

2. Erweitertes Handwerkszeug

2.1 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

2.1.1 Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird

Beispiel 2.1-1: Der folgende Ausdruck ist so weit wie möglich zu vereinfachen:

$$(2.01) \quad \frac{(-a)^7 (-a)^{2n}}{(-a)^{n-4}}$$

Die richtige Anwendung der Regel über Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis führt sofort zum Ergebnis:

$$(2.02) \quad = (-a)^{7+2n-(n-4)} = (-a)^{11+n}$$

Beispiel 2.1-2: Man vereinfache

$$(2.03) \quad \frac{(21r^4s^3t)^3}{(6r^4s^5t)^3} \cdot \frac{(7r^3s^2t^2)^5}{(14r^5s^6t^4)^2}$$

Zuerst sollte man sich hier vom Divisions-Doppelpunkt verabschieden und den Ausdruck als Doppelbruch schreiben.

Danach ist die Regel anzuwenden, dass ein Bruch durch einen Bruch dividiert wird, indem mit dem Kehrwert des Nennerbruches multipliziert wird:

$$(2.04) \quad = \frac{\frac{(21r^4s^3t)^3}{(6r^4s^5t)^3}}{\frac{(7r^3s^2t^2)^5}{(14r^5s^6t^4)^2}} = \frac{(21r^4s^3t)^3}{(6r^4s^5t)^3} \cdot \frac{(14r^5s^6t^4)^2}{(7r^3s^2t^2)^5}$$

Anschließend werden unter Anwendung der drei wichtigen Potenzgesetze

$$(2.05) \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Zähler- und der Nennerbruch vereinfacht, dann wird zusammengefasst:

$$(2.06) \quad = \frac{21^3 14^2 r^{22} s^{21} t^{11}}{6^3 7^5 r^{27} s^{25} t^{13}} = \left(\frac{21}{6}\right)^3 \left(\frac{14^2}{7^5}\right) r^{-5} s^{-4} t^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^3 \left(\frac{2 \cdot 7}{7^5}\right) \frac{1}{r^5 s^4 t^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^5 s^4 t^2}$$

Die Regeln der Potenzrechnung sind ebenfalls hilfreich, wenn Terme mit Wurzeln zusammenzufassen sind. Denn zwischen Wurzeln und Potenzen besteht der Zusammenhang

$$(2.07) \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},$$

mit denen sich die Potenzgesetze auf die n-ten Wurzeln übertragen lassen.

Beispiel 2.1-3: Man vereinfache den Term

$$(2.08) \quad \sqrt[5]{\sqrt{x^4}}$$

Wenn der Wurzelexponent fehlt, handelt es sich um die Quadratwurzel (zweite Wurzel). Durch Umschreiben der Wurzeln in Potenzen mit gebrochenen Exponenten erhält man die Lösung:

$$(2.09) \quad = (\sqrt[5]{x^4})^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{4}{5}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{10}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$$

Beispiel 2.1-4: Man vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$(2.10) \quad (\sqrt[3]{\sqrt[6]{u}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{u^4}}) : (\sqrt[18]{u^{-7}} \cdot \sqrt[9]{\frac{1}{u^3}})$$

Wieder sollte zuerst von der Schreibweise mit dem Divisions-Doppelpunkt zur Bruch-Schreibweise übergegangen werden.

Dann werden in Zähler und Nenner Potenzschreibweisen benutzt und die Gesetze der Potenzrechnung angewandt:

$$(2.11) \quad = \frac{(\sqrt[3]{\sqrt[6]{u}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{u^4}})}{(\sqrt[18]{u^{-7}} \cdot \sqrt[9]{\frac{1}{u^3}})} = \frac{(u^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{3}} (u^{\frac{4}{2}})^{\frac{1}{9}}}{(u^{-7})^{\frac{1}{18}} (u^{-3})^{\frac{1}{9}}} = \frac{u^{\frac{1}{18}} u^{\frac{2}{9}}}{u^{\frac{-7}{18}} u^{\frac{-3}{9}}} = \frac{u^{\frac{5}{18}}}{u^{\frac{-13}{18}}} = u^{\frac{5}{18} + \frac{13}{18}} = u$$

Beispiel 2.1-5: Zu vereinfachen ist

$$(2.12) \quad \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Ungleichnamige Brüche werden addiert, indem zuerst nach einem Hauptnenner gesucht wird. Hier entsteht der Hauptnenner als Produkt der beiden Teilnenner:

$$(2.13) \quad = \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} - \frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{2(a-b)\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

Im Nenner ist die Anwendbarkeit einer binomischen Formel (häufig wird sie als dritte binomische Formel bezeichnet) zu erkennen.

Damit ergibt sich die folgende Lösung:

$$(2.14) \quad \frac{2(a-b)\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{2(a-b)\sqrt{b}}{((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2)} = \frac{2(a-b)\sqrt{b}}{(a-b)} = 2\sqrt{b}$$

Der Umgang mit Logarithmen wird von vielen Studierenden als schwierig empfunden, obwohl es mit Hilfe der Definition doch eigentlich nicht kompliziert sein sollte, sauber mit Logarithmen zu arbeiten.

Gemäß Definition des Logarithmus gilt

$$(2.15) \quad a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b \quad a > 0, b > 0, a \neq 1$$

Man kann also sagen $8^3=512$ ist gleichbedeutend mit $3=\log_8 512$.

Auch gebrochene Zahlen können als Logarithmen auftreten:

$$(2.16) \quad \log_{81} 3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Weitere ausführliche Erklärungen und Beispiele zum Logarithmenbegriff können u. a. im Buch „Mathematik für BWL-Bachelor“ [51] im Abschnitt 2.1.7 nachgelesen werden. Die drei wichtigsten Logarithmengesetze sollen trotzdem wegen ihrer Bedeutung hier noch einmal wiederholt werden:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \log_c (a \cdot b) &= \log_c a + \log_c b & \Leftrightarrow \log_c a + \log_c b &= \log_c (a \cdot b) \\ \log_c \left(\frac{a}{b}\right) &= \log_c a - \log_c b & \Leftrightarrow \log_c a - \log_c b &= \log_c \left(\frac{a}{b}\right) \\ \log_c (a^n) &= n \cdot \log_c a & \Leftrightarrow n \cdot \log_c a &= \log_c (a^n) \end{aligned}$$

Das Nichtbeachten der Logarithmen-Eigenschaften und Logarithmen-Gesetze ist eine häufige Fehlerquelle. Wird zum Beispiel die Aufgabe gestellt, die Gleichung

$$(2.18) \quad \ln y = -3 \ln x$$

nach y aufzulösen, dann findet sich im Publikum nicht selten jemand, der vorschlägt, beide Seiten dieser Gleichung „durch \ln zu teilen“ – was natürlich völlig unsinnig ist. Richtig dagegen ist, das in (2.17) genannte dritte Gesetz anzuwenden:

$$(2.19) \quad \ln y = -3 \ln x = \ln(x^{-3}) \Rightarrow y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Die Arbeit mit Logarithmen ist besonders in der Finanzmathematik wichtig, wenn z. B. nach Laufzeiten bei Sparprozessen mit regelmäßigen Einzahlungen gefragt wird.

Beispiel 2.1-6: Frau Sicherlich zahlt das in ihrem Unternehmen gewährte Weihnachtsgeld von 500 € am Jahresende auf ein mit $i=4\%$ p. a. verzinstes Sparbuch ein.

Wie viele Jahre müsste sie einzahlen, um 10.000 € am Jahresende des letzten Einzahlungsjahres erhalten zu können? Mit Hilfe der passenden Formel aus der Finanzmathematik (siehe zum Beispiel in [30]) findet man die Bestimmungsgleichung für das Endkapital K_n :

$$(2.20) \quad K_n = r \frac{(1+i)^n - 1}{i} \xrightarrow{r=500, i=0,04, K_n=10000} 10000 = 500 \frac{(1+0,04)^n - 1}{0,04}$$

Die erhaltene Gleichung wird zuerst zahlenmäßig vereinfacht:

$$(2.21) \quad \frac{10000}{500} 0,04 + 1 = (1 + 0,04)^n \Leftrightarrow 1,8 = 1,04^n$$

Da sowohl die linke als auch die rechte Seite der entstehenden Gleichung positiv sind, dürfen beide Seiten mit einer beliebigen Basis logarithmiert werden. Man benutzt dafür im Allgemeinen den natürlichen Logarithmus, für dessen Auswertung sich selbst auf dem billigsten Taschenrechner eine Taste findet:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \ln 1,8 &= \ln(1,04^n) = n \ln 1,04 \\ n &= \frac{\ln 1,8}{\ln 1,04} = 14,986 \end{aligned}$$

Vergessen wir den Antwortsatz nicht – ohne diesen ist die Aufgabe nicht gelöst:

Antwortsatz: Die genannte Dame muss 15 Jahre lang einzahlen, um schließlich den Betrag von 10.000 € erhalten zu können.

2.1.2 Aufgaben

Aufgabe 2.1-1: Man vereinfache die folgenden Terme:

$$(2.23) \quad \left(\frac{v^{-2}x^2}{u^3y^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{y^{-1}u^2}{x^2v^0}\right)^3$$

$$(2.24) \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5y^{10}z^{15}}}$$

$$(2.25) \quad \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[12]{\frac{y^3}{x}} : \sqrt[4]{\frac{y}{x}}$$

Aufgabe 2.1-2: Man bestimme x aus folgenden Gleichungen:

$$(2.26) \quad \log_2 x = 5$$

$$(2.27) \quad \log_x 0,5 = -1$$

$$(2.28) \quad \log_{0,3} x = 4$$

$$(2.29) \quad x = \log_a \sqrt[n]{a}$$

$$(2.30) \quad \log_x 25 = 2$$

$$(2.31) \quad x = \log_k \sqrt[3]{k^6}$$

Wenn anstelle ausführlicher Lösungen nur die Ergebnisse angegeben sind, dann findet man die ausführlichen Lösungen im Internet unter

www.w-g-m.de/bwl-ueb.html

2.1.3 Lösungen

Lösungen zur Aufgabe 2.1-1:

$$(2.23_L) \quad \left(\frac{v^{-2}x^2}{u^3y^{-4}}\right)^{-2} : \left(\frac{y^{-1}u^2}{x^2v^0}\right)^3 = \frac{x^2v^4}{y^5}$$

$$(2.24_L) \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^5y^{10}z^{15}}} = z\sqrt[3]{x \cdot y^2}$$

$$(2.25_L) \quad \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[12]{\frac{y^3}{x}} : \sqrt[4]{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt[12]{\frac{y^3}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{y}{x}}} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}})(y^{\frac{3}{12}} x^{-\frac{1}{12}})}{y^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}}{y^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{12}}} = \frac{x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{12}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{y}}$$

Lösungen zur Aufgabe 2.1-2:

$$(2.26_L) \quad \log_2 x = 5 \rightarrow 2^5 = x \rightarrow x = 32$$

$$(2.27_L) \quad \log_x 0,5 = -1 \rightarrow x^{-1} = 0,5 \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2$$

$$(2.28_L) \quad \log_{0,3} x = 4 \rightarrow x = 0,0081$$

$$(2.29_L) \quad x = \log_a \sqrt[n]{a} \rightarrow x = \log_a a^{\frac{1}{n}} \rightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$(2.30_L) \quad \log_x 25 = 2 \rightarrow x = 5$$

$$(2.31_L) \quad x = \log_k \sqrt[3]{k^6} = \log_k k^{\frac{6}{3}} = \log_k k^2 = 2 \log_k k = 2$$

2.2 Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen ist eine in der Analysis vielfach benötigte Arbeitstechnik, bei der es oft zu – vermeidbaren – Fehlern kommt.

Die zulässigen Operationen für das Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen sind im Buch „Mathematik für BWL-Bachelor“ [51] in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 zusammengestellt.

2.2.1 Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird

Beispiel 2.2-1: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.32) \quad 5(2x - 3) + 3(4 - x) - 2(x + 7) = 2x - 4 + 2(6 - x)$$

erfüllen.

Wie geht man vor? Zunächst werden alle Klammern aufgelöst, und es wird auf beiden Seiten der Gleichung so weit wie möglich zusammengefasst:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} 10x - 15 + 12 - 3x - 2x - 14 &= 2x - 4 + 12 - 2x \\ 5x - 17 &= 8 \end{aligned}$$

Die beiden erlaubten Operationen „Addition von 17“ und „Division durch 5“, nacheinander angewandt auf beide Seiten der Gleichung, liefern dann das Ergebnis:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} 5x - 17 &= 8 && | +17 \\ 5x &= 25 && |: 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Beispiel 2.2-2: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.35) \quad (a + x)(b - x) = (a - x)(b + x)$$

erfüllen.

Mit der linken und rechten Seite der Gleichung werden vier erlaubte Rechenoperationen vollzogen:

$$(2.36) \quad \begin{array}{l} ab + bx - ax - x^2 = ab - bx + ax - x^2 \quad | -ab + x^2 + bx - ax \\ 2bx - 2ax = 0 \end{array}$$

Nach dem Ausklammern des gemeinsamen Faktors $2x$ finden wir eine Gleichung vor, die ohne eine Fallunterscheidung nicht weiter behandelt werden kann:

$$(2.37) \quad 2(b-a)x = 0$$

Fallunterscheidung: Betrachten wir zuerst den Fall, dass die Differenz $(b-a)$ von Null verschieden ist. Dann können beide Seiten der Gleichung (2.37) durch $2(b-a)$ dividiert werden, man erhält einen x -Wert als Lösung:

$$(2.38) \quad (b-a) \neq 0 \rightarrow x = \frac{0}{2(b-a)} = 0$$

Falls aber die Differenz $(b-a)$ gleich null sein sollte, dann entsteht für jede beliebige reelle Zahl x die wahre Aussage $0=0$. Die Gleichung (2.35) besitzt dann unendlich viele Lösungen.

Beispiel 2.2-3: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.39) \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{2-x}{x+8}$$

erfüllen.

Zunächst muss festgehalten werden, dass keiner der beiden Nenner Null werden darf, das heißt, es muss $x \neq 1$ und $x \neq -8$ gefordert werden.

Nach dieser Vorüberlegung werden beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner $(1-x)(x+8)$ multipliziert. Damit ergibt sich als Lösung der Wert $x = -1/2$:

$$(2.40) \quad \begin{array}{l} \frac{1+x}{1-x} = \frac{2-x}{x+8} \quad | (1-x)(x+8) \\ (1+x)(x+8) = (2-x)(1-x) \\ x^2 + 9x + 8 = x^2 - 3x + 2 \quad | -x^2 + 3x \\ 12x + 8 = 2 \quad | -8 \\ 12x = -6 \quad | :12 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Beispiel 2.2-4: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.41) \quad \frac{x+4}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

erfüllen.

Die Gleichung ist nur sinnvoll für $x \neq 1$ und $x \neq -1$, nur dort sind die verwendeten Nenner ungleich Null. Beachtet man ferner, dass nach einer binomischen Formel $(x+1)(x-1)=x^2-1$ ist, so kann die Gleichung mit dem Hauptnenner x^2-1 multipliziert werden. Das führt zur Lösung:

$$(2.42) \quad \begin{aligned} (x+4)(x-1) - 2x(x+1) &= -x^2 \\ &\rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

In den Beispielen 2.2-3 und 2.2-4 trat zwar in der Aufgabenstellung oder während der Rechnung die Unbekannte x in zweiter Potenz als x^2 auf, da der Term x^2 aber später verschwand, handelte es sich in den genannten Beispielen nicht um quadratische Gleichungen. Sie liegen dann vor, wenn bis zum Schluss der Rechnung das x^2 erhalten bleibt.

In solchen Fällen versucht man zunächst, die Normalform einer quadratischen Gleichung

$$(2.43) \quad x^2 + px + q = 0$$

zu erhalten.

Dann kann man mit der so genannten p-q-Formel (2.44) zu einer Lösungsaussage der Gleichung kommen:

$$(2.44) \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel 2.2-5: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.45) \quad (x-5)(x-7) = (x+4)(9-x) - 31$$

erfüllen.

Nach dem Ausmultiplizieren beider Seiten und Zusammenfassung entsteht hier eine quadratische Gleichung in ihrer Normalform:

$$(2.46) \quad x^2 - \frac{17}{2}x + 15 = 0$$

Man erkennt $p = -17/2$ und $q = 15$. Diese Werte werden in die p-q-Formel (2.44) eingesetzt:

$$(2.47) \quad \begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{\left(-\frac{17}{2}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\left(-\frac{17}{2}\right)}{2}\right)^2 - 15} \\ x_{1,2} &= \frac{17}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{4}\right)^2 - 15} \\ x_{1,2} &= \frac{17}{4} \pm \sqrt{\frac{289}{16} - 15} \\ x_{1,2} &= \frac{17}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{17}{4} \pm \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Es ist erkennbar: Die Gleichung (2.45), die sich während der Rechnung als quadratische Gleichung erwiesen hat, besitzt zwei Lösungen:

$$(2.48) \quad x_1 = \frac{17}{4} + \frac{7}{4} = 6 \quad x_2 = \frac{17}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{2}$$

Beispiel 2.2-6: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.49) \quad (x+1)(x+3) = (x+9)(1-x) - 32$$

erfüllen.

Wieder wird auf beiden Seiten ausmultipliziert, und nach der Zusammenfassung zeigt sich, dass x^2 nicht verschwinden wird:

$$(2.50) \quad x^2 + 4x + 3 = -x^2 - 8x + 9 - 32$$

Folglich liegt eine quadratische Gleichung vor, und die Normalform (2.43) ist anzustreben:

$$(2.51) \quad \begin{aligned} 2x^2 + 12x + 26 &= 0 \quad |:2 \\ x^2 + 6x + 13 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 13} = -3 \pm \sqrt{9-13} \end{aligned}$$

Die Anwendung der p - q -Formel führt zu einem negativen Radikanden (das ist der Wert unter dem Wurzelzeichen). Folglich hat die Gleichung (2.49) im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung.

Beispiel 2.2-7: Bestimmen Sie alle Werte von x , die die Gleichung

$$(2.52) \quad (x+2)^2 + 4 = (2x-5)^2 + 31$$

erfüllen.

Auf beiden Seiten werden die binomischen Formeln benutzt, und nach der Zusammenfassung zeigt sich erneut, dass x^2 nicht verschwinden wird.

Die Anwendung der p - q -Formel liefert ein überraschendes Ergebnis:

$$(2.53) \quad \begin{aligned} x^2 + 4x + 4 + 4 &= 4x^2 - 20x + 25 + 31 \\ 3x^2 - 24x + 48 &= 0 \quad |:3 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 16} = 4 \pm \sqrt{16-16} = 4 \end{aligned}$$

Da unter dem Wurzelzeichen eine Null entsteht, fallen die beiden Lösungen x_1 und x_2 zusammen – die Gleichung (2.52) hat nur den Wert 4 als Lösung.

Man spricht in solchen Fällen von einer so genannten Doppellösung.

2.2.2 Aufgaben**Aufgabe 2.2-1:** Man löse die folgenden Gleichungen

(2.54) $13 - (5x + 2) = 8x - 20 - (x - 7)$

(2.55) $3(5x - 7a) + 5(3b - 7x) = 7(5b - 3a)$

(2.56) $(3x - 2)(x + 7) - (4x - 1)(1 + x) = (x - 2)(5 - x)$

(2.57) $\frac{x+1}{15} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{3x-16}{3}$

(2.58) $\frac{5x-1}{2x-1} - \frac{5x+2}{4x-2} - \frac{4x-1}{6x-3} + \frac{7x-2}{8x-4} = 1$

(2.59) $\frac{1}{8-4x} - \frac{1}{8} + \frac{x}{16+8x} = \frac{x+5}{16-4x^2}$

Aufgabe 2.2-2: Man löse die folgenden Gleichungen

(2.60) $x^2 + 22x + 112 = 0$

(2.61) $\frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{2}{15} = 0$

(2.62) $(x-4)^2 + (x-7)^2 = 29$

(2.63) $\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3x-4}{x+1} = \frac{3x+3}{x^2-1}$

(2.64) $\frac{x-3}{2x+7} = \frac{3x+1}{x-5}$

(2.65) $a^2 + \frac{a^2 - b^2}{x^2 - 2x} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}$

Wenn anstelle ausführlicher Lösungen nur die Ergebnisse angegeben sind, dann findet man die ausführlichen Lösungen im Internet unter www.w-g-m.de/bwl-ueb.html

2.2.3 Lösungen**Lösungen zur Aufgabe 2.2-1:**

(2.54_L) $13 - (5x + 2) = 8x - 20 - (x - 7) \rightarrow x = 2$

(2.55_L) $3(5x - 7a) + 5(3b - 7x) = 7(5b - 3a) \rightarrow x = -b$

(2.56_L) $(3x - 2)(x + 7) - (4x - 1)(1 + x) = (x - 2)(5 - x) \rightarrow x = \frac{1}{3}$

(2.57_L) $\frac{x+1}{15} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{3x-16}{3} \rightarrow x = 7$

$$\frac{5x-1}{2x-1} - \frac{5x+2}{2(2x-1)} - \frac{4x-1}{3(2x-1)} + \frac{7x-2}{4(2x-1)} = 1 \mid \cdot 12(2x-1) \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$12(5x-1) - 6(5x+2) - 4(4x-1) + 3(7x-2) = 12(2x-1)$$

$$(2.58_L) \quad 11x = 14$$

$$x = \frac{14}{11}$$

$$(2.59_L) \quad \frac{1}{8-4x} - \frac{1}{8} + \frac{x}{16+8x} = \frac{x+5}{16-4x^2} \rightarrow x=5 \quad | x| \neq 2$$

Lösungen zur Aufgabe 2.2-2:

$$(2.60_L) \quad x^2 + 22x + 112 = 0 \rightarrow x_1 = -8 \quad x_2 = -14$$

$$(2.61_L) \quad \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{20}x + \frac{2}{15} = 0 \rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{8}{15}$$

$$(2.62_L) \quad (x-4)^2 + (x-7)^2 = 29 \rightarrow x_1 = 9 \quad x_2 = 2$$

(2.63_L) Vor Beginn der Rechnung müssen die beiden Werte $x=1$ und $x=-1$ ausgeschlossen werden, denn es darf kein Nenner Null werden. Dann wird gerechnet:

$$\frac{2x+1}{x-1} - \frac{3x-4}{x+1} = \frac{3x+3}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1)$$

$$(2x+1)(x+1) - (3x-4)(x-1) = 3x+3$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 6 \quad x_2 = 1$$

Das Rechenergebnis liefert nun doch die Zahl $x=1$, die ausgeschlossen werden musste. Also besitzt die Gleichung (2.63) nur die eine Lösung $x=6$.

$$(2.64_L) \quad \frac{x-3}{2x+7} = \frac{3x+1}{x-5} \rightarrow x_{1,2} = -\frac{31}{10} \pm \sqrt{\frac{961}{100} + \frac{8}{5}}$$

$$(2.65_L) \quad a^2 + \frac{a^2 - b^2}{x^2 - 2x} = \frac{b^2(x+2)}{x-2}$$

$$x_1 = \frac{a+b}{a-b} \quad x_2 = \frac{a-b}{a+b}$$

Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch

Ergänzungen für Vertiefung und Training

Matthäus, H.; Matthäus, W.-G.

2016, XVIII, 318 S. 100 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-11574-6