

---

## 2.1 Grundbegriffe der geometrischen Nichtlinearitäten

Bei einer geometrisch linearen Berechnung geht man von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Gleichgewicht am **unverformten** System,
2. kleine Rotationen, damit linearisierte Kinematik (s. Abb. 2.1),
3. kleine Dehnungen,  
d. h. es ist sinnvoll und ausreichend, die Dehnungen als Längenänderungen bezogen auf die **Ausgangslängen**  $l_0$  zu definieren.

Von diesen Voraussetzungen wird im Folgenden schrittweise abgewichen, d. h. es werden

1. Gleichgewicht am **verformten** System,
2. große Drehungen (Rotationen) und
3. große Dehnungen

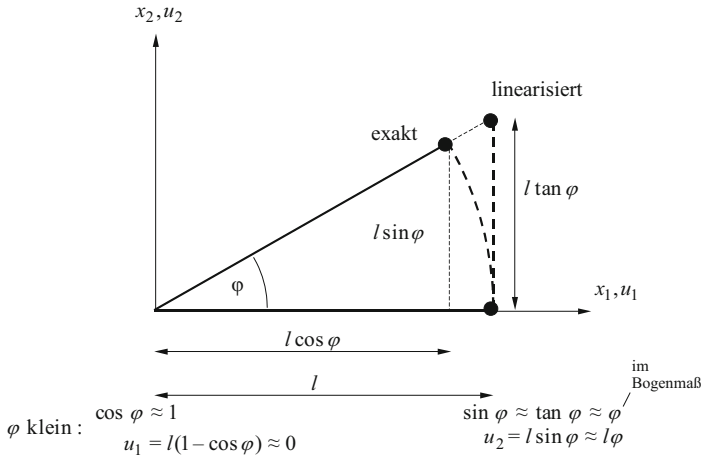
betrachtet. Eher müsste es kinematische Nichtlinearität heißen, der obige Begriff ist aber eingeführt, vermutlich weil diese Winkelbeziehungen in der Mathematik Teil der Geometrie sind.

---

## 2.2 Theorie 2. Ordnung, Gleichgewicht am verformten System

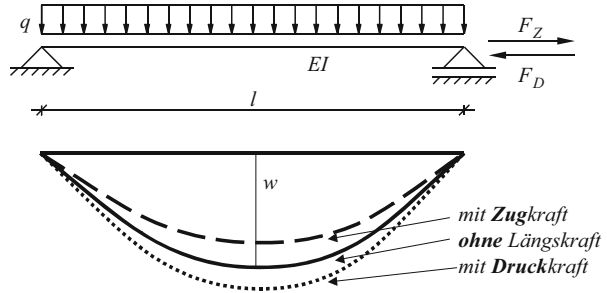
### 2.2.1 Motivation und FE-Umsetzung

Es wird nur von Voraussetzung 1 abgewichen. Diese Theorie ist für die meisten Anwendungen im Bauwesen ausreichend und bildet die Grundlage der Euler'schen Knicktheorie und der gängigen analytischen Lösungen für Plattenbeulen.



**Abb. 2.1** linearisierte Kinematik

**Abb. 2.2** Folge des Gleichgewichts am verformten System



Man betrachte den Balken auf zwei Stützen aus Abb. 2.2. Bei der vollständig linearen Theorie sind die Querblastung  $q$  und die Längskraft  $F$  entkoppelt: die Querblastung erzeugt Querkraft und Moment, die Längskraft eine Normalkraft. Beim Gleichgewicht am verformten System muss aber berücksichtigt werden, dass die Kraft  $F$  einen Hebelarm  $w$  gegenüber Punkten auf der Biegelinie aufweist, der zunächst der Durchbiegung infolge der Querblastung entspricht. Daraus ergibt sich in erster Näherung ein Zusatzmoment

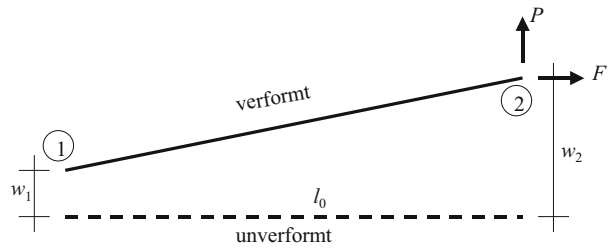
$$\Delta M = -F_Z w \tag{2.1}$$

Das bedeutet eine Entlastung bei Vorliegen einer Zugkraft  $F_Z$ . Dies führt zu weniger Durchbiegung und damit zu einer etwas geringeren Entlastung im endgültigen Gleichgewichtszustand.

Bei Vorliegen einer Druckkraft  $F_D$  lautet das Zusatzmoment in erster Näherung

$$\Delta M = F_D w \tag{2.2}$$

**Abb. 2.3** Zum Gleichgewicht am verformten Stabelement



Dies bewirkt eine Zunahme der Durchbiegung und damit des Zusatzmomentes usw. Ob sich daraus schließlich eine endliche Durchbiegung ergibt, hängt von der Größe der Druckkraft ab. Bei Überschreiten der Euler'schen Knicklast wächst die Durchbiegung über alle Grenzen.

Für das einfachste Finite Element, das Stabelement ohne Biegesteifigkeit (Abb. 2.3), wird dieser Effekt, wie nachfolgend beschrieben, berücksichtigt.

Wegen der fehlenden Biegesteifigkeit ist am unverformten System ein Gleichgewicht mit der Last  $P$  nicht möglich. Am verformten ergibt jedoch die Summe der Momente um das linke Ende:

$$F(w_2 - w_1) = Pl_0 \quad (2.3)$$

Nach  $P$  aufgelöst:

$$\frac{F}{l_0}(w_2 - w_1) = P \quad (2.4)$$

Bei den vorausgesetzten kleinen Drehungen ist die Längskraft  $F$  ungefähr gleich der Normalkraft  $N$ , die sich wiederum als Spannung  $\sigma$  mal Fläche  $A$  ausdrücken lässt:

$$\frac{\sigma A}{l_0}(w_2 - w_1) = P \quad (2.5)$$

In Matrixschreibweise lautet das:

$$\frac{\sigma A}{l_0} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = P \quad (2.6)$$

Unter Einbeziehung der Längsverschiebungen  $u_i$  und Berücksichtigung der Tatsache, dass die gleiche Überlegung auch für eine Querlast am linken Knoten 1 möglich ist, lässt sich dies zu

$$\underbrace{\frac{\sigma A}{l_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 \\ 0 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

erweitern. Ein Term, der eine Verknüpfung zwischen Verschiebungen und Kräften herstellt, heißt Steifigkeit. Die Matrix  $\mathbf{S}$  fällt auch darunter, jedoch ist hier die Steifigkeit nicht von Materialparametern abhängig, sondern von Spannungen, weshalb  $\mathbf{S}$  Spannungsversteifungsmatrix (engl. *stress stiffening matrix*) heißt. Die Spannung ist jedoch vorzeichenbehaftet. Eine Druckspannung führt also zu einer Schwächung.

Die Matrix  $\mathbf{S}$  wirkt als Ergänzung zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  nach linearer Theorie, beim ebenen Fachwerkstabelement gilt also:

$$\left( \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma A}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2z} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

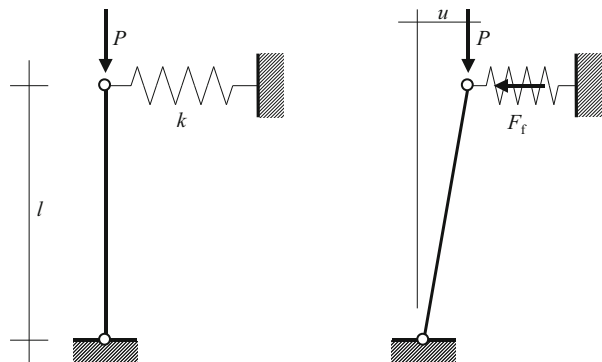
## 2.2.2 Warum Theorie 2. Ordnung?

Im vorigen Kapitel wurde die vollständig linearisierte Kinematik benutzt. Warum ist dennoch von Theorie 2. Ordnung die Rede? Dazu wird das folgende Stabilitätsproblem auf zwei Arten gelöst, zunächst durch Gleichgewicht am verformten System und linearisierte Kinematik (Abb. 2.4).

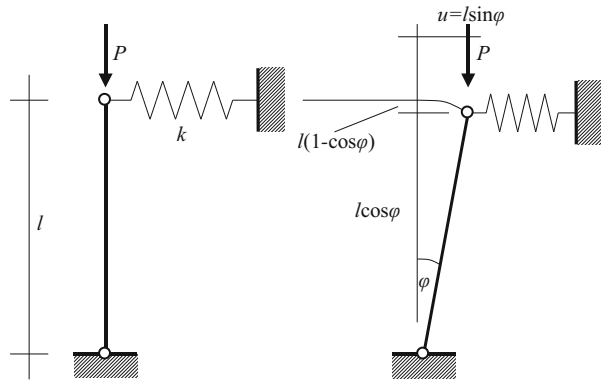
Das Gleichgewicht am verformten System ergibt:

$$Pu = F_f l \quad (2.9)$$

**Abb. 2.4** Stabilitätsproblem mit linearisierter Kinematik



**Abb. 2.5** Stabilitätsproblem mit exakter Kinematik



Die Federkraft beträgt

$$F_f = ku \quad (2.10)$$

also

$$Pu = kul \quad (2.11)$$

$$(P - kl)u = 0 \quad (2.12)$$

Diese Gleichung hat die Trivillösung  $u = 0$  und die nicht-triviale

$$P = kl \quad (2.13)$$

Das ist die kritische Last des Systems, weil dann eine Verschiebung ohne Lasterhöhung möglich wird. Nun wird das Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie, zuerst mit der vollständigen Kinematik (Abb. 2.5), angewandt.

Die Last  $P$  verliert an potenzieller Energie, während die Feder solche gewinnt. Zusammen muss sich ein Minimum ergeben:

$$-Pl(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2}k(l \sin \varphi)^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (2.14)$$

Nun werden für die Winkelfunktionen deren Taylor-Reihenentwicklungen verwandt und nach dem Glied zweiter Ordnung abgebrochen:

$$\begin{array}{l} \sin \varphi \approx \varphi \\ \cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} -\frac{\varphi^3}{3!} + \dots \\ + \dots \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Diese Theorie heißt also 2. Ordnung, weil man bei der Anwendung von Energiemethoden Terme bis 2. Ordnung der Reihenentwicklung von Winkelfunktionen mitnehmen muss.

Damit wird aus (2.14)

$$-Pl \left( \frac{\varphi^2}{2} \right) + \frac{1}{2}k (l\varphi)^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (2.16)$$

Als notwendige Bedingung ergibt sich durch Ableiten nach  $\varphi$

$$-Pl\varphi + kl^2\varphi = 0 \quad (2.17)$$

$$(-P + kl)l\varphi = 0 \quad (2.18)$$

Daraus erhält man wieder als nicht-triviale Lösung die kritische Last (2.13).

### 2.2.3 Lineares Beulen

Da Theorien für die Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität hinlänglich bekannt sind und einen größeren Gültigkeitsbereich haben, ist die wichtigste verbleibende Anwendung die lineare Eigenwert-Beuluntersuchung.

Gl. (2.8) lautet in der symbolischen Matrizenschreibweise:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{S}(\sigma)) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (2.19)$$

Die Matrix  $\mathbf{S}$  hängt linear von der Spannung ab, die Spannung bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes wiederum linear von der Längskraft. Folglich ist die Spannungsversteifung infolge einer um einen Faktor  $\lambda$  gesteigerten Last  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{S}(\sigma(\lambda\mathbf{f})) = \mathbf{S}(\lambda\sigma(\mathbf{f})) = \lambda\mathbf{S}(\sigma(\mathbf{f})) \quad (2.20)$$

Ein Stabilitätsproblem (Knicken oder Beulen) liegt vor, wenn durch eine Belastung  $\lambda\mathbf{f}$  ein Spannungszustand erzeugt wird, sodass eine Verformung ohne eine weitere Lastaufbringung möglich wird. Aus (2.19) wird dann

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{S}(\sigma)) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Es handelt sich dabei um ein allgemeines Matrizen-eigenwertproblem.  $\boldsymbol{\varphi}$  wird anstelle von  $\mathbf{u}$  verwandt, um den Eigenvektor zu kennzeichnen. Der Eigenwert  $\lambda$  stellt den kritischen Lastmultiplikator für die aufgebrachte Last, also die Last, die zum Spannungszustand  $\sigma$  geführt hat, dar. Es handelt sich jedoch bei

$$\mathbf{f}_{\text{ki}} = \lambda\mathbf{f} \quad (2.22)$$

nur um die kritische Last bei der idealisierenden Annahme, dass es keine Imperfektionen (Vorkrümmungen, unberücksichtigte Lastausmitten, s. Abschn. 3.4) gibt und das Verhalten des Systems bis zum Beulen vollständig linear ist, weshalb dieses Lastniveau als *ideale kritische Last* bezeichnet wird. Tatsächlich tritt bereits darunter Stabilitätsversagen ein. Wie das in der Simulation zu erfassen ist, wird in Kap. 3 beschrieben.

Der Eigenvektor  $\varphi$ , der den Vektor der unbekanntenen Verschiebungen ersetzt hat, gibt die Richtung an, in die sich das System bei Eintritt des Beulens verschieben wird. Dieser Zustand heißt *Beuleigenform*. Sie ist nur bis auf einen Faktor bestimmt und wird daher normiert, z. B. so, dass die maximale Verschiebung 1 beträgt.

Bei einer FE-Berechnung sind die durchzuführenden Schritte:

#### Alg. 2.1 Lineare Beulanalyse

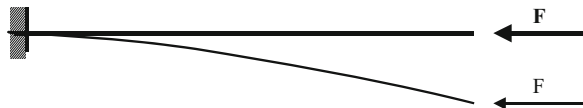
- vollständig lineare statische Berechnung zur Ermittlung des (Vor-)Spannungszustands  $\sigma$ ,
- Erstellung der Spannungsversteifungsmatrix  $S$ ,
- Lösen des Eigenwertproblems,  
in der Regel durch Vektoriteration  $\rightarrow \varphi \rightarrow \lambda$ .

Die Eigenform kann wie ein gewöhnlicher Verschiebungszustand dargestellt werden. Andere Ergebnisgrößen wie Dehnungen oder Spannungen sind von untergeordneter Bedeutung; sie stellen Inkremente multipliziert mit einem unbekanntenen Faktor dar, aber sie können zur Fehlerabschätzung herangezogen werden ([23, 25]).

#### Eulerfall

Als Beispiel wird hier der erste Eulerfall untersucht, bei dem ein Ende eingespannt und ein Ende frei ist (Abb. 2.6).

**Abb. 2.6** Stabknicken,  
1. Eulerfall



Für die Berechnung benötigt man ein Stabelement, das einen Dehnstab- und einen Biegebalkenanteil enthält. Das Gleichungssystem lautet so vor Einbau der Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \mathbf{0} & -\frac{EA}{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 2 \end{bmatrix} \\ -\frac{EA}{l} & \mathbf{0} & \frac{EA}{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \mathbf{S}(\sigma) \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Die Spannungsversteifungsmatrix für den Balken wird erst in Abschn. 2.2.4 hergeleitet. Hier wird näherungsweise die Matrix  $\mathbf{S}$  für den Fachwerkstab verwendet, weil das die Handrechnung erleichtert. Nach Berücksichtigung der Festhaltung aller Freiheitsgrade des linken Knotens und Einsetzen für  $\mathbf{S}$  lauten die Gleichungen:

$$\left( \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \frac{\sigma A}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Für Schritt a) in Alg. 2.1 ist  $\sigma = 0$ , außerdem sieht man, dass der Dehn- und der Biegeanteil entkoppelt sind und für den Biegeanteil die rechte Seite  $\mathbf{0}$  ist. Man erhält aus

$$\frac{EA}{l} u_2 = -F \tag{2.25}$$

$$u_2 = -\frac{Fl}{EA} \tag{2.26}$$

Daraus ergibt sich für die Längsspannung

$$\sigma = \frac{E}{l} (-u_1 + u_2) = \frac{E}{l} \left( -\frac{Fl}{EA} \right) = -\frac{F}{A} \Rightarrow \frac{\sigma A}{l} = -\frac{F}{l} \quad (2.27)$$

Dieses Ergebnis wird in Schritt b) verwendet, sodass man für Schritt c) nach Multiplikation von  $\mathbf{S}$  mit dem Lasterhöhungsfaktor  $\lambda$ , Ausführung der Addition in der Systemmatrix und Nullsetzen des Lastvektors (weil es um eine Verschiebungsänderung ohne weitere Last geht)

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ & & \frac{12EI}{l^2} - \lambda F & -\frac{6EI}{l} \\ & \mathbf{0} & -\frac{6EI}{l} & 4EI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

erhält. Für die Handrechnung wird keine Vektoriteration durchgeführt, sondern der klassischen Betrachtungsweise gefolgt: Da die rechte Seite gleich null ist, ist dieses Gleichungssystem nur dann nicht-trivial lösbar, wenn die Determinante der Systemmatrix null wird. Dies gilt, da Biege- und Dehnanteil entkoppelt bleiben, nur, wenn die Unterdeterminante rechts unten null wird:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^2} - \lambda F & -\frac{6EI}{l} \\ -\frac{6EI}{l} & 4EI \end{bmatrix} = 0 \quad (2.29)$$

$$\left( \frac{12EI}{l^2} - \lambda F \right) 4EI - \left( \frac{6EI}{l} \right)^2 = 0 \quad | : EI \quad (2.30)$$

$$\frac{48EI}{l^2} - 4\lambda F - \frac{36EI}{l^2} = \frac{12EI}{l^2} - 4\lambda F = 0 \quad (2.31)$$

$$\lambda F = F_{ki} = \frac{12EI}{4l^2} \quad (2.32)$$

$$\boxed{F_{ki} = 3 \frac{EI}{l^2}} \quad (2.33)$$

Die analytische Lösung lautet, weil die Knicklänge  $s_k$  die zweifache Länge ist:

$$F_{ki}^{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = 2,47 \frac{EI}{l^2} \quad (2.34)$$

Mit zwei Elementen und der vereinfachten Spannungsversteifungsmatrix erhält man bereits  $2,60 EI/l^2$ .

In der Handrechnung kann das Ergebnis von (2.27) aus dem Gleichgewicht bestimmt werden. Solange es bei der Entkopplung bleibt, kann in diesem und ähnlichen Fällen Schritt a) übersprungen und auf der Basis von

$$\left( \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ \frac{6}{l} & 2 & -\frac{6}{l} & 4 \end{array} \right] + \frac{\sigma A}{l} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] \\ = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (2.35)$$

gerechnet werden.

Zur Bestimmung des Eigenvektors, der Knickform, wird die Lösung (2.33) in (2.28) eingesetzt, wodurch die unteren beiden Zeilen des Gleichungssystems linear abhängig werden. Die Lösung ist nicht mehr eindeutig. Eine Unbekannte muss daher gewählt werden:

$$w_2 = 1 \quad (2.36)$$

Die dritte Zeile des Gleichungssystems lautet dann:

$$-\frac{6EI}{l} \cdot 1 + 4EI\varphi_2 = 0 \quad (2.37)$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2l} \quad (2.38)$$

sodass man den Eigenvektor

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \frac{3}{2l} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

erhält. Zur Darstellung der Eigenform wird mit den den berechneten Freiheitsgraden zugeordneten kubischen Ansatzfunktionen ( $N_3$  und  $N_4$  in Abschn. 2.2.4) multipliziert:

$$w(\xi) = \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) \cdot 1 + \frac{1}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \frac{l}{2l} \frac{3}{2l}, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.40)$$

Zum Vergleich wird die analytische Lösung

$$w^{\text{Euler}}(\xi) = 1 - \sin\left(\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\xi\right)\right) \quad (2.41)$$

herangezogen (Abb. 2.7), die von der Form her gut übereinstimmt.



<http://www.springer.com/978-3-658-13377-1>

Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen

Kontakt, Kinematik, Material

Rust, W.

2016, XIV, 341 S. 230 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-13377-1