2 Harmonische Bewegung und Fourier-Analyse periodischer Schwingungen

2.1 Darstellung und Eigenschaften harmonischer Schwingungen

Wegen der elementaren Bedeutung der harmonischen Funktionen werden sowohl diese als auch deren Überlagerungen genauer betrachtet.

Durch Parallelprojektion der gleichförmigen Kreisbewegung eines Punktes $\bar{P}$ auf eine Gerade senkrecht zur Projektionsrichtung entsteht eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung des Punktes P, die man harmonische Bewegung nennt (Bild 2.1).

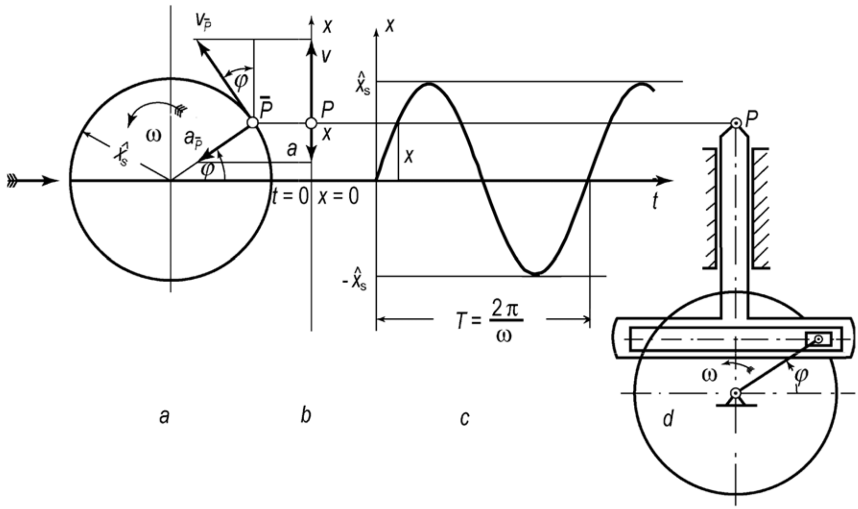

Bild 2.1 Erzeugung der harmonischen Bewegung
- a Gleichförmige Kreisbewegung des Punktes $\bar{P}$
- b Harmonische Bewegung des Punktes P auf der x-Achse
- c x, t-Diagramm der Bewegung des Punktes P
- d Mechanische Erzeugung der harmonischen Bewegung durch ein Kreuzschleifengetriebe

Aus Bild 2.1a liest man für die Auslenkung des Punktes P unmittelbar

$$x = \hat{x}_s \sin\varphi \tag{2.1}$$

H. Jäger, R. Mastel, M. Knaebel, *Technische Schwingungslehre*, DOI 10.1007/978-3-658-13793-9_2

ab. Bei gleichförmiger Drehung ist die Winkelgeschwindigkeit ω konstant. Es gilt also für den Drehwinkel

$$\varphi = \omega t. \tag{2.2}$$

In (2.1) eingesetzt ergibt sich als *Ort-Zeit-Funktion*

$$x\,(t) = \hat{x}_\mathrm{s} \sin \omega t\,, \tag{2.3}$$

also eine harmonische Zeitfunktion. Schwingungen, die sich durch harmonische Zeitfunktionen beschreiben lassen, nennt man *harmonische Schwingungen*. In (2.3) sind

$\hat{x}_\mathrm{s}$ die *Amplitude* oder halbe *Schwingungsbreite* der Sinusschwingung,
ω die *Kreisfrequenz*,
φ der *Phasenwinkel*.

Die Schwingungsdauer (Periode) ist die Zeit, die $\overline{P}$ für einen vollen Umlauf benötigt. Es gilt also $\varphi_\mathrm{T} = 2\,\pi = \omega T$. Daraus folgt für die *Schwingungsdauer*

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}\,. \tag{2.4}$$

Unter der *Frequenz* versteht man die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{2.5}$$

Wird als Zeiteinheit die Sekunde gewählt, so ergibt sich die Frequenz in Hertz (Hz).

Die Gleichung (2.5) nach der *Kreisfrequenz* umgestellt führt auf

$$\omega = 2\,\pi f = \frac{2\,\pi}{T}. \tag{2.6}$$

Zur Unterscheidung von der Einheit Hz der Frequenz wird für die Kreisfrequenz (entsprechend der Einheit einer Winkelgeschwindigkeit) die Einheit 1/*s* oder rad/*s* verwendet. Die Kreisfrequenz entspricht der Anzahl der Schwingungen in $2\,\pi$ Sekunden. Wird die Minute als Zeiteinheit gewählt, so erhält man die *Schwingungszahl*, wenn die Frequenz in Hz und die Kreisfrequenz in rad/s eingesetzt wird,

$$n = 60\,f = \frac{30\,\omega}{\pi} \tag{2.7}$$

in 1/min. In der Zahlenwertgleichung (2.7) sind die Einheiten also vorgegeben.

Anmerkung: Der Winkelgeschwindigkeit ω bei der Kreisbewegung (Drehbewegung) entspricht die Kreisfrequenz ω bei der Schwingungsbewegung. Genauso entsprechen sich die Drehzahl n und die Schwingungszahl n.

Aus der Weg-Zeit-Funktion $x\,(t)$ nach (2.3) erhält man die Geschwindigkeits- und Beschleunigungs-Zeit-Funktion durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{x}(t) = \hat{x}_s\, \omega \cos \omega t, \qquad \ddot{x}(t) = -\hat{x}_s\, \omega^2 \sin \omega t\,.$$

Aus der letzten Beziehung folgt mit (2.3)

$$\ddot{x} = -\omega^2 x\,. \tag{2.8}$$

Die Beschleunigung $\ddot{x}$ ist also sowohl der Auslenkung x proportional als auch wegen des negativen Vorzeichens stets auf $x = 0$ hin gerichtet. Die Beziehungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich mit der Kreisbewegung des Punktes $\overline{P}$ (Bild 2.1) veranschaulichen. Durch Projektion der Geschwindigkeit $\upsilon_{\overline{\mathrm{p}}} = \hat{x}_s\omega$ (Umfangsgeschwindigkeit) und der Beschleunigung $a_{\overline{\mathrm{p}}} = \hat{x}_s\omega^2$ (Zentripetalbeschleunigung) des Punktes $\overline{P}$ auf die x-Achse ergibt sich

$$\upsilon = \upsilon_{\mathrm{p}} = \upsilon_{\overline{\mathrm{p}}} \cos\varphi = \hat{x}_s\, \omega \cos \omega t = \dot{x}(t),$$

$$a = a_{\mathrm{p}} = -a_{\overline{\mathrm{p}}} \sin\varphi = -\hat{x}_s\, \omega^2 \sin \omega t = \ddot{x}(t).$$

Ist nun der Punkt P mit Masse behaftet, so kann nach der Kraft gefragt werden, die dem Massenpunkt eine solche harmonische Bewegung aufzwingt. Die Antwort liefert das Newton'sche Grundgesetz. Bei geradliniger Bewegung gilt

$$F = m\ddot{x}\,. \tag{2.9}$$

Die in Bewegungsrichtung wirkende Kraft F ist wegen $\ddot{x} = -\omega^2 x$ ebenfalls proportional zur Auslenkung x und stets zur Nulllage hin gerichtet. Dies ist z. B. der Fall bei einem elastischen Bauteil mit linearer Federrückstellung (siehe Kap.4).

Ganz allgemein lassen sich für alle ungedämpften linearen Systeme mit einem Freiheitsgrad gemäß den mechanischen Prinzipien (z. B. Newton'sches Grundgesetz oder Energieprinzipien) Bewegungsdifferentialgleichungen aufstellen, die in der *schwingungstechnischen Darstellung*

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{2.10}$$

den *Frequenzparameter* ω enthalten. Die Lösung von (2.10), also eine Zeitfunktion $x(t)$, die diese Gleichung identisch erfüllt, ist z. B. die Sinus-Funktion (2.3) aber auch die Kosinus-Funktion

$$x(t) = \hat{x}_c \cos(\omega t)\,. \tag{2.11}$$

Aus der Mathematik ist bekannt, dass die *allgemeine Lösung* von (2.10) lautet

$$x(t) = \hat{x}_s \sin \omega t + \hat{x}_c \cos \omega t\,, \tag{2.12}$$

wobei die „Amplituden" $\hat{x}_s$ und $\hat{x}_c$ frei wählbare Konstanten sind. Sie lassen sich aus den *Anfangsbedingungen* $\dot{x}(0)$ und $x(0)$ zu berechnen durch

$$\hat{x}_s = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}, \quad \hat{x}_c = x(0)\,. \tag{2.13}$$

Neben der Darstellung (2.12) ist auch die Darstellung

$$x(t) = \hat{x}\,\sin(\omega t + \varphi_{0s}) \tag{2.14}$$

möglich, bei der die *Gesamt-Amplitude* $\hat{x}$ immer positiv ist und die Phasenlage durch den *Nullphasenwinkel* φ_{0s} gekennzeichnet wird. Zwischen den Darstellungen (2.12) und (2.14) gelten die Zusammenhänge

$$\hat{x}_c = \hat{x}\sin\varphi_{0s}, \quad \hat{x}_s = \hat{x}\cos\varphi_{0s} \tag{2.15}$$

und

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_c^2 + \hat{x}_s^2}, \quad \tan\varphi_{0s} = \frac{\hat{x}_c}{\hat{x}_s}. \tag{2.16}$$

In Anlehnung an die anfängliche Deutung einer harmonischen Funktion als Parallelprojektion einer Kreisbewegung eines Punktes auf eine (vertikale) Achse kann (2.14) als Projektion eines rotierenden Zeigers mit der Länge $\hat{x}$ interpretiert werden, der zur Zeit t = 0 den Winkel φ_{0s} mit der horizontalen Achse einnimmt (Bild 2.2).

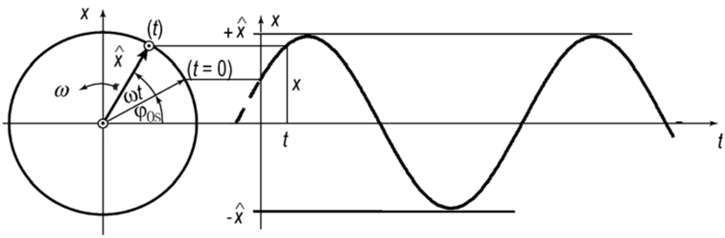

Bild 2.2 Zeigerdarstellung und Zeitverlauf einer harmonischen Schwingung

Die Zeigerdarstellung ist vorteilhaft, wenn zwei Schwingungen gleicher Frequenz überlagert werden (Bild 2.3).

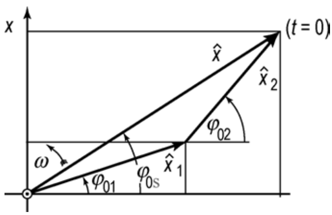

Bild 2.3
Zeigerdiagramm der Überlagerung von zwei Schwingungen gleicher Frequenz

Ganz allgemein führt die Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen

$$x_1 = \hat{x}_1\,\sin(\omega t + \varphi_{01}), \qquad x_2 = \hat{x}_2\,\sin(\omega t + \varphi_{02})$$

ebenfalls auf eine harmonische Schwingung

$$x = \hat{x} \sin (\omega t + \varphi_{0s}) \tag{2.17}$$

mit der Amplitude

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})} \tag{2.18}$$

und dem Nullphasenwinkel φ_{0s} mit

$$\tan \varphi_{0s} = \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_{01} + \hat{x}_2 \sin \varphi_{02}}{\hat{x}_1 \cos \varphi_{01} + \hat{x}_2 \cos \varphi_{02}}. \tag{2.19}$$

Die resultierende Schwingung erhält man also, wie Bild 2.3 zeigt, indem man die beiden Zeiger wie Vektoren addiert.

Mit Bild 2.3 sind die Beziehungen

$$\hat{x} \cos \varphi_{0s} = \hat{x}_1 \cos \varphi_{01} + \hat{x}_2 \cos \varphi_{02}, \quad \hat{x} \sin \varphi_{0s} = \hat{x}_1 \sin \varphi_{01} + \hat{x}_2 \sin \varphi_{02}$$

einfach herzuleiten. Die Gleichungen (2.12) bis (2.16) sind Sonderfälle mit φ_{01} = 0 und $\hat{x}_1 = \hat{x}_s$ sowie $\varphi_{02} = \pi/2$ und $\hat{x}_2 = \hat{x}_c$, wobei die jeweiligen Zeiger der Sinus- und Kosinus-Schwingung aufeinander senkrecht stehen, Bild 2.4. Fasst man die Zeiger als komplexe Zeitfunktion

$$\underline{x}\,(t) = Re\,\underline{x} + \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\,\underline{x}, \quad \mathrm{j}^2 = -1$$

auf, so kann der komplexe Zeiger

$$\underline{x}(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_{0s}) + \mathrm{j}\,\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_{0s})$$

entsprechend der Euler'schen Formel als komplexe Erweiterung einer harmonischen Schwingung und somit kurz als „komplexe Schwingung“

$$\underline{x}\,(t) = \underline{\hat{x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}, \quad \mathrm{j}^2 = -1 \tag{2.20}$$

mit der komplexen Amplitude

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{0s}} \tag{2.21}$$

dargestellt werden. Die komplexe Amplitude enthält sowohl die Amplitude

$$\hat{x} = |\underline{\hat{x}}| = \sqrt{(Re\,\underline{x})^2 + (\mathrm{Im}\,\underline{x})^2} \tag{2.22}$$

als auch den Nullphasenwinkel

$$\tan \varphi_{0s} = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{x}}{Re\,\underline{x}} \tag{2.23}$$

der reellen Schwingung nach (2.14), wobei wegen der Projektion auf die vertikale Achse

$$x\,(t) = \mathrm{Im}\ \underline{x}\,(t) \tag{2.24}$$

gilt. Ein ganz wesentlicher Vorteil der Rechnung mit komplexen Schwingungen liegt insbesondere bei den Zeitableitungen. Denn eine Ableitung der komplexen Funktion (2.20) nach der Zeit kann als Multiplikation dieser Funktion mit $(\mathrm{j}\omega)$ gedeutet werden, oder allgemein

$$\underline{x}^{(\mathrm{n})}(t) = (\mathrm{j}\omega)^{\mathrm{n}}\,\underline{x}(t), \tag{2.25}$$

wohingegen die harmonischen Sinus- oder Kosinus-Funktionen

$$x(t) = \hat{x}\cos\omega t, \quad \dot{x}(t) = -\,\hat{x}\,\omega\sin\omega t, \quad \ddot{x}(t) = -\,\hat{x}\,\omega^2\cos\omega t \tag{2.26}$$

sich nach jeder Ableitung abwechseln. Die komplexe Schwingung erleichtert insbesondere bei Systemen, die neben einer zweiten und einer nullten Ableitung auch eine erste Ableitung (Dämpfung) enthalten, die Transformation der Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen (siehe insbesondere Kapitel 7).

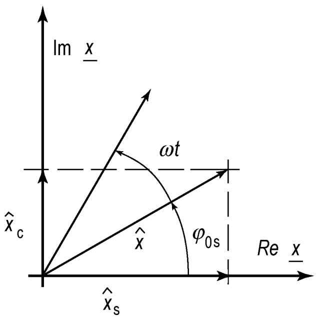

Bild 2.4
Komplexe Zeiger

Anmerkungen zur Überlagerung von Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen

Für die beiden Teilbewegungen eines Punktes gelte

$$x_1(t) = \hat{x}_1\cos(\omega_1 t + \varphi_{01\mathrm{s}}), \quad x_2(t) = \hat{x}_2\cos(\omega_2 t + \varphi_{02\mathrm{s}}).$$

Für die durch Überlagerung entstehende Bewegung sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Die beiden Kreisfrequenzen stehen in einem rationalen Verhältnis $\omega_1/\omega_2 = p/q$ mit ganzzahligen sowie teilerfremden p und q. Die sich einstellende Schwingung ist nicht mehr harmonisch, aber periodisch mit der Periodendauer

$$T = pT_1 = qT_2\,.$$

Eine Darstellung durch eine Sinus- oder Kosinus-Funktion ist nicht möglich.

Fall 2: Das Frequenzverhältnis ist nicht rational. Die durch die Überlagerung sich einstellende Bewegung ist auch nicht mehr periodisch.

Für beide Fälle gilt: Falls die Frequenzen der beiden Einzelbewegungen nahe beieinander liegen, stellt sich eine Schwebung ein, deren Einhüllende der Amplituden sich periodisch mit der Schwebungskreisfrequenz $\omega_s = \omega_1 + \omega_2$ ändert.

2.2 Harmonische Analyse periodischer Schwingungen

Bei einer *periodischen Schwingung* wiederholt sich der Zeitverlauf jeweils nach einer Periodendauer T, d. h. die Zeitfunktion $f(t)$ erfüllt die Periodizitätsbedingung $f(t) = f(t + T)$, siehe (1.1).

Eine periodische Schwingung kann mit Hilfe einer Fourier-Reihe als Summe von harmonischen Teilschwingungen dargestellt werden. Mit der Periodendauer T und der „*Grundkreisfrequenz*" $\omega = 2\,\pi/T$ gilt in reeller Darstellung

$$f(t) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\hat{f}_{sk}\sin(k\,\omega t) + \hat{f}_{ck}\cos(k\,\omega t)\Big). \tag{2.27}$$

Bei der *harmonischen Analyse* oder *Fourier-Analyse* werden die „Amplituden"-Anteile der *Grundschwingungen* ($k = 1$) und der *Oberschwingungen* ($k \geq 2$) ermittelt. Man erhält sie als Fourier-Koeffizienten k-ter Ordnung

$$\hat{f}_{sk} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\,\omega t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{f}_{ck} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\,\omega t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.28}$$

Für den Mittelwert gilt

$$f_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.29}$$

Wählt man für die Reihendarstellung die Form

$$f(t) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}_k\sin(k\,\omega t + \varphi_{0sk}) \tag{2.30}$$

ergeben sich mit den Koeffizienten nach (2.28) die Amplituden und Nullphasenwinkel

$$\hat{f}_k = \sqrt{\hat{f}_{ck}^2 + \hat{f}_{sk}^2}, \quad \tan\varphi_{0sk} = \frac{\hat{f}_{ck}}{\hat{f}_{sk}} \tag{2.31}$$

für die harmonischen Anteile der k-ten Ordnung. Die Gleichungen (2.28) oder (2.31) bilden das *diskrete Spektrum* der periodischen Schwingung, ihre Aufzeichnung über der Frequenzachse heißt *spektrale Darstellung* bzw. Darstellung im Frequenzbereich.

Bei Berücksichtigung von nur endlich vielen Summanden in (2.30) beschreibt diese endliche Reihe die ursprüngliche periodische Funktion angenähert. In der praktischen Anwendung für z. B. periodische Antriebskräfte oder -momente genügen wegen der Stetigkeit oft wenige Reihenglieder. An Sprungstellen bzw. an Stellen mit extremen zeitlichen Änderungen ist mit größerer Abweichung zu rechnen.

Die komplexe Darstellung kann in Anlehnung an die Einführung der komplexen Schwingung (2.20) abgeleitet werden. Für die periodische Schwingung $f(t) = f(t+T)$ lautet die komplexe Fourierreihe

$$f(t) = f_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{\hat{f}}_k \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}k\omega t} \tag{2.32}$$

mit den komplexen Koeffizienten

$$\underline{\hat{f}}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.33}$$

Neben dem diskreten Spektrum periodischer Schwingungen spielt das *kontinuierliche Spektrum* von Zeitverläufen mit endlicher Energie als *Fourier-Transformation* vor allem auch in der Mess- und Regelungstechnik eine bedeutende Rolle. Hier wird nicht näher darauf eingegangen.

Das Beispiel einer Rechteckpulsfolge mit der Pulshöhe F und der Pulsdauer T_1 zeigt Bild 2.5. Sowohl der Mittelwert als auch die Amplituden des diskreten Spektrums

$$f_0 = F\frac{T_1}{T}, \quad \hat{f}_{ck} = F\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\pi\frac{T_1}{T}\right), \quad \hat{f}_{sk} = 0, \quad k = 1, 2, ... \tag{2.34}$$

sind eingezeichnet. Es ist bemerkenswert, dass die Einhüllende der Spektralwerte die gleiche Form hat wie das kontinuierliche Spektrum eines einzelnen Rechteckpulses.

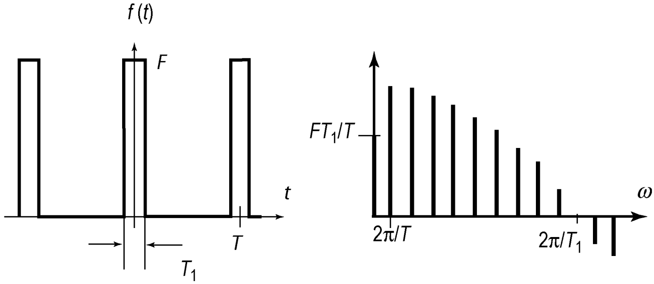

Bild 2.5 Rechteckpulsfolge im Zeit- und Frequenzbereich

2.3 Aufgaben

Aufgabe 2.1: Für die Bewegung einer Masse in x-Richtung gilt

$$x_1 = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \;\text{ mit }\; \hat{x}_1 = 5\,\text{cm}, \quad \omega = 10\,\text{s}^{-1}, \quad \varphi_{01} = 30°.$$

Dieser Bewegung überlagert sich in x-Richtung eine zweite Bewegung, für die gilt

$$x_2 = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \text{ mit } \hat{x}_2 = 3\text{ cm}, \omega = 10\text{ s}^{-1}, \varphi_{02} = 45° .$$

Für die resultierende Bewegung ermittle man zeichnerisch und rechnerisch die Amplitude und den Nullphasenwinkel.

Aufgabe 2.2: Eine Funktion mit der Periode T ist gegeben durch

$$f(t) = H \qquad \text{für } 0 \leqq t < T/2;$$

$$f(t) = \frac{2H}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right) \qquad \text{für } \frac{T}{2} \leqq t \leqq T, \quad \text{siehe Bild 2.6.}$$

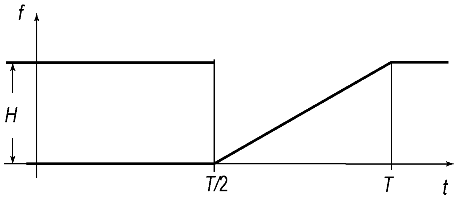

Bild 2.6
Periodische Funktion

Die Funktion ist durch eine trigonometrische Reihe (Fourier-Reihe) bis zur 3. Ordnung zu approximieren. Die Fourier-Koeffizienten sind zu berechnen.

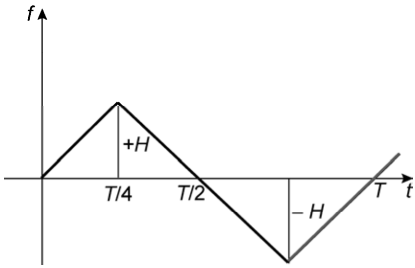

Bild 2.7
Periodische Funktion

Aufgabe 2.3: Die in Bild 2.7 gezeichnete periodische Funktion mit der Periode T ist durch eine trigonometrische Reihe zu approximieren. Man berechne die Koeffizienten $\hat{f}_{sk}, \hat{f}_{ck}$ und zeichne die Näherungskurve f_5.

Springer

http://www.springer.com/978-3-658-13792-2

Technische Schwingungslehre
Grundlagen - Modellbildung - Anwendungen
Jäger, H.; Mastel, R.; Knaebel, M.
2016, XIV, 242 S. 229 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-13792-2