

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Mathematische Methoden</b>	1
1.1	Index-Schreibweise	1
1.2	Ableitungen nach einem Vektor	2
1.3	Newton-Raphson-Verfahren	3
1.4	Andere Lösungsverfahren	6
1.5	Ableitungen impliziter Funktionen	6
1.6	Schrittweitensteuerung	9
1.7	Eindimensionale Minimum-Suche ( <i>line search</i> )	10
1.8	Konvergenzkriterien	11
<b>2</b>	<b>Geometrisch nichtlineares Verhalten</b>	15
2.1	Grundbegriffe der geometrischen Nichtlinearitäten	15
2.2	Theorie 2. Ordnung, Gleichgewicht am verformten System	15
2.2.1	Motivation und FE-Umsetzung	15
2.2.2	Warum Theorie 2. Ordnung?	18
2.2.3	Lineares Beulen	20
2.2.4	Korrekte Spannungsversteifungs-Matrix für den Balken	25
2.3	Große Drehungen (Rotationen) I: Dehnungsmaß	28
2.3.1	Kinematische Effekte	28
2.3.2	Geeignetes Dehnungsmaß: Green-Lagrange-Dehnungen	30
2.3.3	Das Prinzip der virtuellen Arbeiten bei geometrisch nichtlinearen Problemstellungen	33
2.3.4	Lösung der nichtlinearen Gleichungen mit dem Newton-Raphson-Verfahren	34
2.3.5	Testproblem Zweibock	37
2.3.6	Kontinuumsmechanische Symbolschreibweise	40
2.4	Große Rotationen II: mitdrehende Formulierung ( <i>Co-rotational formulation</i> )	46
2.4.1	Grundidee	46
2.4.2	Dehnung, innere Kräfte, Tangentensteifigkeitsmatrix	48
2.4.3	Bestimmung des Elementkoordinatensystems	52

2.4.4	Beispiel Stabelement . . . . .	54
2.4.5	Numerisches Beispiel Zweibock . . . . .	59
2.4.6	Richtung von Spannungen und Dehnungen . . . . .	61
2.5	Große Dehnungen . . . . .	63
2.5.1	Eindimensionale Betrachtungen . . . . .	63
2.5.2	Übergang ins Zwei- und Dreidimensionale . . . . .	65
2.5.3	Hencky-Dehnungen in Symbolen der Kontinuumsmechanik . . . . .	66
2.5.4	Logarithmische Dehnungen und mitdrehende Formulierung . . . . .	67
2.6	Zugehörige Spannungen . . . . .	69
2.6.1	Beziehung zu den Dehnungen . . . . .	69
2.6.2	Ingenieurmaße . . . . .	70
2.6.3	Green-Lagrange-Dehnungen . . . . .	70
2.6.4	Vergleich Green/Piola-Kirchhoff und Corotational . . . . .	71
2.6.5	Logarithmische Dehnungen . . . . .	72
2.6.6	Kontinuumsmechanische Aspekte . . . . .	76
2.7	Updated-Lagrange-Formulierung . . . . .	77
2.7.1	Klassischer Ansatz . . . . .	77
2.7.2	Verallgemeinerung . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Stabilitätsprobleme . . . . .</b>	<b>81</b>
3.1	Phänomene . . . . .	81
3.2	Bedingungen für kritische Punkte, Indifferenzkriterium . . . . .	86
3.2.1	Allgemeines . . . . .	86
3.2.2	Formulierungen der Instabilitätsbedingung . . . . .	88
3.2.3	Modalanalyse (Eigenfrequenzanalyse) und Stabilitätsprobleme . . . . .	90
3.2.4	Direkte Identifikation kritischer Punkte durch ein erweitertes System . . . . .	93
3.3	Bedeutung des Eigenvektors . . . . .	95
3.4	Imperfektionen . . . . .	96
3.4.1	Imperfektion durch Kräfte . . . . .	96
3.4.2	Imperfektion durch geometrische Vorgaben . . . . .	97
3.4.3	Imperfektion durch eine lineare Beulanalyse . . . . .	97
3.4.4	Begleitende Eigenwert-Analyse . . . . .	98
3.4.5	Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	100
3.4.6	Größe der Imperfektion . . . . .	101
3.4.7	Verzweigungspunkt mit Imperfektion . . . . .	103
3.5	Klassifizierung von Instabilitätsanalysen . . . . .	103
3.5.1	Lineare Beulanalyse (LBA) . . . . .	104
3.5.2	Geometrisch nichtlineare Analyse (GNA) . . . . .	104
3.5.3	Geometrisch und materiell nichtlineare Analyse (GMNA) . . . . .	104
3.5.4	Geometrisch oder geometrisch und materiell nichtlineare imperfekte Analyse (GNIA oder GMNIA) . . . . .	105
3.5.5	Mindestmaßnahmen zur Stabilitätsanalyse . . . . .	105

---

<b>4</b>	<b>Lastinkrementierung in einer nichtlinearen Berechnung</b>	107
4.1	Kraftsteuerung	107
4.2	Einfache Verschiebungssteuerung	108
4.3	Verschiebungssteuerung mit Kraftgrößen	109
4.4	Bogenlängenverfahren (arc-length method)	110
4.4.1	Modellproblem	110
4.4.2	Suche senkrecht zur letzten Sekante	111
4.4.3	Suche senkrecht zur ersten Tangente	115
4.4.4	Suche senkrecht zur aktuellen Tangente	115
4.4.5	Suche auf einem Kreis bzw. einer Hyperkugel	118
4.4.6	Beispiel mit zwei Verschiebungskomponenten	124
4.4.7	Anfangswerte und Bogenlänge	126
4.4.8	Lösung des erweiterten Systems	127
<b>5</b>	<b>Grundzüge der Materialmodelle</b>	133
5.1	Repräsentative eindimensionale Grundelemente	133
5.1.1	Elastizität (Hooke-Element)	133
5.1.2	Plastizität (St.-Venant-Element)	134
5.1.3	Zeitabhängiges Verhalten (Newton-Element)	135
5.2	Aus Grundelementen zusammengesetzte Modelle	135
5.2.1	Elasto-Plastizität (Prandtl-Element)	135
5.2.2	Maxwell-Element für Kriechen	137
5.2.3	Kelvin-Voigt-Element für Visko-Elastizität	139
5.2.4	Erweitertes Viskoelastizitätsmodell	140
5.2.5	Bingham-Modell als Beispiel für Visko-Plastizität	141
5.2.6	Burghers-Modell	142
5.3	Tensor- und Vektorschreibweise, Tensor- und Ingenieurnotation	143
5.4	Aufspaltung und Darstellung räumlicher Spannungszustände	144
5.4.1	Hauptspannungen	144
5.4.2	Kugeltensor und Deviator	145
5.4.3	Hauptspannungsraum	147
5.5	Berücksichtigung des Materialverhaltens in der FEM	148
<b>6</b>	<b>Theorie und Numerik der linearen Visko-Elastizität</b>	151
6.1	Grundformeln für den eindimensionalen Fall	151
6.2	Einführung von Zeitschritten	153
6.3	Numerik	154
6.4	Werkstofftangente	155
6.5	Mehrdimensionaler Fall	156
6.5.1	Spannungsberechnung	156
6.5.2	Werkstofftangente	157
6.6	Temperaturabhängigkeit	159

6.6.1	Grundlagen thermo-rheologisch einfacher Materialien, Pseudo-Zeit . . . . .	160
6.6.2	Zeitintegration . . . . .	162
6.6.3	Shift-Funktionen . . . . .	164
6.6.4	Spannungen . . . . .	165
6.6.5	Tangente . . . . .	166
6.7	Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand . . . . .	167
6.7.1	Ebener Verzerrungszustand . . . . .	167
6.7.2	Ebener Spannungszustand . . . . .	167
6.8	Beispielrechnungen . . . . .	169
6.8.1	Zu Abschn. 6.1 . . . . .	169
6.8.2	Zu Abschn. 6.2 . . . . .	170
6.8.3	Zu Abschn. 6.3 . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Theorie und Numerik des Kriechens</b> . . . . .	<b>173</b>
7.1	Grundsätzliches . . . . .	173
7.2	Zeitintegration beim Kriechen . . . . .	176
7.2.1	Differenzenquotienten . . . . .	176
7.2.2	Kriechbeispiel . . . . .	177
7.2.3	Explizite Zeitintegration . . . . .	178
7.2.4	Variabler Zeitschritt . . . . .	181
7.2.5	Implizite Zeitintegration . . . . .	182
7.2.6	Zusammenfassung Kriechbeispiel . . . . .	186
7.2.7	Zusammenwirken mit anderen Materialnichtlinearitäten . . . . .	187
7.3	Allgemeine Form für lokale und globale Iteration beim impliziten Kriechen . . . . .	188
7.3.1	Bestimmung des Dehnungsinkrementes (lokale Iteration) . . . . .	188
7.3.2	Konsistente Tangente . . . . .	189
7.4	Kommentierter FORTRAN-Code . . . . .	191
7.5	Beispiele für implizite Zeitintegration . . . . .	194
7.5.1	Beispiel mit direkter Zeitabhängigkeit . . . . .	194
7.5.2	Beispiel mit indirekter Zeitabhängigkeit . . . . .	197
<b>8</b>	<b>Theorie und Numerik der Elasto-Plastizität</b> . . . . .	<b>199</b>
8.1	Grundbegriffe eindimensionalen Verhaltens . . . . .	199
8.2	Bausteine einer mehrdimensionalen Elasto-Plastizitätstheorie . . . . .	200
8.3	Fließregeln . . . . .	201
8.4	Klassische Fließbedingungen . . . . .	202
8.4.1	Gestaltänderungsenergie-Hypothese (nach von Mises) . . . . .	202
8.4.2	Schubspannungs-Hypothese (Tresca) . . . . .	203
8.4.3	Mohr-Coulomb-Bedingung . . . . .	206
8.4.4	Drucker-Prager-Bedingung . . . . .	208

8.5	Verfestigungsregeln	209
8.5.1	Einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehungen	209
8.5.2	Mehrdimensionales Verfestigungsverhalten	211
8.6	Erfüllung der Stoffgleichungen in der FEM, lokale Iteration	216
8.6.1	Allgemeine Darstellung	216
8.6.2	Beispiel lineare Verfestigung	219
8.7	Konsistente Tangente	221
8.7.1	Allgemeine Darstellung	221
8.7.2	Beispiel lineare Verfestigung	225
8.8	Beispielprogrammierung in USERPL von ANSYS	225
8.9	Modelle für kinematische Verfestigung	231
8.9.1	Besseling-Modell (Overlay-Modell)	231
8.9.2	Armstrong-Frederik- bzw. Chaboche-Modell	236
8.10	Einspielen (Shakedown) und Ratcheting	238
8.10.1	Begriffe	238
8.10.2	Melan-Theorem	239
8.10.3	Struktur-Ratcheting	240
8.10.4	Material-Ratcheting	245
8.10.5	Thermisches Ratcheting	249
8.10.6	Numerisches Ratcheting bei Temperaturzyklen	250
<b>9</b>	<b>Kontaktberechnungen: Einführung, Erfüllung der Kontaktbedingung</b>	<b>255</b>
9.1	Was bedeutet Kontakt?	255
9.2	Modellierung von Kontakt	256
9.2.1	Punkt-zu-Punkt- bzw. Knoten-zu-Knoten-Kontakt	256
9.2.2	Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt	257
9.2.3	Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt	258
9.2.4	Oberfläche-zu-Oberfläche-Kontakt	258
9.3	Kontakt-Richtungen	259
9.4	Erfüllung der Kontaktbedingung	259
9.4.1	Direkte Einführung der Nebenbedingung	260
9.4.2	Penalty-Methode	260
9.4.3	Lagrange-Multiplikator-Methode	263
9.4.4	Finite-Elemente-Testproblem	264
9.4.5	Testbeispiel: Direkte Einführung der Nebenbedingung in das Gleichungssystem (MPC)	265
9.4.6	Testbeispiel: Penalty-Verfahren	270
9.4.7	Testbeispiel: Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren	272
9.4.8	Perturbed-Lagrange-Methode	273
9.4.9	Augmented-Lagrange-Verfahren	276

---

<b>10</b>	<b>Aspekte der Kontaktmodellierung</b>	279
10.1	Knoten-zu-Oberfläche-Kontakt	279
10.2	Punkt-zu-Oberfläche-Kontakt	281
10.2.1	Integrationspunkt-Kontakt	281
10.2.2	Knoten als Integrationspunkte	286
10.3	Mortar-Kontakt	288
10.3.1	Der Kontakt-Patch-Test	288
10.3.2	Projektionsmethode	288
10.4	Auswahl von Master- und Slave-Seite	291
10.5	Kontakt mit Schalen- und Balkenelementen	293
10.5.1	Dickenberücksichtigung	293
10.5.2	Momente aus Exzentrizitäten	294
10.6	Überbestimmtheit durch Kontakt (Overconstraining)	295
10.7	Konvergenz-Erzielung	296
10.7.1	Penalty-Verfahren	297
10.7.2	Lagrange-Verfahren und direkte Einbringung (MPC)	301
10.7.3	Geeignete Vernetzung und Lastaufbringung	301
10.8	Reibung	301
<b>11</b>	<b>Kontaktfeststellung</b>	305
11.1	Suchstrategien	305
11.1.1	Bucket Sort	305
11.1.2	Pinball-Algorithmus	306
11.1.3	Topologie-Suche	308
11.2	Nahbereichs-Kontaktberechnungen	309
11.2.1	Kontakt-Normale	309
11.2.2	Pseudoelement-Algorithmus	312
11.2.3	Normalensuche	313
11.2.4	Systemmatrizen	316
11.2.5	Numerisches Beispiel	317
11.3	Konkave Knicke und Ecken	334
	<b>Literatur</b>	337
	<b>Sachverzeichnis</b>	339



<http://www.springer.com/978-3-658-13377-1>

Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen

Kontakt, Kinematik, Material

Rust, W.

2016, XIV, 341 S. 230 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-13377-1