

2 Theorie des Lerngegenstandes: Konzeptualisierungen zum Zusammenspiel von Kalkül und inhaltlichem Denken

In diesem Kapitel soll das Zusammenspiel zwischen kalkülmäßigen Lösungswegen und deren inhaltlichen Interpretationen theoretisch allgemein sowie konkret für das Beispiel *Bestimmung des Anteils vom Anteil* dargestellt werden. Obwohl dieser Gedanke auf einer gewissen Grobheitsstufe im mathematikdidaktischen Diskurs eine große Präsenz hat, erweisen sich die bestehenden Konzeptualisierungen als inkohärent zueinander und in Bezug auf das hier verfolgte Untersuchungsziel als präzisierungsbedürftig. Dazu leistet das Kapitel einen ersten Beitrag, der in der weiteren Arbeit für das Beispiel *Bestimmung des Anteils vom Anteil* weiter ausgearbeitet und empirisch fundiert wird.

Dazu wird als theoretische Basis in Kapitel 2.1 der spezifische Charakter des mathematischen Kalküls im Anschluss an Krämer (1988) herausgearbeitet. Für das Lernen von Mathematik in der Schule müssen die formalen Darstellungen und Rechenwege in ein angemessenes Verhältnis zu ihrer Anwendung und Interpretation gebracht werden, wie es z.B. durch die Theorie der Grundvorstellungen konzeptualisiert ist. In diesem Sinn wird der Lerngegenstand in Kapitel 2.2 zunächst allgemein und dann konkret am Beispiel des ‚Anteils vom Anteil‘ als Vorstellung zur Multiplikation von Brüchen spezifiziert.

Zunächst wird jedoch das wissenschaftstheoretisch begründete Konzept des Kalküls und der Kalkülisierung bewusst abgegrenzt vom viel zitierten Befund der Fachdidaktik, dass im Mathematikunterricht an deutschen Schulen eine „einseitige Kalkülorientierung“ herrscht (z.B. Bromme; Seeger & Steinbring 1990; Henn & Kaiser 2001; Baumert u. a. 1997; Blum & Neubrand 1998; Kunter & Baumert 2011; Malle 2004 für die Bruchrechnung). *Einseitige* Kalkülorientierung charakterisiert einen Unterricht, dessen Schwerpunkt auf einer schematischen Anwendung von Verfahren liegt, ohne dass in hinreichendem Maße ein stützendes inhaltliches Verständnis ausgebildet würde. In der Fachdidaktik wird zum Ausgleich dieser Einseitigkeit die Stärkung von prozessbezogenen Kompetenzen, z.B. bei der Einführung von Computern im Mathematikunterricht (z.B. Henn 2004, 202ff), von inhaltlichem Denken („Inhalt vor Kalkül“, Prediger 2009, 213) oder von Reflexion (Leuders 2010, 221) gefordert.

Dabei wird der Wert von Kalkülen für die Mathematik und für den Mathematikunterricht nicht in Frage gestellt, sondern Kalkülfertigkeiten mit den dialektischen Antipoden inhaltliches Denken, prozessbezogene Kompetenzen und Reflexion in ein angemessenes Verhältnis gebracht, so dass auch die Rolle des Kalküls als einer der zentralen und mächtigsten Errungenschaften der Mathematik angemessen berücksichtigt werden kann.

Der spezifische Charakter der Errungenschaft des mathematischen Kalküls soll im folgenden Kapitel mit dem Rückgriff auf Krämer als ‚interpretationsfreier Symbolgebrauch‘ (vgl. Krämer 1988, 1f; Hefendehl-Hebeker 2008) herausgestellt werden.

2.1 Klärungen zum Kalkül als Teil des Lerngegenstandes

Die Bedeutung der Entwicklung von Kalkülen für die Mathematik und die Bedingungen für die Kalkülisierung - Schriftlichkeit, Schematisierbarkeit und Interpretationsfreiheit - hat Krämer in einer wissenschaftshistorischen Studie herausgearbeitet (vgl. Krämer 1988, die Rezeption in der Mathematikdidaktik beginnt mit Hefendehl-Hebeker 2001; 2003a;b; 2008).

Die Grundidee der Kalkülisierung ist, Lösungsverfahren, die auf inhaltsbezogenen Deutungen und Argumentationen basieren, durch die formale, regelgeleitete und interpretationsfreie Manipulation von Symbolen zu ersetzen, um den Verstand zu entlasten (vgl. Krämer 1988, 59f, 176f). „Während wir mit den Symbolen operieren, können wir vergessen, was die Symbole eigentlich bedeuten“ (ebd., 181). In diesem Sinn ist Kalkülisierung eine „Vergessenstechnik“ (Krämer 2003, 169). Im Folgenden sollen die Bedingungen für dieses besondere Operieren mit Symbolen nach Krämer dargestellt und für die Untersuchungsziele dieser Arbeit eingeordnet werden.

2.1.1 Aus mathematikhistorischen Analysen abgeleitete Bedingungen für Kalküle

Die von Krämer in ihrer mathematikhistorischen Studie herausgearbeiteten Bedingungen für die Entwicklung eines Kalküls sind Schriftlichkeit, Schematisierbarkeit und Interpretationsfreiheit (Krämer 1988, 1f). Diese sollen hier ohne Bezug auf die Mathematikgeschichte zusammengefasst werden als erste Annäherung an charakterisierende Merkmale von Kalkülen:

Bedingung 1: Schriftlichkeit

Schriftlich notierbare Zahlzeichen, Zeichen für Variable oder Zeichen für Aussagen ermöglichen das regelgeleitete Operieren, das die Interpretation der Zeichen ersetzt.

Dabei ist eine bestimmte Notationsform erforderlich, wie das folgende Beispiel zeigt. Die mündlich vorgetragene oder schriftlich fixierte Aufgabe wirkt unübersichtlich und schwer zu handhaben.

Neunzehntausendsiebenhundertachtundneunzig mit sechzehntausendsechshunderteins addiert ergibt sechsunddreißigtausenddreihundertneunundneunzig.

In der schriftlichen Notation mit Zahlzeichen ist der Ausdruck übersichtlicher:

$$\begin{array}{r} 19798 \\ +16601 \\ \hline 36399 \end{array}$$

Die Zeichen sind zudem einem regelgeleiteten Operieren zugänglich, bei dem man nicht inhaltlich begründen muss, sondern stellenweise addieren und Überträge vornehmen kann. Die entsprechende Zeichenreihe in der römischen Zahl-schreibweise ermöglicht ein solches Hantieren nicht, da dort die Zahlzeichen immer auch gedeutet und umgeformt werden müssen (Beispiel verkürzt dargestellt nach Krämer 2005, 26f). Entscheidend ist dabei die schriftliche Anordnung der Zeichen, die den Wert der Zahlen durch mit Stellenwerten versehene Ziffern abbildet, mit denen regelgeleitet operiert werden kann. Denn die Ziffern auf dem Papier sind ‚handgreiflich manipulierbar‘ (Krämer 2001, 217).

Bedingung 2: Schematisierbarkeit

Die Handlungen, die durch kalkülmäßige Wege ersetzt werden sollen, müssen schematisierbar sein, d.h. als „Verfahren“ ohne Explikation konkreter situativer Umstände und Begebenheiten beschrieben und ausgeführt werden können, indem man sich auf die Verfahrensvorschriften bezieht. Als Verfahren sind sie unbegrenzt reproduzierbar und formal beschreibbar. Je weiter sich eine solche Beschreibung von den Akteuren und Gegenständen der Handlungen entfernt, desto breiter wird das Schema anwendbar. Am folgenden Beispiel der Beschreibung einer konkreten Handlung, die dann sukzessive schematischer beschrieben wird, soll dies verdeutlicht werden (in Anlehnung an Krämer 1988, 2):

- A. „Die Tochter von Sybille Krämer legt zu 5 Stiften auf dem Tisch 3 Murmeln dazu und zählt die Gesamtzahl. Das sind 8.“
Hier ist zunächst die Handlung, wie sie nach einer Beobachtung beschrieben werden könnte. Es werden konkrete Handlungen und deren Wirkungen in Bezug auf die Anzahl der Gegenstände dargestellt.
- B. „Man fügt 5 Dingen 3 Dinge hinzu und erhält 8 Dinge.“
Hier verschwinden in der Darstellung alle konkreten Akteure und auch wesentliche situative Momente der ursprünglichen Handlung, es können natürlich wieder konkrete Gegenstände ersatzweise eingefügt werden, z.B. Rechensteine.
- C. „Man addiert 5 und 3 und erhält 8. bzw. $5+3=8$.“
Hier sind der Handlung in der Darstellung weitere inhaltliche Momente genommen; ob zusammen- oder hinzugefügt wird, ist nicht mehr erkennbar. Es bleibt die reine Struktur der Operation, die streng genommen keine Bedeutung hat.

In der Perspektive eines Schemas, also eines unbegrenzt oft durchführbaren Verfahrens sind Beschreibung B. und C. gefasst, hier wird vom Sinn und den Akteuren der ursprünglichen Handlung abgesehen, es können aber unterschiedliche Gegenstände zum Operieren genutzt werden. „Für das schematische Operieren ist es unerheblich, ob die Figuren, mit denen operiert wird, Steine, mathematische Zeichen oder Wörter sind“ (Lorenzen 1955, 10).

Die Variante B vermittelt zwischen inhaltlicher Beschreibung der konkreten Situation in Variante A und der formalen Beschreibung der Operation in Variante C.. Der Charakter der Variante C. wird im Folgenden genauer beleuchtet.

Bedingung 3: Interpretationsfreiheit

„Über die Richtigkeit oder Falschheit eines Ausdrucks innerhalb einer formalen Sprache lässt sich entscheiden ohne Bezugnahme auf die Interpretation dieses Ausdrucks“ (Krämer 1988, 2).

Für das oben angeführte Beispiel bedeutet dies, dass man die Richtigkeit der Aussage $5+3=8$ durch Nachrechnen überprüfen kann, ohne auf die Vorstellung des Hinzufügens (vgl. B.) oder eine konkrete Situation mit Stiften (vgl. A.) Bezug zu nehmen. Ebenso kann bei der Addition großer natürlicher Zahlen nach Regeln verfahren werden, ohne die Bedeutung der Ziffern zu beachten. Das formale System ist damit abgeschlossen, bedarf also keiner Begründung von außen und keines Bezugs auf ein Außen.

Während die Schematisierbarkeit die Beschreibbarkeit von Handlungen und Situationen akzentuiert, stellt die Interpretationsfreiheit den Charakter des mit der symbolischen Beschreibung möglichen Gebrauchs dieser Zeichen heraus, der darin besteht, dass nur auf die Regeln des Kalküls rekuriert wird. Schriftlichkeit bildet die Voraussetzung für die Existenz von in diesem Sinne manipulierbaren, geordneten Zeichen.

2.1.2 Kalküle und Algorithmen

Ein ‚Kalkül‘ wird von Krämer auf der Basis der vorgestellten Überlegungen charakterisiert als „Herstellungsvorschrift, nach welcher aus einer begrenzten Menge von Zeichen unbegrenzt viele Zeichenkonfigurationen hergestellt werden können“ (Krämer 1988, 61). Dieser Bezug auf die Herstellungsvorschrift bei der Zeichenproduktion bedeutet, dass inhaltliche, semantische Überlegungen (Bedeutungszuschreibungen) durch syntaktische (sich auf die Syntax, die Herstellungsvorschriften beziehende) ersetzt werden. Statt um Wahrheit oder Sinnhaftigkeit geht es dann um Richtigkeit und Wohlgeformtheit im Sinne des Kalküls (Schmid 1999, 94; Krämer 2001, 218; Baumann 1990, 56). Dies ermöglicht die Entlastung des Verstandes, die ein Ziel der Kalkülisierung ist:

„Es ist ja die Aufgabe eines Kalküls, die abstrakten gedanklichen Operationen, in denen uns so leicht ein Irrtum zustoßen kann, zu ersetzen durch möglichst anschauliche, praktisch nicht zu verfehlende Operationen per characteres (...)“ (Scholz 1961, zitiert nach Baumann 1990, 57).

Auf die Entlastung des Verstandes zielt auch die Entwicklung von Algorithmen. Im Unterschied zum Kalkül bezieht sich ein Algorithmus auf eine konkrete Klasse von Problemen, zu deren Lösung er eine feste Reihenfolge von Schritten vorschreibt (vgl. Maurer 1998, 21). Die Entlastung besteht hier darin, dass auf ein ökonomisiertes, verallgemeinertes Verfahren zur Problemlösung zurückgegriffen wird, ohne dass für jedes einzelne Problem ein neuer Weg gesucht werden muss. So stellt das Beispiel der Addition zweier mehrstelliger Zahlen auf S. 7 ein Beispiel für einen Algorithmus mit einer symbolischen Notation dar. Ein ähnlicher Algorithmus lässt sich aber auch für das Lösen derselben Aufgabe mit einem Abakus formulieren, bei dem dann für die Handlungen Perlen als Gegenstände genutzt werden, Algorithmen müssen sich also nicht auf formale Symbole beziehen.

Ein Kalkül ist offener als ein Algorithmus, da in der Anwendung der Regeln des Kalküls selbst wieder Freiheit besteht. Innerhalb eines Kalküls können aber wieder Algorithmen zur ökonomisierten Problemlösung formuliert werden.

Unter einer reinen Nutzungsperspektive wird beim Kalkülhandeln und beim Benutzen von Algorithmen inhaltliches konzeptuelles Wissen verzichtbar gemacht und prozedurales Wissen und das „Wie“ des Herstellens der Ausdrücke in das Zentrum gerückt. Insofern bezeichnet Krämer den Kalkül als „*techné*“, die zum Ziel hat, den Verstand von den Mühen der Interpretation zu entlasten“ (Krämer 1988, 176; '*techné*' im Sinne von Rezeptwissen, also Rechenrick oder -rezept).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Schematisierbarkeit als Beziehung zwischen Handlungen und Verfahren einerseits und Interpretationsfreiheit als Eigenschaft des Gebrauchs der schriftlichen Zeichen andererseits als Bedingungen für Kalkülisierung entscheidend sind. Inhaltliche Vorgehensweisen müssen sich in ein Schema bringen lassen, das dann auch mit Symbolen dargestellt und in der Sprache dieser Symbole gefasst werden kann, so dass mit diesen Symbolen ein Umgang möglich wird, der auf eine inhaltliche Deutung der Symbole verzichten kann und sie nur noch syntaktisch und nicht mehr semantisch nutzt. Damit besteht der Charakter des Kalkülhandelns gerade in der Abkoppelung von der eigenen Entstehung und von der didaktisch ebenfalls als Lerngegenstand intendierten Interpretation der syntaktisch genutzten mathematischen Zeichen und Regeln.

Durch eine zusätzlich mögliche Axiomatisierung kann der interpretationsfreie Umgang mit Symbolen zudem die Möglichkeit der Generierung von neuen begründeten Aussagen gewinnen, die selbst wieder Teil des Kalküls werden. Die Begründung des Wissens rückt mit in den Fokus. Dies spielt für die Schulmathematik jedoch keine Rolle.

Im Kontext von Lerngegenständen in der Schule - insbesondere in der Sekundarstufe I - geht es weniger um die Entwicklung ganzer Kalküle, sondern eher um die Entwicklung von einzelnen kalkülmäßigen Lösungswegen. Insofern

mag der Begriff ‚Algorithmus‘ in Bezug auf die Sekundarstufe I und die Entwicklung von Rechenregeln geeigneter erscheinen, da es um die Entwicklung von Prozeduren für ein konkretes Problem geht und nicht um die Generierung eines Kalküls, also eines offenen Systems, in dem formal operiert und beliebige Zeichenketten generiert und beliebig weiter manipuliert werden sollen. Das gemeinsame Ziel von Algorithmen und Kalkülen ist die von Kramer akzentuierte Entlastung von Interpretation und die damit gegebene Möglichkeit der Automatisierung.

In Bezug auf diese Untersuchung wird trotzdem weiterhin von Kalkülisierung gesprochen, um nicht das Entwickeln von engen fixen Rezepten, sondern die relative Offenheit der zu entwickelnden Kalkülregeln in den Fokus zu stellen, denen ein interpretationsloser Zeichengebrauch zugrunde liegt.

Der Wert von Kalkülen und Algorithmen für mathematisches Denken wird von Didaktikern als derart relevant angesehen, dass sie unter dem Namen Algorithmus oder Algorithmisierung von vielen Autoren übereinstimmend in den Status einer fundamentalen Idee erhoben werden (vgl. Tietze, Klika & Wolpers 1997, 38; Schreiber 1979, 1983; Tietze 1979; Schwill 1994; Vohns 2007; Lambert 2012).

Winter unterscheidet zwei in diesen Ideen inhärente Aspekte: zum einen die Beherrschung von Algorithmen, zum anderen deren Entwicklung, Begründung und adaptive Anwendung (vgl. Winter ohne Jahresangabe). Er akzentuiert den zweiten Aspekt als Entwicklungsaufgabe für den Mathematikunterricht:

„Dennoch, mehr als bisher üblich, kommt es auf das möglichst eigenständige Erarbeiten, das Begründen, Modifizieren und Bewerten von mehr oder weniger algorithmisierten Prozeduren an. Das ist die genuin mathematische Seite“ (Winter ohne Jahresangabe).

Diese Forderung ist ein nicht neuer, aber immer noch viel zu wenig realisierter fachdidaktischer Ansatzpunkt, der einseitigen „Kalkülorientierung“ (vgl. den Anfang von Kap. 2) konsequent zu begegnen: wird der Kalkül selbst entwickelt und begründet, so wird auch der genuine, von Krämer herausgearbeitete Charakter von Kalkülen und ihr Nutzen erfahrbar und thematisierbar.

Denn der Kalkül wird in der Idee der „Kalkülisierung“ in Bezug zu informellen inhaltlichen Wegen, aus denen er entwickelt wird, und in Verbindung mit Prozessen gedacht. Zentral ist dabei, dass Kalkül und inhaltliche Wege in einem spezifischen Verhältnis gedacht werden müssen, das es genauer zu bestimmen und zu verstehen gilt.

Zur weiteren Entfaltung dieser ersten These sollen im Folgenden inhaltliche Wege, die in der Studie von Krämer nicht im Fokus stehen, mathematikdidaktisch klarer konzeptualisiert werden, um davon ausgehend das Verhältnis von Kalkül und inhaltlichem Denken weitergehend zu klären. Denn die Möglichkeit interpretationsfreier Kalkülnutzung allein klärt nicht den Charakter des Prozesses der Kalkülisierung.

2.1.3 Grundvorstellungen als Konzeptualisierung der Voraussetzung für inhaltliches Denken

Inhaltliches Denken ermöglicht es, im Alltag auftretende Probleme zu lösen, ohne formale Mathematik heranzuziehen. Zur Ökonomisierung der Problemlösung können aber auch die strukturierten, kalkülmäßigen Wege der Mathematik herangezogen werden. Für diese Nutzung der Mathematik zur Lösung von in der Welt situierten Problemen sind neben dem Umgang mit kalkülmäßigen Regeln noch weitere Tätigkeiten zu vollziehen, die sich gut im sogenannten Modellierungskreislauf verorten lassen (vgl. Abbildung 2.1).

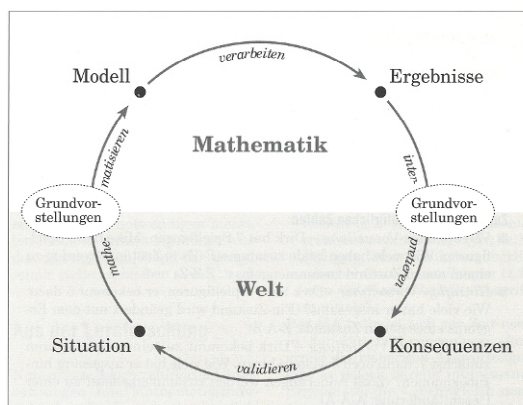


Abbildung 2.1: Modellierungskreislauf (aus vom Hofe 2003, 5)

Das gegebene in der Welt situierte Problem muss zunächst mathematisiert werden, um den Kalkül anwendbar zu machen. Es müssen geeignete mathematische Modelle und Zeichen gefunden werden, um einen Kalkülweg nutzen zu können. Das dadurch bestimmte Ergebnis muss danach interpretiert werden, wenn es auf die Sachsituation bezogen und als Antwort auf die Problemlösung genutzt werden soll (vgl. Abbildung 2.1).

Somit erfordert mathematisches Modellieren Übersetzungsvorgänge zwischen der Sachsituation und der mathematischen Beschreibungsebene in beiden Richtungen. Dies erfordert ein inhaltliches Verständnis dessen, welche mathematischen Begriffe und Verfahren in welcher Weise zu relevanten Aspekten der Sachsituation passen und welche Aussagen über die Sachsituation aus den im mathematischen Modell errechneten Ergebnissen abgeleitet werden können. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik sind die dabei vermittelnden mentalen Funktionen durch das Konstrukt der Grundvorstellungen konzeptualisiert worden. Dieses wurde wesentlich durch vom Hofe (1992; 1995) ausgearbeitet.

Zu mathematischen Objekten sind beliebig viele Situationen denkbar. Grundvorstellungen bündeln die Vielzahl der Anwendungssituationen mathematischer Gegenstände in Kategorien. Grundvorstellungen sind einfach gesprochen gegenstandsspezifische „Übersetzungsscharniere“ zwischen mathematischen Objekten und ihren Verwendungssituationen (Prediger 2010, 10). Vom Hofe charakterisiert sie durch drei Aspekte:

„Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe mathematischer Struktur“ (vom Hofe 1992, 347).

Zu einem mathematischen Objekt, also zu Begriffen, Operationen oder Verfahren, werden verschiedene Grundvorstellungen im Sinne von Kategorien von Verwendungszusammenhängen identifiziert, die die Anwendbarkeit, also den Bezug auf die Welt erlauben. Damit sind die Grundvorstellungen zunächst ein präskriptives Konstrukt („normative Leitlinie“ bei vom Hofe 1995, 123), das beim Erstellen von Curricula und Planen von Lernumgebungen nützlich ist, da die Breite möglicher Anknüpfungs- und Anwendungssituationen kategorisiert wird und Lerngegenstände ausdifferenziert werden können.

Was durch vom Hofes Charakterisierung „Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen“ eher implizit bleibt, machen Gerster und Schulz für die Grundvorstellungen von Operationen unter dem Begriff „Operationsverständnis“ expliziter:

„Operationsverständnis beim Addieren/Subtrahieren besteht nach unserer Auffassung in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen

- a) (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
- b) modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
- c) symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrundeliegenden Quantitäten und Rechenoperationen. Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen Sprachen hin- und herübersetzen zu können (Huinker, 1993; Van de Walle, 1994, 116).“ (Gerster & Schulz 2004, 351).

Neben den Sachsituationen und symbolischen Notationen sind bildhafte oder modellhafte Vorstellungen nötig, und der Wechsel zwischen diesen drei Darstellungen ist entscheidend für den Aufbau und die Diagnose von Grundvorstellungen. Für die Ausdifferenzierung von Lerngegenständen heißt dies: Alle drei Darstellungen sind zu lernen und die Vernetzung zwischen ihnen muss angeregt

werden. Gleichwohl können die drei Darstellungen auch differenzierter gefasst werden, so dass sich der Umfang der zu lernenden Darstellungswechsel und der ableitbaren Diagnoseformate zur Erfassung von individuellen Vorstellungen erhöht (für Brüche wurde dies bereits bei Lesh 1979 ausgearbeitet).

Damit Kalkülregeln aus der Perspektive der Lernenden nicht nur unverstandene und damit beliebig wirkende Rezepte zur Lösung von Alltagsproblemen sind, müssen die Lernenden erkennen, dass eine Rechnung zu einem vorgegebenen Kontextproblem passt, warum die kalkülmäßige Rechnung die richtige Lösung zum Problem gibt, indem sie die Regel durch Bezug auf inhaltliches Denken begründen. Dazu bedarf es besonders intensiver Tätigkeiten der Vernetzung der symbolischen Darstellung und der Kalkülregeln auf der einen Seite und der inhaltlichen Darstellungen auf der anderen Seite. Die Notwendigkeit der Intensivierung des Verständnisses der Bezüge zwischen verschiedenen Darstellungen ergibt sich auch aus dem Charakter der beteiligten mathematischen Objekte, die nur über ihre Darstellungen zugänglich sind und die über jede Darstellung andere ihrer Eigenschaften zugänglich macht (vgl. z.B. Duval 2000, 61).

In diesem Sinne beschreibt der Terminus „Darstellungsvernetzung“ die intendierte Anregung einer größeren Bandbreite kognitiver Aktivitäten im Umgang mit den verschiedenen Darstellungen, die auf das Herausarbeiten von Beziehungen zwischen den verschiedenen Darstellungen zielen (vgl. Prediger & Wessel 2011; Wessel 2015). So finden sich in den diagnostischen Aufgaben von Gerster und Schulz in Verbindung mit geforderten Darstellungswechseln oft Begründungsaufträge, um die Intensität der Vernetzung zu erhöhen, z.B.

„Erfinde eine Rechengeschichte, welche zu der Aufgabe $4 \cdot 15$ (oder $20 : 4$) passt. Wieso passt diese Geschichte zu dieser Rechenaufgabe? Erfinde zu der gleichen Rechenaufgabe noch eine andere Rechengeschichte.“ (Gerster & Schulz 2004, 388).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Grundvorstellungen zentrale präskriptive Kategorien für die Spezifizierung von Lerngegenständen bilden, also für die Auswahl und Konkretisierung von Lerninhalten. Sie fungieren als gegenstandsspezifische, lokale „Übersetzungsscharniere“ (Prediger 2010, 10). Mit ihnen werden die mentalen Übersetzungstätigkeiten zwischen formalen mathematischen Darstellungen und Vorgehensweisen auf der einen Seite und Sachsituationen und graphischen Darstellungen auf der anderen Seite als Teil von Lerngegenständen fassbar, so dass dem epistemischen Status mathematischer Objekte als durch Darstellungen vermittelte Objekte Rechnung getragen werden kann.

Grundvorstellungen lassen sich aufbauen und diagnostizieren durch differenzierte Formen der Darstellungsvernetzung (Prediger 2009, 220; Gerster & Schulz 2004, 351; Wessel 2015).

2.1.4 Implikationen: Arten des Bezuges von Kalkül und Vorstellung

Durch das Konstrukt der Grundvorstellungen wird der Bezug zwischen Kalkül und inhaltlichem Denken expliziert. Resümierend zusammengefasst bedeutet dies, dass die Lernenden nicht nur zum interpretationsfreien Symbolgebrauch befähigt werden müssen (vgl. Kap. 2.1), sondern die beteiligten symbolischen Ausdrücke auch inhaltlich in anderen Darstellungen deuten können (Kap. 2.2.1) und die als Regeln genutzten Aussagen auch begründen können sollten. Dies ist ein etwas anderes Ziel als die bei Krämer erwähnte „Vergessenstechnik“ (vgl. 2.1.1), daher sollen im Folgenden in Bezug auf das Verhältnis von Kalkül und Vorstellungen folgende hierarchisch gestufte Lernziele unterschieden werden:

1. In symbolischer Darstellung gegebene Aufgaben mit bekannten Rechenregeln lösen können (*nutzbarer Kalkül*).
2. Eine in symbolischer Darstellung gegebene Aufgabe inhaltlich lösen können und zu Situationen und graphischen Darstellungen symbolische Ausdrücke finden (*interpretier- und anwendbarer Kalkül*).
3. An der graphischen Darstellung oder in Situationen erklären, warum eine Rechenregel gilt (*begründbarer Kalkül*).

Die drei hierarchisch gestuften Lernziele unterscheiden sich jeweils in dem Verhältnis von Kalkül und inhaltlichem Denken. Sie sind in Tabelle 2.1 durch Aufgaben konkretisiert und werden im Folgenden genauer begründet.

Tabelle 2.1 Drei Lernziel-Stufen zum Verhältnis von Kalkül und inhaltlichen Vorstellungen

Lernziel-Stufen	Aufgabenformat	Genauere Tätigkeiten
1. Nutzbarer Kalkül	Berechne $3/4 \cdot 2/5$	Kalkülmäßiges Operieren, ausschließlich kein Bedeutungsverständnis Symbole nötig
2. Interpretierbarer und anwendbarer Kalkül	a) Zeichne ein Bild zu $3/4 \cdot 2/5$ oder gib eine Situation an. b) $3/4$ der Kinder gehen in die 1. Klasse. Davon gehen $2/5$ in die 5. Klasse. Welcher Anteil von allen Kindern geht in die 5. Klasse?	Kalkül in Sachsituation oder graphischer Darstellung interpretieren Mathematisieren, kalkülmäßig operieren, Ergebnis interpretieren Wechsel der Darstellungen
3. Begründbarer Kalkül	Warum ist $3/4 \cdot 2/5 = 6/20$? Begründe an einem Bild oder in einer Situation	Begründen des Kalküls durch Rückgriff auf die Strukturen in interpretierenden Darstellungen Qualifizierter Darstellungswechsel

Individuelle Prozesse der fortschreitenden
Schematisierung

Empirische Rekonstruktionen zum Anteil vom Anteil

Glade, M.

2016, XIV, 291 S. 62 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-11253-0