalls verzinst werden. Im Folgenden möchten wir auf diese Modelle näher eingehen.

2.2 Sparmodelle

In der heutigen Gesellschaft gibt es eine Vielzahl von Banken, die eine fast unübersichtlich hohe Anzahl an verschiedenen Anlagemöglichkeiten anbieten. Neben risikoreichen Anlageformen wie Aktien oder Optionen gibt es auch einige risikoarme Varianten, von denen im Folgenden das Festgeld- und Tagesgeldkonto sowie das Sparbuch näher vorgestellt werden.

Bei einem **Festgeldkonto** stellt man der Bank für einen fest vereinbarten Zeitraum Geld zur Verfügung. Der vereinbarte Anlagezeitraum ist für beide Seiten bindend, d. h. eine vorzeitige Verfügung bzw. Kündigung des Festgeldkontos ist nicht vorgesehen oder nur mit hohen Verlusten möglich. Während dieser Zeit wird das angelegte Geld zu einem festgelegten Zinssatz verzinst, wobei längere Laufzeiten in der Regel auch höhere Zinssätze bedeuten. Häufig gelten die vereinbarten Zinssätze für den gesamten Zeitraum, es gibt aber auch Offerten mit so genannten Zinsstaffeln. Hierbei werden die Zinssätze nach einer bestimmten Laufzeit erhöht. Durch die bereits im Vorfeld feststehenden Zinssätze bietet das Festgeldkonto Anlegern ein hohes Maß an Planungssicherheit. Es gibt aber derzeit auch Angebote, die sich insbesondere bei längeren Laufzeiten gegen weiter sinkende Leitzinsen absichern möchten. So ist es möglich, dass bei einer Laufzeit von fünf Jahren ein höherer Zinssatz nur für 3 Jahre garantiert wird. Die meisten Banken fordern darüber hinaus eine Mindesteinlage.

Das **Sparbuch** ist eine klassische, risikofreie Anlageform. Wie beim Tagesgeldkonto sind jederzeit Einzahlungen möglich, die ab dem ersten Tag zu den aktuell günstigen Zinssätzen verzinst werden. Im Gegensatz zum Tagesgeldkonto kann man nicht jederzeit über sein gesamtes Guthaben verfügen. Die Höhe des monatlich verfügbaren Auszahlungsbetrages ist begrenzt, meist dürfen nicht mehr als € 2000 im Monat abgehoben werden. In der Regel ist eine dreimonatige Kündigungsfrist einzuhalten.

Ein **Tagesgeldkonto** ist ebenfalls ein Anlagekonto, bei dem der Kontoinhaber im Gegensatz zum Festgeldkonto jederzeit über sein gesamtes Guthaben verfügen kann. Dabei werden die Zinsen in bestimmten Zeitabständen gutgeschrieben, die jedoch von Bank zu Bank variieren können. Übliche Zinsperioden sind Monate, Quartale und Jahre. Aufgrund der Flexibilität bzgl. der Anlagedauer sind die Zinsen nicht für einen bestimmten Zeitraum

festgeschrieben, die Banken können die Zinsen für ein Tagesgeldkonto theoretisch jeden Tag ändern. Insbesondere die Herabsetzung des Leitzinssatzes führt in der Regel auch zu einer Senkung der Tagesgeldzinsen. Die Verzinsung von Tagesgeldkonten ist häufig höher als die eines Sparbuches, aber niedriger als die eines Festgeldkontos. Das Tagesgeldkonto ist nicht für den allgemeinen Zahlungsverkehr vorgesehen.

2.3 Lineare bzw. einfache Verzinsung

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, wird bei einer linearen Verzinsung lediglich das Kapital verzinst. Zwischenzeitlich ausgezahlte Zinsen bleiben unberücksichtigt. Wird also ein Kapital der Höhe K_0 für einen Zeitraum von n Zeitperioden (z. B. Jahre, Monate, Tage) zu einem Zinssatz i (bezogen auf eine Zeitperiode) angelegt, ergeben sich die fälligen Zinsen Z_n gemäß der folgenden Formel:

$$Z_n = K_0 \cdot i \cdot n. \quad (2.1)$$

Dabei müssen sich Zinssatz² und Laufzeit stets auf dieselbe Zeiteinheit beziehen. Mit der Formel (2.1) lässt sich problemlos das Endkapital K_n am Ende der Kapitalüberlassungsfrist nach einer Dauer von n Zinsperioden berechnen, indem man die Summe aus dem Anfangskapital K_0 und den fälligen Zinsen Z_n bildet. Die sich daraus ergebende so genannte Endwertformel ist im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.3.1 (Endwertformel bei linearer Verzinsung)

Das Endkapital K_n beträgt bei einer einfachen Verzinsung nach einer Laufzeit von n Zinsperioden bei gegebenem Anfangskapital K_0 und einem Zinssatz von i :

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n). \quad (2.2)$$

Betrachten wir hierzu ein Beispiel. Die gewählten Zinssätze in diesen und den folgenden Beispielen orientieren sich dabei an Angeboten diverser Banken im Mai 2015.

Beispiel 2.3.2 (Lineare Verzinsung) *Ein Kapital in Höhe von € 2000 wird auf einem Festgeldkonto für 3 Jahre zu einem Zinssatz von 1,7 % angelegt. Dann folgt für die Höhe der Zinsen des gesamten Zeitraums:*

$$Z_3 = € 2000 \cdot 0,017 \cdot 3 = € 102.$$

Damit ergibt sich ein Endkapital in Höhe von € 2102.

² Soweit nichts anderes angegeben wird, bezieht sich der Zinssatz im Folgenden stets auf ein Jahr.

Häufig kommt es vor, dass das Anfangskapital nicht für ein ganzes Jahr, sondern nur für Bruchteile eines Jahres angelegt wird. Insbesondere Kontoauflösungen erfolgen eher unterjährig, die letzte Zinsperiode ist daher kürzer als ein Jahr. Hierbei handelt es sich um eine so genannte unterjährige Verzinsung. Die Höhe der Zinsen wird wie folgt bestimmt.

Satz 2.3.3 (Unterjährige Verzinsungen)

Wird die Laufzeit der Überlassungsfrist in Monaten gemessen (m Monate), so berechnen sich bei gegebenem Jahreszinssatz i die Zinsen Z_m für ein Kapital der Höhe K_0 gemäß der Formel:

$$Z_m = K_0 \cdot i \cdot \frac{m}{12}. \quad (2.3)$$

Wird die Laufzeit der Überlassungsfrist in Tagen gemessen (t Tage), so berechnen sich bei gegebenem Jahreszinssatz i die Zinsen Z_t für ein Kapital der Höhe K_0 gemäß der Formel:

$$Z_t = K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}. \quad (2.4)$$

Auffällig ist, dass in der Formel (2.4) mit 360 Tagen gearbeitet wird. Dies ist mit der häufig genutzten „30/360“-Zählmethode³ zu begründen, nach der ein „Zinsjahr“ aus 12 Monaten zu je 30 Zinstagen besteht. Bei der Bestimmung der Gesamtlaufzeit in Tagen ist zudem zu beachten, dass der erste Tag des Anlagezeitraums nicht, der letzte Tag hingegen voll mitgezählt wird. Betrachten wir hierzu ein Beispiel.

Beispiel 2.3.4 (Unterjährige Verzinsung) *Ein Kapital in Höhe von € 500 wird vom 06.02. bis zum 29.09.2015 zu einem Zinssatz von 1 % angelegt. Um die Höhe der Zinsen zu berechnen, müssen wir zunächst die Laufzeit t in Tagen bestimmen. Es gilt:*

$$t = 24 + 6 \cdot 30 + 29 = 233.$$

Beim Zählen der Tage ist darauf zu achten, dass auch laut Zählmodell der Monat Februar 30 Tage hat. Mit der ermittelten Laufzeit ergibt sich für die Höhe der Zinsen:

$$Z_{233} = € 500 \cdot 0,01 \cdot \frac{233}{360} = € 3,24.$$

Damit ergibt sich nach einer Laufzeit von 233 Tagen ein Endkapital in Höhe von € 503,24.

³ Die „30/360“-Methode wird häufig bei der Verzinsung von Girokonten oder Sparbüchern genutzt. Es gibt weitere Zählmethoden zur Bestimmung der Laufzeit. Zu ihnen gehören die „actual/actual“- , „actual/360“- und „30,21/365“-Methoden. Nähere Informationen hierzu sind z.B. in [Schwenkert/Stry](#) (2012, S. 6) zu finden.

Tab. 2.1 Verdeutlichung der Kontostaffelmethode

Datum	Kontobewegung	Kontostand in €	Tage	Zinsen in €
01.01.		1251,18	6	0,19
07.01.	+2450,03	3701,21	3	0,28
10.01.	−2250,00	1451,21	10	0,36
20.01.	−453,03	998,18	12	0,30
02.02.	+1102,93	2101,11	13	0,68
15.02.	−672,00	1429,11		
Bisher angesammelte Zinsen:				1,81

Natürlich können die Zinsen auch bestimmt werden, indem für die vollen Monate März bis August die Zinsen gemäß der Formel (2.3) und für Februar bzw. September die Zinsen gemäß der Formel (2.4) ermittelt und addiert werden. Die unterjährige Verzinsung kommt bei der so genannten Kontostaffelmethode, etwa bei der Bestimmung der Zinsen für das Guthaben auf Girokonten, zur Anwendung: Die Berechnung der Zinsen erfolgt mit jeder Änderung des Kontostandes, die bei Girokonten durch verschiedene monatliche Kontobewegungen (z. B. Gehaltseingang, Mietzahlungen) üblich sind. Die Zinsen werden erst am Ende der Laufzeit ausgezahlt. Betrachten wir hierzu ein weiteres Beispiel.

Beispiel 2.3.5 (Kontostaffelmethode) Auf einem Girokonto, das mit einem Zinssatz von 0,9 % verzinst wird, befindet sich am 01. Januar 2015 ein Guthaben von € 1251,18. Tabelle 2.1 verdeutlicht anhand verschiedener Kontobewegungen die Kontostaffelmethode. Bei den in der Tabelle angegebenen Tagen handelt es sich um den Zeitraum bis zur nächsten Kontobewegung.

Abschließend sei noch erwähnt, dass im Zusammenhang mit Verzinsungsproblemen häufig von Auf- und Abzinsen gesprochen wird. Dabei meint Aufzinsen die Berechnung des Endkapitals. Die rechnerische Bestimmung des Anfangskapitals (auch Barwert) aus einem gegebenen Endkapital heißt Abzinsen.

2.4 Exponentielle Verzinsung

Bei der linearen Verzinsung im vorherigen Abschnitt war ein zentrales Merkmal, dass innerhalb der betrachteten Anlagedauer keine Zinsen gutgeschrieben und mit verzinst wurden. Bei der exponentiellen Verzinsung hingegen werden innerhalb des Anlagezeitraums nach jeder Zinsperiode die Zinsen auf das vorhandene Kapital aufgeschlagen und in der nächsten Zinsperiode mit verzinst. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Zinseszinszahlungen.

Wir möchten im Folgenden die Endwertformel für die exponentielle Verzinsung herleiten, mit der das Endkapital K_n nach n Jahren bestimmt werden soll. Die Höhe des Kapitals wird durch eine schrittweise lineare Verzinsung bestimmt, wobei nach jedem Jahr die Zin-

sen zum Vorjahreskapital hinzuzufügen sind. Wird das Anfangskapital durch K_0 und der Zinssatz durch i beschrieben, so ergibt sich für das Kapital nach dem ersten Jahr:

$$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i). \quad (2.5)$$

Da die gutgeschriebenen Zinsen im darauffolgenden Jahr mit verzinst werden sollen, ist K_1 das neue Anfangskapital für das zweite Jahr. Demnach gilt für die Berechnung des Kapitals K_2 unter Berücksichtigung der Formel (2.5):

$$K_2 = K_1 + i \cdot K_1 = K_1 \cdot (1 + i) \stackrel{(2.5)}{=} K_0 \cdot (1 + i)^2. \quad (2.6)$$

Analog wird das Kapital K_3 nach dem dritten Jahr bestimmt:

$$K_3 = K_2 + i \cdot K_2 = K_2 \cdot (1 + i) \stackrel{(2.6)}{=} K_0 \cdot (1 + i)^3. \quad (2.7)$$

Aus den bisherigen Überlegungen erhält man durch eine entsprechende Fortsetzung die Endwertformel für die exponentielle Verzinsung, die im folgenden Satz festgehalten ist.

Satz 2.4.1 (Endwertformel für exponentielle Verzinsung)

Das Endkapital K_n berechnet sich im Falle der exponentiellen Verzinsung bei gegebenem Anfangskapital K_0 und einem Zinssatz von i gemäß der folgenden Formel:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n. \quad (2.8)$$

Dabei wird $q := 1 + i$ als Aufzinsungsfaktor bezeichnet. Der reziproke Wert $\frac{1}{q}$ heißt Abzinsungsfaktor.

Die Formel gilt nur für ganzzahlige n . Auch hier müssen sich wie bei der linearen Verzinsung n und i auf dieselben Zeiträume beziehen.

Beispiel 2.4.2 (Exponentielle Verzinsung) *Auf einem Festgeldkonto werden € 5000 zu einem Zinssatz von 2,2 % bei einer Laufzeit von 4 Jahren angelegt. Dann beträgt das Kapital K_4 nach Ende der Laufzeit:*

$$K_4 = € 5000 \cdot 1,022^4 = € 5454,73.$$

Es werden also insgesamt € 454,73 an Zinsen bezahlt. Ähnlich wie im Beispiel 2.3.5 lässt sich auch hier eine Kontostaffel aufstellen. Die Tab. 2.2 zeigt diese für einen Zeitraum von angenommenen 10 Jahren. Der Zinssatz betrage erneut 2,2 %.

Abschließend möchten wir lineare und exponentielle Verzinsung miteinander vergleichen. Dazu gehen wir von folgendem Beispiel aus.

Tab. 2.2 Kontostaffel für ein Festgeldkonto (Kapital: € 5000, Laufzeit: 10 Jahre, Zinssatz: 2,2 %)

Jahr	Kontostand zu Beginn des Jahres in €	Zinsen zum Ende des Jahres in €	Kontostand zum Ende des Jahres in €
1	5000,00	110,00	5110,00
2	5110,00	112,42	5222,42
3	5222,42	114,89	5337,31
4	5337,31	117,42	5454,73
5	5454,73	120,00	5574,74
6	5574,74	122,64	5697,38
7	5697,38	125,34	5822,72
8	5822,72	128,10	5950,82
9	5950,82	130,92	6081,74
10	6081,74	133,80	6215,54

Tab. 2.3 Vergleichende Kontostaffeln bei linearer und exponentieller Verzinsung (Kapital: € 10.000, Laufzeit: 15 Jahre, Zinssatz: 2,2 %)

Jahr	Lineare Verzinsung		Exponentielle Verzinsung	
	Kontostand zu Beginn des Jahres in €	Kontostand zum Ende des Jahres in €	Kontostand zu Beginn des Jahres in €	Kontostand zum Ende des Jahres in €
1	10.000,00	10.220,00	10.000,00	10.220,00
2	10.220,00	10.440,00	10.220,00	10.444,84
3	10.440,00	10.660,00	10.444,84	10.674,63
4	10.660,00	10.880,00	10.674,63	10.909,47
5	10.880,00	11.100,00	10.909,47	11.149,48
6	11.100,00	11.320,00	11.149,48	11.394,77
7	11.320,00	11.540,00	11.394,77	11.645,45
8	11.540,00	11.760,00	11.645,45	11.901,65
9	11.760,00	11.980,00	11.901,65	12.163,49
10	11.980,00	12.200,00	12.163,49	12.431,08
11	12.200,00	12.420,00	12.431,08	12.704,57
12	12.420,00	12.640,00	12.704,57	12.984,07
13	12.640,00	12.860,00	12.984,07	13.269,72
14	12.860,00	13.080,00	13.269,72	13.561,65
15	13.080,00	13.300,00	13.561,65	13.860,01

Beispiel 2.4.3 (Vergleich der linearen und der exponentiellen Verzinsung) Auf einem Festgeldkonto werden € 10.000 zu einem Zinssatz von 2,2 % und einer Laufzeit von fiktiven 15 Jahren angelegt. In der Tab. 2.3 sind die entsprechenden Kontostaffeln vergleichend gegenübergestellt.

Man erkennt, dass das Endkapital bei der exponentiellen Verzinsung schneller wächst als bei der linearen. Dies ist damit zu begründen, dass sich das Endkapital bei der linearen Verzinsung – wie der Name schon andeutet – linear entwickelt, während bei der exponentiellen Verzinsung ein exponentieller Wachstumsprozess zugrunde liegt.

2.5 Gemischte Verzinsung

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass die Einzahlung des Anfangskapitals mit Beginn und die Auszahlung des Endkapitals zum Ende der Zinsperiode erfolgen. Dies ist in der Praxis aber häufig nicht der Fall, vielmehr wird das Kapital innerhalb einer Zinsperiode ein- bzw. ausbezahlt. In diesem Fall greifen Banken üblicherweise auf die so genannte gemischte Verzinsung zurück. Für ganze Jahre werden Zinseszinsen, für den unter einem Jahr liegenden Anteil lineare Zinsen berechnet. Dabei beginnt die Zinsperiode von einem Jahr stets am 01.01. eines Jahres und endet am 31.12. desselben Jahres. Die Grundideen der gemischten Verzinsung sind in der Abb.⁴ 2.2 dargestellt. Wir betrachten ein Beispiel, in dem wir zunächst die Zinsen schrittweise bestimmen. Mit diesem Beispiel lässt sich die Endwertformel für die gemischte Verzinsung gut begründen.

Beispiel 2.5.1 (Gemischte Verzinsung) Ein Kapital in Höhe von € 10.000 wurde am 04.10.2007 zu einem Zinssatz von 3 % angelegt. Während der unbefristeten Laufzeit erfolgten keine Einzahlungen und Auszahlungen. Mit einer Kontoauflösung durch den Kun-

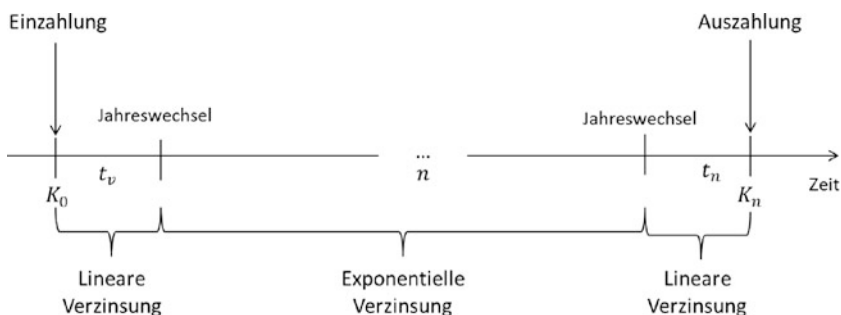


Abb. 2.2 Prinzip der gemischten Verzinsung

⁴ Alle Abbildungen zur gemischten Verzinsung sind eigene Abbildungen. Die Idee der Darstellung an einem Zeitstrahl ist Tietze (2011, S. 85) entnommen.

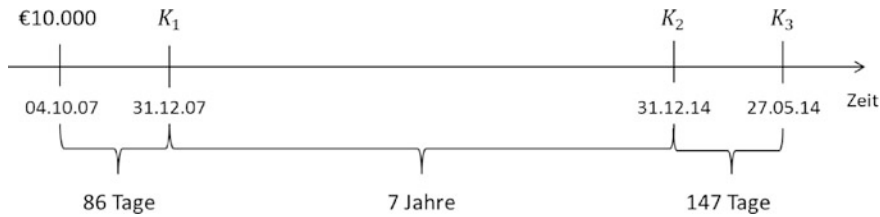


Abb. 2.3 Beispiel für gemischte Verzinsung

den zum 27.05.2015 erfolgte die vollständige Auszahlung des gesamten Kapitals (inklusive Zinsen). Im Folgenden möchten wir das Endkapital und die erhaltenen Zinsen bestimmen. Zunächst verdeutlichen wir die Situation erneut mit einem Zeitstrahl (Abb. 2.3). Nun können die Zinsen sukzessive ermittelt werden. Das Kapital K_1 ergibt sich aus dem Anfangskapital K_0 durch lineare Verzinsung. Dabei beträgt die Laufzeit 86 Tage. Es gilt:

$$K_1 = € 10.000 + € 10.000 \cdot 0,03 \cdot \frac{86}{360} = € 10.071,67.$$

Das Kapital K_2 wird durch exponentielle Verzinsung des Kapitals $K_1 = € 10.071,67$ bestimmt. Mit einer Laufzeit von 7 Jahren gilt daher:

$$K_2 = € 10.071,67 \cdot 1,03^7 = € 12.386,88.$$

Das Kapital K_3 , das gleichzeitig das Endkapital darstellt, wird aus K_2 analog zu K_1 berechnet, wobei nun die Laufzeit 147 Tage beträgt. Für das Endkapital gilt demnach:

$$K_3 = € 12.386,88 + € 12.386,88 \cdot 0,03 \cdot \frac{146}{360} = € 12.537,59.$$

Abschließend stellen wir die gemischte Verzinsung allgemein dar. Zunächst machen wir uns bewusst, dass wir jeden beliebigen Zeitraum (über einem Jahr) in bis zu drei Zeiträume unterteilen können: Es kann zwei unterjährige Zeitintervalle zu Beginn und Ende der Kapitalanlagedauer geben, die jeweils aus t_v und t_n Tagen bestehen. Das Zeitintervall dazwischen umfasst n Jahre. Aus dem Beispiel wird zudem deutlich, dass sich das Kapital nach einem Zeitintervall stets aus dem Endkapital des vorherigen Zeitintervalls durch Anwendung der bekannten Formeln zur linearen bzw. exponentiellen Verzinsung ergab. Die Abb. 2.4 stellt diese Situation zusammenfassend dar. Die Erkenntnisse, die sich aus Abb. 2.4 ableiten lassen, sind in der Endwertformel für die gemischte Verzinsung im Satz 2.5.2 zusammengefasst.

Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht Band
1

Zinsen, Steuern und Aktien

Daume, P.

2016, XII, 281 S. 101 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-10614-0