# 1 Anwendungsorientierung und realitätsbezogene Aufgaben

In dieser Arbeit werden Schülerstrategien und Hürden im Umgang mit Kontextgrenzen *aus soziologischer Perspektive* thematisiert. Die mathematikdidaktische Fokussierung erfolgt dabei durch den Blick auf *realitätsbezogene Aufgaben*. Das Verhältnis von „Text“ und „Kontext“ wird auf verschiedenen Ebenen angesprochen.

Im ersten Kapitel wird der Untersuchungsgegenstand „Realitätsbezogene Aufgaben“ aus mathematikdidaktischer Sicht mit seinem mathematikdidaktischen Begründungskontext kurz vorgestellt (1.1 und 1.2). Dabei wird insbesondere der von den jeweiligen Aufgabentypen geforderte *Umgang mit Ungenauigkeit* problematisiert, der sich durch die jeweilige Betonung des realitätsbezogenen Sachkontextes ergibt.

Die mit der Nutzung realitätsbezogener Aufgaben verbundenen Ansprüche und Ziele machen deutlich, dass solche Aufgaben mehr als nur mathematische Routineprozeduren verlangen. Das heißt auch, dass Schwierigkeiten bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben nicht nur mathematische Kenntnisse im „strengen Sinne“ betreffen: Die Abschnitte 1.3 und 1.4 thematisieren einerseits Fragen des sprachlichen Anspruchs von ggf. umfänglichen Textaufgaben und andererseits spezielle Problemlagen, die erst durch Anbindungen an lebensweltliche Kontexte entstehen. Hier werfen Hinweise aus der Literatur und eigene Beobachtungen die Frage der Milieuspezifität[1] auf, d. h. die Frage, ob Schwierigkeiten im Umgang mit dem Sachkontext einer Aufgabe ein Phänomen

---

1 Zur Nutzung des Begriffs „Milieu“:
In dieser Arbeit wird wesentlich auf (Basil Bernsteins) bildungssoziologische Konzepte des Englands der 1960er Jahre rekurriert. Für diese Konzepte ist der Begriff „class“ zentral. Bei Bernstein wird die relevante Eigenart der „working class“ bzw. der „middle class“ in der von Durkheim übernommenen Dichotomie der „mechanischen“ bzw. „organischen“ Solidarität gesehen, d. h. in unterschiedlich arbeitsteiligen Gesellschaftsstrukturen. Insofern der Begriff „class“ die Positionierung im System der Arbeitsteilung beschreibt, gibt es für ihn keine zufriedenstellende Übersetzung. Üblicherweise und insbesondere auch in der deutschen Bernstein-Übersetzung von 1972 (Bernstein 1972) wird „class“ mit „Schicht“ übersetzt. Diese Übersetzung wird hier (in Anführungszeichen) vor allem dort übernommen, wo es um die Darstellung der entsprechenden Werke geht. Wo – in anderen Teilen dieser Arbeit – tatsächliche Verhältnisse oder Charakteristika sozialer Gruppen in unserer derzeitigen „Gesellschaftsordnung“ angesprochen werden, wird überwiegend der stärker beschreibende Begriff „Milieu“ oder „(soziale) Herkunft“ gewählt. Diese Begriffe scheinen der Autorin – im Gegensatz zu „Schicht“ oder „Klasse“ – am wenigsten begrifflich belastet zu sein und können zumindest, und dies ist für die Andockung an die englischen Arbeiten wichtig, allgemeinverständlich die Bedeutung der „Lebensbedingungen“ und „Werthaltungen“ einer bestimmten sozialen Gruppe geeignet herausstellen (vgl. auch das Verständnis von „Milieu“ bei Gellert, Idel, Rabenstein & Sertl 2014).


N. Leufer, *Kontextwechsel als implizite Hürden realitätsbezogener Aufgaben*, Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 26, DOI 10.1007/978-3-658-13928-5_2

sind, das *einige Schülerinnen und Schüler mehr* betrifft *als andere*.

Um dem nachzugehen, muss eine soziologische Theorie herangezogen werden, die in der Lage ist, entsprechende Beobachtungen mit dem sozialen Hintergrund von Schülerinnen und Schülern zu verknüpfen. Unter Berücksichtigung eigener Feldbeobachtungen (in Abschnitt 1.5) und im Vorgriff auf die Arbeiten des Bildungssoziologen Basil Bernstein (in Kapitel 2) wird in Abschnitt 1.6 die konkrete Fragestellung dieser Arbeit abgeleitet.

## 1.1 Begründungskontexte für realitätsbezogene Aufgaben

Mathematikaufgaben mit Realitätsbezügen haben hierzulande in den letzten Jahrzehnten stark an Bedeutung gewonnen (z. B. Blum 1996, Kaiser 1995, Leuders & Maaß 2005, Leuders & Maaß 2007, Büchter & Leuders 2005; ein umfassender aktueller Überblick findet sich z. B. bei Borromeo Ferri et al. 2013). Nicht nur, aber auch waren sicherlich die enttäuschenden Ergebnisse der großen Schulleistungsstudien mit dafür verantwortlich, Forderungen nach mehr „Anwendungsbezug“ bzw. „Realitätsbezug“ sowohl auf der mathematischen und mathematikdidaktischen als auch auf der bildungsadministrativen Ebene zu formulieren.

Die Begründungskontexte der (über-)institutionellen Ebene sind dabei mehrschichtig: Insbesondere in der *mathematikdidaktischen Diskussion* sind mit der Forderung nach einer stärkeren Anwendungsorientierung eine Vielzahl substanzieller, unterschiedlicher und vielleicht sogar kontroverser Ziele verbunden, die sich verschiedenen theoretischen Haltungen gegenüber dem Mathematikunterricht bzw. verschiedenen pädagogischen und didaktischen Ansätzen zuordnen lassen (dargestellt z. B. bei Blum 1985, Kaiser 1995, Kaiser & Sriraman 2006, Kaiser, Sriraman, Blomhøj & Garcia 2007, Borromeo Ferri & Kaiser 2008, Greefrath et al. 2013). Mit solchen *mathematikdidaktischen Begründungskontexten* befasst sich dieses Kapitel.

Hierzu werden entlang eines kurzen geschichtlichen Abrisses, orientiert an Darstellungen bei Kaiser (1995) und Heymann (1996), einige entsprechende Ansätze vorgestellt (1.1.1). Sie zeigen, dass mit der Forderung nach „Anwendungen im Mathematikunterricht“, aber auch mit der gegenteiligen Forderung nach „formaler Mathematik“, schon immer differierende Überzeugungen angesprochen wurden. Dies ist insofern für die soziologische Perspektive dieser Arbeit relevant, als es nahelegt, Realitätsbezüge einerseits als didaktisches Konzept, andererseits aber auch als curriculare Vorgabe konsequent im Kontext ihrer gesellschaftlichen Bedingungen zu betrachten und zu diskutieren. Anschließend werden die Grundzüge der vielzitierten Konzepte Winters (z. B. 1975, 1995) und Heymanns (1996) mit dem Fokus der unterrichtlichen Aufgabe zur „Allgemeinbildung“ bzw. zur Umsetzung „allgemeiner Lernziele“ des Unterrichts vorgestellt und das in PISA genutzte Konzept der „mathematical literacy“ umrissen, um die aktuelle Betonung insbesondere der umwelterschließenden Funktion von realitätsbezogenen Aufgaben einzuordnen. Der anschließende Abschnitt 1.1.3 gibt dann eine detaillierte und systematische Darstellung einzelner Argumente bzw. unterscheidbarer „Zielbündel“ für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht.

### 1.1.1 Historischer Abriss

Realitätsbezüge im Mathematikunterricht sind nicht neu: Die Forderung nach Realitätsbezügen wird jedoch mal stärker, mal weniger stark formuliert und spiegelt zu jeder Zeit gesellschaftliche und pädagogische Überzeugungen wider. In der Literatur finden sich zahlreiche Beispiele: So hat beispielsweise die *Volksschule,* traditionell der Idee der Einheitsschule verpflichtet und mit begrenzten Bildungszielen ausgestattet, seit ihrer Einführung im 19. Jh. eigentlich nie ganz auf Anwendungen verzichtet. Und so sagte andererseits Humboldt im Rahmen der neuhumanistischen Bildungstheorie einer praxisorientierten *gymnasialen* (Mathematik-)Ausbildung den Kampf an: Humboldt wollte Kinder u. a. mit Hilfe der formalen Mathematik zu individuellen Charakteren bilden – und ausdrücklich nicht zu „Arbeitern“ oder „Staatsbürgern“ (Heymann 1996, S. 39f). Weil „Allgemeinbildung“ zu Humboldts Zeit als „Formalbildung“ verstanden wurde, war es paradoxerweise gerade der Anspruch des in diesem Sinne „allgemeinbildenden“ Mathematikunterrichts, Anwendungen aus dem Mathematikunterricht weitgehend zu verdrängen (Heymann 1996, S. 185f).

Die Meraner Reform reagierte dann Ende des 19. Jh. auf den ökonomischen Aufschwung und forcierte wiederum Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht, wobei zwischen *formalen* (im Sinne einer Betonung von Methoden und strukturellen Denkweisen) und *materialen* (im Sinne einer Betonung von Rechenfertigkeiten und konkreten Inhalten) Zielen des Mathematikunterrichts vermittelt wurde:

> „Also: wir wollen durchaus eine Belebung des mathematischen Unterrichts durch Heranziehung der Anwendungen, wir wollen aber nicht, dass das Pendel, welches in früheren Jahrzehnten vielleicht zu sehr nach der abstrakten Seite wies, nun in das ganz andere Extrem überschlägt, sondern wir wollen in der richtigen Mitte bleiben.“ (Klein 1904, S. 35, zitiert nach Kaiser 1995, S. 75)

Diese „Mitte“ zeigte sich beispielsweise in der endgültigen Fassung von 1925 (als Teil der „Richertschen Richtlinien“, vgl. Kaiser 1995, S. 76), die als allgemeines Lernziel die Fähigkeit forderte „das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbständig anzuwenden“ (Lietzmann 1925, zitiert nach Kaiser 1995, S. 76).

Mit der Machtergreifung der Nationalsozialisten wurde diese Mitte wieder aufgegeben: Den Nazis galt die formale Mathematik als „jüdisch“ und die Anwendungsorientierung dagegen als „deutsch“. Als Pate der „deutschen Mathematik“ stand im Wesentlichen Ludwig Bieberbach, der als verbindendes Element zum Dritten Reich die „Ordnung, Disziplin“ der Mathematik lobte und feststellte: „[B]eide bekämpfen das Chaos, die Willkür" (Bieberbach 1936[2]). Anwendungen bestanden zu dieser Zeit in hochgradig nationalsozialistischen Inhalten, welche die grundsätzliche Forderung nach Realitätsbezügen auch nach dem 2. Weltkrieg noch nachhaltig diskreditierten. Ab Ende der 50er Jahre spielten Anwendungsbezüge im Unterricht zunächst keine große Rolle mehr („Neue Mathematik“, vgl. Heymann 1996, S. 185). Auch berühmte Didaktiker dieser Zeit wie Wagenschein und Wittenberg greifen, vermutlich um das Bildungspotenzial der Mathematik hervorzuheben, vorrangig auf innermathematische Themen zurück (Heymann 1996, S. 186).

Ende der 1960er Jahre wurde dann auf internationaler Ebene die fehlende Effizienz und Lebensnähe des strukturorientierten Mathematikunterrichts der 1960er Jahre massiv kritisiert. Rufe nach einer verstärkten Orientierung auf Nützlichkeit und Anwendbarkeit der Mathematik wurden wieder laut (Kaiser 1995, S. 66). Ein prominenter Vertreter dieser Forderung war Freudenthal: In „Why to Teach Mathematics so as to be Useful“ (1968) fordert er einen Mathematikunterricht, in dem Mathematik als nützlich und anwendbar erlebt werden kann. Statt von „anwendbarer Mathematik“ spricht Freudenthal von „beziehungsvoller Mathematik“ (1973). Sie sollte seiner Ansicht nach im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts stehen, also insbesondere auch die Beziehungen der Mathematik zur Lebenswirklichkeit der Lernenden:

> „Ich möchte, dass der Schüler nicht angewandte Mathematik lernt, sondern lernt, wie man Mathematik anwendet. Das soll keinen Utilitarismus bedeuten. Ich möchte darum, statt von angewandter, anwendender oder anwendbarer Mathematik lieber von beziehungsvoller Mathematik sprechen. [...] Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an das Mathematik sich festsetzt [...].“ (Freudenthal 1973, S. 76f)

Freudenthal präsentiert sich hier als Vertreter einer wissenschaftlich-humanistischen Auffassung in Bezug auf die Implementierung von Realitätsbezügen im Unterricht, für die die grundsätzliche „Befähigung des Lernenden, zwischen Mathematik und Realität Bezüge herzustellen“ zentral ist (Kaiser 1995, S. 71; vgl. Abschnitt 1.1.3).

Hierzulande wurde die Forderung nach Realitätsbezügen erst mit einer gewissen Zeitverzögerung in den 1970ern wieder intensiv erhoben (Kaiser 1995, S. 66, Heymann 1996, S. 188). Kaiser (1995) unterscheidet in Anschluss an Niss (1987) und Blum & Niss (1991) drei Phasen der Entwicklung in der didaktischen Diskussion. Ausgangspunkt einer „ersten Phase“ war die Kritik an der

2 Zitiert nach: Judith Luig (2008). Die Mathe-Nazis. Erschienen in der taz, 30.08.2008. Das Zitat entstammt: Hamel, G. (1933). Die Mathematik im Dritten Reich. In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 39, S. 306-309.

gängigen Praxis des Mathematikunterrichts, insbesondere an der Realitätsferne der im Mathematikunterricht üblicherweise behandelten Anwendungen. Wichtigste theoretische Neuerung dieser Phase war die Trennung von Modell- und Realitätsebene. Heymann (1996, S. 186) spricht in diesem Zusammenhang von der *modelltheoretischen Interpretation* des Anwendens von Mathematik, die er als größten Fortschritt gegenüber den Diskussionen vor 1960 benennt und die er für den wichtigsten gemeinsamen Nenner aller Verfechter der Anwendungsorientierung hält – trotz der mitunter sehr unterschiedlichen Zielsetzungen (vgl. 1.1.3). Die *modelltheoretische Perspektive* meint dabei, dass der Anspruch nicht darin besteht, „versteckte" Mathematik in einer Sachsituation zu „finden", sondern dass vielmehr eine mathematische Betrachtungsweise an eine Sachsituation herangetragen werden müsse: Die Sachsituation wird also „mathematisch modelliert", mathematische Aktivitäten finden innerhalb eines *Modells* statt und deren Ergebnis wird an der Sachsituation reflektiert und geprüft (Heymann 1996, S. 187).

Die Verlegung des Schwerpunktes auf die Aktivitäten der Lernenden, d. h. in diesem Fall: das selbständige Erstellen von Modellen, war dann im Wesentlichen eine Entwicklung der „zweiten Phase" Mitte der 1970er bis Mitte der 1990er (Kaiser 1995, S. 66ff).

Die „dritte" bzw. letzte Phase (Mitte der 1990er bis heute) beschreibt die derzeitige Situation, in der vielfältige Ziele diskutiert werden, die mit Anwendungen im Mathematikunterricht verbunden sind (vgl. 1.1.3 in dieser Arbeit). Es haben sich sowohl die in realitätsbezogenen Beispielen angewandten mathematischen Themengebiete als auch die berücksichtigten außermathematischen Themengebiete verbreitert (Kaiser 1995, S. 67). Die Relevanz und die Bedeutung der „außermathematischen Realitätsbezüge" (ebd., S. 67) ist gestiegen und es wird verstärkt die Forderung nach Behandlung *authentischer* Beispiele erhoben. Zudem werden Modellierungsprozesse vermehrt auch empirisch untersucht sowie deren Verläufe und etwaige Hürden diskutiert (z. B. Borromeo Ferri 2006, Borromeo Ferri et al. 2013).

### 1.1.2 Mathematikunterricht und (Allgemein-)Bildung

Die Mathematikdidaktiker Heymann und Winter liefern mit ihren viel diskutierten Arbeiten zu Allgemeinbildung und Mathematikunterricht bzw. zu Grunderfahrungen im Mathematikunterricht zentrale mathematikdidaktische Begründungslinien für einen realitätsbezogenen bzw. anwendungsorientierten, ausgewogenen Mathematikunterricht.

*Das Allgemeinbildungskonzept von Hans Werner Heymann*

Hans Werner Heymann stellt 1996 in seiner Habilitationsschrift „Allgemeinbildung und Mathematik" ein Allgemeinbildungskonzept zur Beurteilung und

Kritik des Mathematikunterrichtes aus einer dezidiert bildungstheoretischen Perspektive vor. Hierfür unterscheidet er die Konzepte Allgemeinbildung und Bildung:

„Allgemeinbildung ist so zu konzipieren, daß sie individuelle Bildung in großer Vielfalt möglich macht. Allgemeinbildung muß Raum lassen für eine Fülle unterschiedlicher, eventuell auch konkurrierender individueller Bildungsideale. Schulische Allgemeinbildung wird so zur *Bedingung der Möglichkeit von Bildung*. Allgemeinbildung ist für den Einzelnen Voraussetzung vernünftiger Selbstverwirklichung; sie eröffnet ihm Zugänge zu allem Besonderen, auf das er sich einlassen, für das er sich einsetzen sollte, um ganz Mensch zu sein.“ (Heymann 1996, S. 46, eig. Hv.)

Heymann legt Allgemeinbildung „als Aufgabe der Schule und als Maßstab für Fachunterricht“ (Heymann 1996, Titel) fest und entwickelt aus seinem „Allgemeinbildungskonzept“ die „Sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule“ (ebd., S. 50ff): Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Weltorientierung, Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch, Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, Einübung in Verständigung und Kooperation und Stärkung des Schüler-Ichs (ebd., Kap. 3). Er greift hierfür bildungstheoretische Ansätze Wagenscheins, Humboldts und auch Klafkis (z. B. Klafki 1985) auf.

Der innere Zusammenhang der von Heymann formulierten Aufgaben zeigt sich in der Zuordnung derselben zu den Dimensionen „Befähigung zur Teilhabe“, „Befähigung zur Erkenntnis“ und „Entfaltung des Menschlichen“ (Heymann 1996, S. 129). Dabei lassen sich die Aufgaben der Lebensvorbereitung und der Stiftung kultureller Kohärenz im Besonderen der „Befähigung zur Teilhabe“ am Vorgefundenen zuordnen. Dieses ist verknüpft mit dem (neuzeitlichen) Anliegen der „Befähigung zur Erkenntnis“ und insbesondere zur Urteilsbildung über den engeren Lebenskreis hinaus: Die Aufgaben der Weltorientierung und der Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch lassen sich dieser Dimension zuordnen. Die Aufgaben der Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, der Einübung in Verständigung und Kooperation und der Stärkung des Schüler-Ichs kann als „Entfaltung des Menschlichen“ zusammengefasst werden, in der die „sozialethischen und personalen Elemente unseres Kulturkreises noch einmal besonders akzentuiert werden“ (ebd.).

Heymann legt Wert darauf, mit seiner Liste „Aufgaben der Schule“ festzulegen und nicht etwa „Merkmale einer allgemeingebildeten Persönlichkeit“: Allgemeinbildung sei lediglich als „gesellschaftlich universalisierte Prämisse individueller Bildung anzusehen“ (ebd.). So verstanden, kann sein Konzept auf eine Kategorisierung der erkennbaren Welt, der menschlichen Lebensbereiche oder der Wissenschaften verzichten und ist geeignet, als *kritischer Maßstab für die Beurteilung von Fachunterricht* herangezogen zu werden. Insbesondere setzt sein Allgemeinbildungskonzept *nicht* voraus, dass Mathematik notwendiger Bestandteil von Allgemeinbildung sein muss. Heymann ist so in der Lage, seine Aufgaben für eine allgemeinbildende Schule am Mathematikunterricht kritisch zu konkretisieren, oder anders: Heymanns sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule sind in der Lage, „Allgemeinbildung als einen Qualitätsanspruch“ zu formulieren, an dem sich der Fachunterricht messen lassen muss (Heymann 1996, S. 131ff).

*Allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts nach Heinrich Winter*

Heinrich Winter formuliert 1975 allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. Demnach soll der Mathematikunterricht den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, schöpferisch tätig zu sein, rationale Argumentation zu üben, formale Fertigkeiten zu erwerben und die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren (vgl. Winter 1975, S. 107ff, Reihenfolge verändert). Winters allgemeine Lernziele und seine berühmten *Grunderfahrungen* (z. B. 1995) liefern die auch heute breit akzeptierten und viel zitierten Begründungskontexte für realitätsbezogene Aktivitäten im Mathematikunterricht (vgl. nächsten Abschnitt). Nach Winter (1995) geht es im Mathematikunterricht darum,

- „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen
- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben.“ (Winter 1995, S. 37)

Diese Grunderfahrungen werden häufig als „Anwendungsorientierung“, „Strukturorientierung“ sowie „Problemorientierung“ überschrieben (z. B. Blum & Henn 2003). Zentral für diese Arbeit ist Winters Forderung der „Anwendungsorientierung“: Sie wird im Abschnitt 1.1.3 im Zusammenhang mit Winters Arbeiten zum „Sachrechnen“ (1985) ausgeführt.

*(Mathematical) Literacy und Allgemeinbildung*

Das von der OECD (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung) als Grundlage für die PISA-Tests formulierte Konzept der „literacy“ scheint an einigen Stellen einen grundlegenden bildungstheoretischen Anspruch zu erheben. Es wird bisweilen als Weiterentwicklung bzw. als neues Allgemeinbildungskonzept betrachtet und vor diesem Hintergrund auch kritisiert.

Grundsätzlich orientiert sich die PISA-Studie am angelsächsischen Konzept von „literacy“. Die OECD (2003) erklärt ihr Anliegen und den Begriff „literacy” folgendermaßen:

„PISA is based on a dynamic and forward-looking model of lifelong learning in which new knowledge and skills necessary for successful adaptation to a changing world are continuously acquired throughout life. PISA focuses on things that 15-year-olds will need in their future lives and seeks to assess what they can do with what they have learned. The assessment is informed – but not constrained – by the common denominator of national curricula. PISA does assess students’ knowledge, but it also examines their ability to reflect on the knowledge and experience and to apply that knowledge and experience to real world issues. For example, in order to understand and evaluate scientific advice on nutrition, an adult would not only need to know some basic facts about the composition of nutrients but also to be able to apply that information. This orientation reflects changes in the goals and objectives of curricula in participating countries, which are increasingly concerned with what students can do with what they learn at school. The term 'literacy' is used to encapsulate this broader conception of knowledge and skills." (OECD 2003, S. 12)

Das Konzept von „literacy", verstanden als bildungstheoretischer Ansatz, hat insbesondere auch in den *bildungspolitischen* Ebenen große Aufmerksamkeit erhalten. Kritisch sieht dies Messner (2003), der diese Entwicklung als „eine inhaltliche Neuausrichtung des Bildungsverständnisses von epochalem Charakter" (Messner 2003, S. 401) bezeichnet. Er kritisiert, dass die PISA-Konzepte unbefragt in Medien und Öffentlichkeit als „Inbegriff einer neuen Allgemeinbildung" (ebd.) rezipiert werden. Nach Koch (2004) erscheint diese Assoziation durchaus erwünscht: In der (deutschen) Darstellung des internationalen Frameworks zu PISA 2000 (z. B. Baumert, Stanat & Demmrich 2001) wird „literacy" mit „Grundbildung" übersetzt und in Anlehnung an Überlegungen Tenorths wird überdies mehrfach auf das traditionell deutsche Konzept von Allgemeinbildung rekurriert: So wird auf den reflexiven Zugang der Kanonbildung oder auf Ideen Humboldts hingewiesen, auch von „kanonischen Prinzipien moderner Allgemeinbildung" ist die Rede (Baumert et al. 2001, S. 21f; vgl. hierzu auch Koch 2004). Andererseits wird von den Autoren des Konzepts explizit angemerkt, dass die angelsächsische „literacy-Konzeption" mit „Literalität" oder „Grundbildung" nur unzureichend ins Deutsche übersetzt werden kann (Baumert et al. 2001, S. 20) und PISA keineswegs „beabsichtigt, den Horizont moderner Allgemeinbildung zu vermessen" (ebd., S. 21).

Für die *Mathematik* wird in der Darstellung des internationalen Frameworks „mathematical literacy" als „mathematische Grundbildung" übersetzt und definiert als

„Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht." (Klieme et al., S. 141)

Mathematik sei demnach, wie auch in den Arbeiten Freudenthals angedacht, ein System „begrifflicher Werkzeuge, mit dem sich Schülerinnen und Schüler Phänomene ihrer natürlichen, technischen, geistigen und sozialen Umwelt erschließen können" (Klieme et al. 2001, S. 142). Mathematische Kompetenz bestehe dann „im verständnisvollen Umgang mit Mathematik und in der Fähigkeit, mathematische Begriffe als ‚Werkzeuge' in einer Vielfalt von Kontexten einzusetzen" (ebd., S. 141).

In den ausgewählten Zitaten zeigt sich besonders die funktional-pragmatische Auffassung von Bildung (auch „Werkzeugcharakter" oder, wie bei Heymann (1996, S. 53f), „Qualifikationscharakter"), die dem angelsächsischen Konzept von „literacy" zugrunde liegt. Dieses ist verankert in Bezügen zum philosophischen Pragmatismus von Charles S. Peirce und William James, der das „Sich-Bewähren im Leben“, die „Nützlichkeit“ und den „Wert für die Praxis“ als leitende Maßstäbe für schulische Bildung bestimmt (vgl. Messner 2003, Jablonka 2002). Sprachliche, mathematische und naturwissenschaftliche „Kompetenzen“ werden als „basale Kulturwerkzeuge“ (Baumert et al. 2001, S. 20) verstanden und charakterisieren (und legitimieren) so wesentlich das PISA-Konzept (Messner 2003).

Gerade diese Auffassung, so Messner (2003), konterkariere jedoch den Grundgedanken des hierzulande philosophisch verankerten Bildungsbegriffs, der gerade nicht nach *Nützlichkeit*, sondern vielmehr nach Übereinstimmung zwischen (zu bildendem) Geist und (kulturellem) Ideal frage (vgl. auch Jablonka & Keitel 2004). Zudem widerspreche, wie Gellert (2006) ausführt, der einseitige Pragmatismus des literacy-Konzepts nicht nur einem allgemeinbildenden Anspruch, sondern insbesondere auch den Freudenthalschen Ideen, auf die das PISA-Konzept jedoch vielfach rekurriere: Freudenthal (1983) verweise demnach „nicht auf das zukünftige Leben als konstruktiver Bürger; es genügt, mathematische Begriffe und Strukturen im Kontext ihrer Genese und Konstruktion zu erkennen“ (Gellert 2006, S. 287). Freudenthals Ziel sei vielmehr „eine didaktisch aufgeklärte Mathematik und nicht eine mathematisch verstandene Wirklichkeit“ (ebd.). Auch die Ideen Heymanns und Winters fänden sich im pragmatischen Ideal des internationalen Frameworks nicht adäquat abgebildet.

Das Konzept der „mathematical literacy“ stellt auch für Messner lediglich ein einseitig funktional-pragmatisches „Grundbildungskonzept“ (vgl. auch Messner 2003, S. 401) dar.

Es kann insofern als *eine* wertvolle, die funktional-pragmatischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler wertschätzende und ausgesprochen einflussreiche normative Position der aktuellen Diskussion um den Anspruch eines allgemeinbildenden Unterrichts, insbesondere auch des Mathematikunterrichts, gelten. Im Hinblick auf das „Ganze“ der schulischen Bildung ist der Ansatz jedoch pädagogisch und didaktisch verkürzt.

Das Framework der deutschen Ergänzungsstudie (z. B. Neubrand et al. 2001; vgl. auch Klieme et al. 2001) formuliert die Notwendigkeit, das Konzept der „mathematical literacy“ aufgrund in Deutschland vorliegender mathematikdidaktischer Sichtweisen zu differenzieren. Dabei wird insbesondere der Begriff der „mathematischen Grundbildung“ vom Konzept der „mathematical literacy“ abgegrenzt. Der nationale PISA-Ergänzungstest (Neubrand et al. 2001, S. 47) postuliert explizit auch die zweite und dritte Wintersche Grunderfahrung als Desideratum des deutschen Mathematikunterrichts und geht mit der Berücksichtigung von innermathematischen Zusammenhängen und „technischen“ Aufgaben in diesem Sinne auf Winters Forderung der Wahrnehmung der Mathematik auch als „deduktiv geordnete Welt“ ein.

### 1.1.3 Ziele und Positionen

Wenn sich auch unter den Befürwortern der Anwendungsorientierung bzw. Realitätsorientierung des Mathematikunterrichtes sicherlich gemeinsame und konsensfähige Begründungslinien ausmachen lassen (vgl. 1.1.1 und 1.1.2), so bestehen dennoch gravierende Unterschiede in den konkreten Zielsetzungen, in der Gewichtung von Zielen oder hinsichtlich der angestrebten Implementierung und Umsetzung von Realitätsbezügen im Unterricht. Einige solcher „Zielbündel“ werden im Folgenden in den Blick genommen. Im Anschluss folgt eine aktuelle und umfassende Gegenüberstellung didaktischer Positionen in Bezug auf das „Modellieren“, die im Rahmen der fünften Konferenz der ERME zur Konsolidierung auseinanderdriftender Perspektiven in der nationalen wie internationalen Diskussion von Kaiser & Sriraman (2006) bzw. von Kaiser et al. (2007) vorgenommen wurde.

*„Didaktische Sinngebungen“ des Sachrechnens*

Vor dem Hintergrund seiner Forderung nach einem „anwendungsorientierten Mathematikunterricht“ warb Heinrich Winter bereits vor 30 Jahren für ein „Sachrechnen“, das mehr ist, als das „Rechnen mit Sachen“ (Winter 1985, S. 14). Winter unterscheidet dabei verschiedene Ziele, die er als „didaktische Sinngebungen“ (ebd., S. 15) bezeichnet:

- das Sachrechnen als *Lernstoff*,
- das Sachrechnen als *Lernprinzip* und
- das Sachrechnen als *Lernziel* zur Befähigung zur Erschließung der Umwelt.

Beim Sachrechnen als *Lernstoff* geht es demnach darum, „Wissen über Größen und Fertigkeiten im Umgang mit Größen aufzubauen. Diese Bemühungen ergeben aber nur Sinn, wenn sie eingebettet werden in die umgreifendere pädagogische Zielvorstellung, sachrechnerische Fähigkeiten im Rahmen eines Beitrages zur Denkentwicklung der Schüler und zur Erschließung ihrer Umwelt anzustreben“ (Winter 1985, S. 24).

Realitätsbezüge, die Winter als „Bezug auf die reale Umwelt und den praktischen Erfahrungsbereich der Schüler“ (Winter 1985, S. 26) konzeptualisiert, dienen weiter als *Lernprinzip* der Entwicklung und Entfaltung mathematischer Fähigkeiten (als Teil der Allgemeinbildung), indem sie das Interesse und das Verständnis der Schülerinnen und Schüler befördern sowie helfen, beim Üben an Sachkontexten (Sachthemen) ihre Kenntnisse und Fertigkeiten besser zu festigen (ebd., S. 26). Sie fungieren demnach z. B.

- als Ausgangspunkte (Einstiege) für Lernprozesse, die Herausforderungen und Handlungsspielräume bieten,
- als Verlebendigung, Verdeutlichung bzw. als Veranschaulichung von mathematischen Begriffen durch ihre Verkörperung in Sachsituationen[3] oder
- als „buntes“ Feld der Einübung mathematischer Begriffe und Verfahren, in dem es nur bedingt um sachrechnerische Fähigkeiten geht.[4]

Das umwelterschließende Sachrechnen als *Lernziel* unterscheidet Winter hiervon ausdrücklich und fasst dies als besonders anspruchsvolles, voraussetzungsreiches didaktisches Programm auf, in das tiefere Dimensionen pädagogischen Arbeitens eingehen, nämlich „die übergeordneten Ziele des Mathematikunterrichts (sein möglicher Beitrag zur Entfaltung der *Kreativität* und zur *Sensibilisierung* für die Probleme unserer Welt) und das *Bild*, das man vom Menschen und menschlichen Lernen hat“ (Winter 1985, S. 35, eig. Hv.).

Winters Systematisierung der „Sinngebungen“ des Sachrechnens lässt sich als Grundlage für die im Folgenden dargestellte Diskussion um Ziele von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht betrachten.

*Zielperspektiven von Realitätsbezügen*

Kaiser (1995, S. 69f) erarbeitet bereits vor etwa zwanzig Jahren eine umfangreiche Übersicht von Zielen und Intentionen, die in der mathematikdidaktischen Literatur mit Realitäts- und Anwendungsbezügen verbunden werden. Sie unterscheidet „stoffbezogene Ziele“, „pädagogische Ziele“, „psychologische Ziele“ und „wissenschaftsorientierte Ziele“. Sie führt diese Unterscheidung folgendermaßen aus:

Unter einer *stoffbezogenen Zielperspektive* dienen bzw. unterliegen Realitätsbezüge der Organisation von Unterricht. Entsprechend sollen sie

- „als Ausgangspunkt von Lernprozessen dienen und damit an die Erfahrungsbereiche der Schülerinnen und Schüler anknüpfen [...]
- der Veranschaulichung und Verdeutlichung mathematischer Begriffe und Methoden dienen und damit zu einem „adäquaten“ und umfassenden Verständnis mathematischer Inhalte beitragen [...]
- der Übung mathematischer Methoden und Begriffsbildungen dienen [...]

3 Hierbei ist eine „Alltagssituation […] nicht von sich aus schon die Verkörperung eines Begriffs“, sie wird es erst, wenn man sie „im Lichte des Begriffes“ sieht (Winter 1985, S. 29): Arithmetisches Wissen muss also in die Situation hineingesehen werden.

4 Solche Sachthemen sind Situationen, die den Lernenden aus zahlreichen früheren Alltagserfahrungen vertraut sind, einerseits, damit der Erklärungsaufwand gering bleibt, andererseits darf man dann – nach Winter – ein höheres Maß an Motivation und Einsicht erwarten (Winter 1985, S. 29).

- das längere Behalten mathematischer Inhalte fördern.“ (Kaiser 1995, S. 69).

Als *pädagogisches Ziel* betrachtet Kaiser die Entwicklung von Fähigkeiten zur Umwelterschließung und führt aus:

- „Realitätsbezogener Mathematikunterricht soll den Schülerinnen und Schülern Fähigkeiten und Fertigkeiten vermitteln, wichtige Erscheinungen unserer Welt bewusster und kritischer zu sehen und praktische Nutzungsmöglichkeiten der Mathematik für das aktuelle und spätere Leben zu erfahren. Damit soll der Mathematikunterricht dazu beitragen, Schülerinnen und Schüler zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern zu erziehen.
- Das Lernziel der Vermittlung von Fähigkeiten zur Umweltbewältigung beinhaltet sowohl die Fähigkeiten bereits bekannte mathematische Verfahren […] auf außermathematische Situationen anzuwenden wie auch die Befähigung, ein außermathematisches Problem mittels selbstentwickelter mathematischer Methoden zu lösen, d. h. einen Modellbildungsprozess durchzuführen.
- Darüber hinaus sollen Realitätsbezüge im Mathematikunterricht den Schülerinnen und Schülern ein angemessenes Bild vom Verhältnis von Mathematik und Realität vermitteln und sie dazu befähigen, über das Anwenden von Mathematik kritisch zu reflektieren.“ (Kaiser 1995, S. 69f)

Realitätsbezüge können auch der Motivations- und Einstellungsverbesserung dienen. Kaiser bezeichnet dieses Zielbündel als *psychologische Ziele*:

- „Realitätsbezüge sollen die Motivation der Lernenden zur Auseinandersetzung mit der Mathematik steigern […] und
- den Schülerinnen und Schülern eine aufgeschlossenere Einstellung gegenüber der Mathematik vermitteln.“ (Kaiser 1995, S. 70)

Schließlich nennt Kaiser *wissenschaftsorientierte Ziele*, die die Vermittlung der Einsicht in die Bedeutung der Mathematik zum Verständnis alltäglicher Probleme ermöglichen soll und die Vermittlung von Mathematik als Kulturgut beinhalten:

- „Realitätsbezüge im Mathematikunterricht sollen den Schülerinnen und Schülern ein realistisches und angemessenes Bild von der Mathematik als Wissenschaft darbieten; d. h. sie sollen Einsicht in das Ineinandergreifen von mathematischen und außermathematischen Überlegungen bei der Entwicklung der Mathematik [...] vermitteln.
- Desweiteren sollen Realitätsbezüge kritisches Denken über die soziale Praxis von Mathematik anregen. Insbesondere sollen Realitätsbezüge Einsicht in das ‚merkwürdige‘ Phänomen geben, dass wir in einer zunehmend mathematisierten Umwelt leben, wobei die Mathematik zunehmend verborgen und unsichtbar ist.“ (Kaiser 1995, S. 70)

*Einordnung: Zielperspektiven von Realitätsbezügen*

Ergänzt um den Wunsch, durch die Nutzung von Sachkontexten das längere Behalten mathematischer Inhalte zu fördern, buchstabieren Winters Überlegungen zum Sachrechnen als *Lernstoff* sowie als *Lernprinzip* im Wesentlichen schon in den 1980er Jahren das Zielbündel aus, das Kaiser (1995) als „*fachbezogene bzw. stoffbezogene Ziele*“ bezeichnet. Winters Ausführungen zum umwelterschließenden Sachrechnen als *Lernziel* (s. o.) können dagegen als Grundlage der „*pädagogischen Ziele*" betrachtet werden, wie sie Kaiser 1995 beschreibt (s. o.). Mit dem Fokus sowohl auf der *Anwendung* bekannter mathematischer Verfahren als auch auf der *eigenständigen* Entwicklung mathematischer Methoden in und an außermathematischen Problemkontexten scheinen in diesem Zielbündel doch auch die Ideen eines anderen einflussreichen Ideengebers des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts durch: *Freudenthal* nämlich unterscheidet in seinen Arbeiten zwischen einer horizontalen und vertikalen Mathematisierung: Die horizontale Mathematisierung umfasst sozusagen die Übersetzung der realen Welt in die mathematisch-symbolische. Hierzu muss, nach Freudenthal, eine vertikale Mathematisierung treten, nämlich die Bewegung innerhalb der Mathematik (Freudenthal 1991). Insofern die Mathematik in dieser Weise durch die Schülerinnen und Schüler nicht nur angewandt, sondern weiterentwickelt wird, geht es bei der „pädagogischen" Zielperspektive also sowohl um eine horizontale als auch vertikale Dynamik.

Unter der Überschrift „*psychologische Ziele*" fasst Kaiser (1995, s. o.) die Förderung des Lernens von und der Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit Mathematik. Unter der ähnlichen Überschrift „lernpsychologische Argumente" führt Blum (bereits 1985) diesen Punkt *stoffbezogen* weiter aus, insofern durch die Auseinandersetzungen mit Anwendungsproblemen mathematische Inhalte „besser, umfassender und tiefergehender" (Blum 1985, S. 214) verstanden und länger behalten werden können. Insbesondere erwähnt er den positiven Einfluss von Anwendungsbezügen auf die *Einstellungen* von Schülerinnen und Schülern gegenüber mathematischen Themen oder gegenüber der Mathematik generell (ebd., S. 214). Es geht bei diesem Punkt einerseits um den Aufforderungscharakter aufseiten des Inhalts und die Motivation und das Interesse aufseiten der Lernenden. Andererseits wird auch die „Einsicht in den Sinn", also die Wahrnehmung eines bedeutungsvollen Mathematiklernens, angesprochen, die nicht ausschließlich mit dem Realitätsbezug, sondern auch mit der Auswahl und Präsentation bestimmter mathematischer Inhalte zu tun hat. Wie Kaiser (s. o.) spricht Blum (1985) von einem „*verstärkten Sinnbezug*" (ebd., S. 214, Hv. i. O.), der durch *geeignete* Anwendungen gewonnen werden kann.

Der Aspekt der „*wissenschaftsorientierten Ziele*" bzw. der Vermittlung eines Mathematikbildes, das die kulturelle Verankerung der Mathematik betont, wurde in den letzten Jahrzehnten vielfach in der Mathematikdidaktik (z. B. Fischer & Malle 1985, Prediger 2004, Lengnink & Leufer 2010), der Mathematik, aber auch in der (Mathematik-)Philosophie (z. B. Davis & Hersh 1981) und der Wissenssoziologie (z. B. Heintz 2000) thematisiert – wobei die Disziplinen an dieser Stelle nicht scharf voneinander abzugrenzen sind. Diese Arbeiten stellen die Praxis des (wissenschaftlichen) „Mathematiktreibens" in einen Zusammenhang mit dem Entstehen einzelner „Teile der Mathematik" und motivieren, bezogen auf Realitätsbezüge im Mathematikunterricht, auf diese Weise das Entdecken und Anwenden. Mit der Idee des Unterrichts als „guided reinvention“ (Freudenthal 1991), also des „Wiedererfindens“ der Entstehungskontexte mathematischer Konzepte, hat auch Freudenthal entsprechende Gedanken umgesetzt.

*Theoretische Positionen des Modellierens*

Für die (deutschsprachige) Diskussion um Realitätsbezüge im Mathematikunterricht unterscheidet Kaiser (1995) drei grundlegende theoretische Positionen: eine *emanzipatorische Richtung*, welche die Mündigkeit, die Bildung und das autonome Handeln in aktuellen oder zukünftig zu erwartenden Lebenssituationen in den Mittelpunkt stellt, eine *wissenschaftsorientierte Richtung*, deren Fokus auf der Vermittlung von epistemologischen und methodologischen Erfahrungen (z. B. „Mathematik als menschliche Tätigkeit“) liegt und der man z. B. die österreichischen Didaktiker Fischer & Malle (z. B. 1985) zuordnen kann (s. o.) sowie eine dritte, *integrative Richtung*, die ein umfassenderes Spektrum von Zielen formuliert. Zu letzterer dürfen nach Heymann (1996, S. 189) unter anderen Winter, Wittmann, Niss und Blum gezählt werden. Auch Heymanns eigene Ideen lassen sich vermutlich dieser Richtung zuordnen (vgl. Abschnitt 1.1.2 in dieser Arbeit).

In einer früheren Arbeit differenziert Kaiser international zwischen einer *wissenschaftlich-humanistischen* Richtung, als deren Hauptvertreter Freudenthal gelten kann, sowie einer *pragmatischen Richtung* um den amerikanischen Mathematiker Henry Pollak (Kaiser-Meßmer 1986, S. 104ff). Während die pragmatische Richtung die „Befähigung der Lernenden, Mathematik zur Lösung praktischer Probleme“ (Kaiser 1995, S. 71) in den Mittelpunkt stellt, ist für die wissenschaftlich-humanistische Richtung die grundsätzliche „Befähigung des Lernenden, zwischen Mathematik und Realität Bezüge herzustellen“ (Kaiser 1995, S. 71) und damit die Fähigkeit, Situationen zu mathematisieren und das Verhältnis von Mathematik und Realität zu reflektieren, zentral.

*Übersicht: Ziele und Positionen zum Modellieren*

2006 aktualisieren Kaiser zusammen mit Sriraman die Übersicht ihrer Kategorisierung von Positionen und erfasst dabei viele gegenwärtige relevante internationale Positionen zum „Modellieren“ (Kaiser & Sriraman 2006, S. 304; vgl. auch Kaiser et al. 2007, Blum, Borromeo Ferri, Knipping & Maaß 2012). Sie werden zur besseren Übersicht in einer Tabelle dargestellt (Tabelle 1).

Beim Versuch, die verschiedenen Übersichten in Kaiser (1995, S. 69f), auch Blum (1985, S. 210ff) und Kaiser et al. (2007) sowie Kaiser & Sriraman (2006) bezüglich der Beschreibungen von Lernzielen, ihrer Kategorisierung und ihren Zuordnungen zu theoretischen Positionen in der Literatur zusammenzuführen, zeigen sich einige Unschärfen, was im Rahmen der stetigen Entwicklung der

Diskussion und der unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen der Darstellungen einerseits verständlich und andererseits für die hier verfolgte Intention relativ unproblematisch ist. Für diese Arbeit ist es insbesondere von Bedeutung, *dass* unterscheidbare theoretische Positionen um zentrale Ideengeber existieren, denen konkrete Ziele plausibel zuordenbar sind und dass sich diese Positionen sowohl in Unterricht als auch in der Forschung rekonstruieren lassen.

| **Position** | **Zentrale Ziele** | **Theoretischer Hintergrund** |
|---|---|---|
| Realistisches oder angewandtes Modellieren | Pragmatisch-utilitaristische Ziele<br>• Lösen realistischer Probleme<br>• Verständnis der realen Welt<br>• Förderung von Modellierungskompetenzen | geht zurück auf die *pragmatische Richtung* |
| Kontextuelles Modellieren | Fachbezogene und psychologische Ziele<br>• Lösen von Textaufgaben | geht zurück auf die amerikanische *Problemlösedebatte* |
| Pädagogisches Modellieren<br>a) Didaktisches Modellieren<br>b) Konzeptuelles Modellieren | Pädagogische und fachbezogene Ziele<br>a) Strukturierung des Lernprozesses und seine Förderung<br>b) Einführung und das Verständnis von mathematischen Inhalten | geht zurück auf die *integrative* Perspektive von Blum und Niss, Weiterentwicklungen des *wissenschaftlich-humanistischen* Ansatzes |
| Soziokritisches Modellieren | Pädagogische Ziele<br>• kritisches Verständnis der Welt | Hintergrund sind die *emanzipatorische* Perspektive sowie soziokritische Ansätze in der Soziologie |
| Epistemologisches oder Theoretisches Modellieren | Theorieorientierte Ziele<br>• z. B. bessere Theorieentwicklung zum Modellieren | geht zurück auf die *wissenschaftlich-humanistische* Perspektive des frühen Freudenthal |

| Position | Zentrale Ziele | Theoretischer Hintergrund |
|---|---|---|
| Kognitives Modellieren (Metaperspektive) | Forschungsziele<br>• Analyse und Verständnis kognitiver Prozesse beim Modellieren<br>Psychologische Ziele<br>• Förderung mathematischer Denkprozesse z. B. durch das Nutzen von Modellen als mentale Repräsentationen oder durch das Auffassen von Modellieren als mentalem Prozess | Hintergrund ist die Kognitionspsychologie |

Tabelle 1: Didaktische Positionen und zentrale Ziele (nach Kaiser et al. 2007, Kaiser & Sriraman 2006)

*Bildungssoziologische bzw. interkulturelle Zielperspektive*

In einigen, in der Regel interdisziplinären, Arbeiten und Projekten, wird eine weitere Zieldimension ausformuliert, die in der dargestellten Übersicht (noch) nicht berücksichtigt ist und die ich im Folgenden als *bildungssoziologischen* oder *interkulturell orientierten* Ansatz bezeichnen und in der vorliegenden Arbeit besonders problematisieren möchte:

„Diskrepanzen“, „Diskontinuitäten“ oder „Klüfte“ zwischen Lebenswelt und Schulwelt sind schon mehrfach aus verschiedenen Perspektiven als hinderlich für den Lern- und Schulerfolg beschrieben worden: So sind in der fachdidaktischen Lehr-Lernforschung insbesondere der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer entsprechende Konflikte bisher vor allem mit *kognitivem* Fokus angegangen worden. Dabei wurden zum einen die Unterschiede zwischen alltagsweltlichen und schulischen *Rechenstrategien* und damit auch die außerschulischen Ressourcen untersucht (z. B. Nunes, Schliemann & Carraher 1993, Saxe 1988), zum anderen *lebensweltliche und fachliche Vorstellungen* zu mathematischen Inhalten und mathematisch beschreibbaren Phänomenen genauer analysiert. Aus einer soziologischen bzw. kulturellen Perspektive geht es dagegen um die „Passung“ bzw. um die „Divergenz“ von Lebenswelt und Schulkontext im Hinblick auf soziale bzw. kulturelle Aspekte: Dies sind zum Beispiel Orientierungen, Überzeugungen, Normen und Praktiken (z. B. Prediger 2004, orientiert an Loch 1969), die in Lernprozessen – d. h. Sozialisationsprozessen – zur Deckung gebracht werden müssen (Prediger 2004, Prediger & Leufer 2009). In Arbeiten aus der Soziologie werden entsprechende Konflikte auch mit Referenz zu Bourdieu als „habituelle“ Divergenzen beschrieben: Entwickelt ein Akteur innerhalb seiner unmittelbaren Lebenswelt entlang ihrer spezifischen Anforderungen „milieuspezifische“ Strategien, so können diese kompatibel mit den schulischen Praktiken sein oder aber mit diesen in Konflikt treten, „was bedeutet, dass jedes Milieu eigene alltagsrelevante Rationalitäten entwickelt, die mit unterschiedlichen Anerkennungsformen gekoppelt und in verschiedenem Maße an die schulischen Praktiken, Leistungs- und letztlich Anerkennungsprozesse anschlussfähig sind“ (Grundmann, Bittlingmayer, Dravenau & Groh-Samberg 2004, S. 129f).

Die Anbindung schulischer Anforderungen bzw. der schulischen Praktiken an den Alltagskontext könnte nun helfen, diese Passungen herzustellen, zu erleichtern und „Klüfte“ zu überbrücken. Einen eingängigen theoretischen Erklärungshintergrund der Bedeutung lebensweltlicher Vorstellungen für die Aneignung fachlicher Konzepte liefern zudem konstruktivistische Lerntheorien, nach denen die individuelle, aktive Konstruktion mentaler Strukturen stets auf bereits vorhandenen aufsetzt und aus diesen durch Anpassung hervorgeht (z. B. Gerstenmaier & Mandl 1995). Demnach sollten – eigentlich – diejenigen Schülerinnen und Schüler, deren Lebensrealität in besonders starkem Kontrast zum Schulkontext steht, und die insofern als in diesem Sinne sozial oder kulturell „benachteiligt“ gelten können, durch Alltagsanbindungen unterrichtlicher Inhalte besonders profitieren.

Dieser Aspekt fehlt in den betrachteten Übersichten konkreter Ziele von Realitätsbezügen in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Literatur (noch) weitestgehend. Die Frage sozialer Benachteiligungen bzw. das Thema „Bildungserfolg und sozialer Hintergrund“ wird hierzulande erst in den letzten Jahren vermehrt auch aus fachdidaktischer Perspektive angegangen (vgl. z. B. Gellert 2014). Im Zusammenhang mit realitätsbezogenen – also in den meisten Fällen textlastigen – Aufgaben werden dabei insbesondere sprachliche Problematiken in den Blick genommen (s. Abschnitt 1.3). Die systematische Nutzung soziologischer Kategorien erfolgt bislang in den fachdidaktischen Arbeiten zu dieser Fragestellung eher auf internationaler als nationaler Ebene (vgl. auch Abschnitt 1.4).

## 1.2 Charakterisierungen realitätsbezogener Aufgaben

Der Mathematikunterricht ist in besonderer Weise durch Aufgaben charakterisiert: Aufgaben aktivieren mathematische Tätigkeiten von Schülerinnen und Schülern, sie bestimmen in hohem Maße die Unterrichtsorganisation, sie dienen der Unterrichtsentwicklung, indem sie Anforderungen beschreiben und operationalisieren, und sie werden massiv im Zusammenhang mit Leistungsmessungen auf Klassen- oder darüber hinaus gehender Ebene eingesetzt, um Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern zu erfassen (vgl. Büchter & Leuders 2005). Die in den letzten Jahren bzw. Jahrzehnten vielfach beschriebene *ver-*

*stärkte Anwendungsorientierung* im Mathematikunterricht (z. B. Blum 1985, Blum 1996, Kaiser 1995, Pollak 1989, Leuders & Maaß 2005, Leuders & Maaß 2007, Büchter & Leuders 2005, vgl. Abschnitt 1.1 in dieser Arbeit) spiegelt sich daher in besonderer Weise in einer „veränderten Aufgabenkultur“ (Büchter & Leuders 2005): Wesentliche Charakteristika einer anwendungsorientierten Unterrichts- und Evaluationspraxis lassen sich durch den Blick auf entsprechende Aufgaben näher beleuchten.

Im Folgenden werden unterschiedliche Typen realitätsbezogener Aufgaben systematisch beschrieben (1.2.1). So genannte *Modellierungsaufgaben*, bei denen es darum geht, „komplexe realistische Probleme mit Hilfe von Mathematik“ zu lösen (Maaß 2011, S. 3), werden zusammen mit ihrem mächtigen analytischen Instrument – dem Modellierungskreislauf – gesondert vorgestellt (1.2.2). Da es in anspruchsvollen Modellierungen gerade auch darum gehen kann, Daten oder Informationen außerhalb des gegebenen Aufgabentextes zu nutzen, wird vor diesem Hintergrund auch differenziert auf das „Schätzen“ eingegangen (1.2.3). Der Fokus liegt dabei auf dem Aspekt des „Kontextwechsels“, den das Schätzen in vielen Fällen erfordert.

Insbesondere beschäftigt sich diese Arbeit mit dem „adäquaten“ Umgang von Schülerinnen und Schülern mit dem Sachkontext. Daher wird den gegebenen Charakterisierungen realitätsbezogener Aufgaben eine pragmatische Klassifizierung „nach intendiertem Kontextgebrauch“ (1.2.4) gegenübergestellt. Diese bezieht sich auf den Erwartungshorizont einer Aufgabe und unterscheidet danach, in welchem Maße und an welchen Stellen die Schülerinnen und Schüler sich auf den von der Aufgabe angesprochenen Sachkontext beziehen *sollen*.

### 1.2.1 Einkleidungen, Textaufgaben und Sachaufgaben

In der Literatur finden sich zahlreiche Zuordnungen realitätsbezogener Aufgaben zu „Aufgabentypen“. Die traditionelle Sachrechendidaktik unterscheidet bei Aufgaben mit Realitätsbezug – je nach Gewichtung der Mathematik oder der Sache – zwischen *eingekleideten Aufgaben*, *Textaufgaben* und *Sachaufgaben* (z. B. Maier 1970, Radatz & Schipper 1983, Franke 2003). Kaiser (1995) differenziert weiter „Anwendungen“ und „Veranschaulichungen“ aus und spricht von „Modellbildungen“ statt von „Sachproblemen“. Grundsätzlich erweisen sich die Abgrenzungen nicht als scharf, sondern eher als fließende Übergänge bzw. als graduelle Markierungen von eher analytischer Relevanz.

Die folgende Charakterisierung „unterschiedlicher“ realitätsbezogener Aufgabentypen arbeitet die in der Literatur vielfach üblichen Unterscheidungsdimensionen *Modellierungsanspruch*, *Authentizität* und *Bedeutung des Kontextes* und *Datenlage* heraus. In Hinführung auf eine eigene Systematisierung (in 1.2.4) werden zudem Unterscheidungsmerkmale hervorgehoben, die im Besonderen den erwarteten Umgang mit dem Sachkontext solcher Aufgaben und – dementsprechend – deren *Erwartungshorizont* betreffen.

*Einkleidungen*

Bei „Einkleidungen" handelt es sich um einfache alltagssprachliche „Einbettungen" mathematischer Probleme in einen Sachkontext – ohne *wirklichen* Realitätsbezug. Damit ist gemeint, dass der spezifische Sachbezug der Aufgabe für die Lösung der Aufgabe irrelevant und insofern austauschbar ist (vgl. Kaiser 1995; auch bei Maaß 2011 S. 6f, Greefrath et al. 2013, S. 23f). Der Sachzusammenhang und die Aufgabenstruktur müssen für das Bearbeiten der Aufgabe nicht vollständig erfasst werden, das geforderte mathematische Verfahren ist den Schülerinnen und Schülern in der Regel bekannt. Die zur Berechnung notwendigen Angaben (und im Wesentlichen nur diese) werden im Text aufgeführt, zudem gibt die Formulierung des Aufgabentextes meist Hinweise darauf, wie gerechnet werden muss (Franke 2003, S. 32ff). Anders formuliert ist bei Einkleidungen die zielführende Strukturierung, Präzisierung und Vereinfachung der gegebenen Realsituation eher „trivial" bzw. „mitgeliefert" (Schukajlow, Leiß, Blum, Messner & Pekrun 2009, S. 252). Ziel des Einsatzes solcher Aufgaben ist in der Regel das Üben von Rechenfertigkeiten. „Richtige" Ergebnisse dienen insofern als Indikatoren dafür, dass dieses Ziel erreicht worden ist. Ein fiktives Beispiel aus der Grundschule wäre folgende Aufgabe:

*Beispiel: Bonbons verteilen*

Mutter verteilt 12 Bonbons an ihre drei Töchter.
Wie viele Bonbons erhält jede?

Im Beispiel müsste der Begriff „verteilt" verstanden werden als „verteilt gerecht" und in die Mathematik übersetzt werden mit „geteilt", d. h. der Begriff „verteilt" gibt *vor dem Hintergrund der Aufgabe* den notwendigen Hinweis auf die erwünschte Rechenoperation – selbst wenn die geschilderte Situation nicht vollständig durchdrungen wird. Der eigentliche reale Sachkontext, der die Frage nahe legen würde, ob wirklich *alle* – vermutlich nicht gleichaltrigen – Töchter *gleich* viele Bonbons bekommen – und ob es sich überhaupt um gleichwertige Bonbons handelt – , ist dabei außer Acht zu lassen.

*Textaufgaben und „Bildaufgaben"*

Als Textaufgaben werden sprachlich anspruchsvollere Einkleidungen bezeichnet, in denen die Auseinandersetzung mit dem Text (oder mit einer Darstellung, Graphik, …) etwas mehr Verständnis und Strukturierungsarbeit fordert, da beispielsweise durch die Mehrschrittigkeit der Aufgabe die Übertragung des Problems in eine mathematische Struktur weniger „trivial" ist.

*Beispiel: Handypreise*

> In der Preisliste des Händlers „Digital World" steht das Handy „VR 17" mit einem Nettopreis von 77,30 €. Ein Kunde muss beim Kauf zusätzlich 19 % Mehrwertsteuer zahlen. Der Telefonladen „X-World" bietet dasselbe Handy zu einem Bruttopreis (einschließlich 19 % Mehrwertsteuer) von 89,25 € an.
> Wer verkauft das Handy günstiger?

Um die obige Aufgabe[5] zu lösen, muss zunächst Strukturierungsarbeit im Text geleistet werden: Auf welchen Preis muss die Mehrwertsteuer aufgeschlagen werden? Welche Werte müssen verglichen werden? Über die notwendigen Mathematisierungskompetenzen hinaus spricht diese Aufgabe also die Kompetenz des verstehenden Lesens und des Entnehmens von Informationen aus Texten an. Analoges gilt für die derzeit viel genutzten Aufgaben (in der Überschrift als „Bildaufgaben" bezeichnet), die statt mit Texten mit Graphiken, Abbildungen oder Diagrammen arbeiten, denen in entsprechender Weise Informationen zum Aufstellen eines „Realmodells" (vgl. Modellierungskreislauf auf S. 30 in dieser Arbeit) entnommen werden müssen.

Die Realität ist – zu diesem Zwecke – in einer solchen Aufgabe häufig sehr vereinfacht dargestellt. Gegeben sind im Wesentlichen nur notwendige Daten. Die mathematische Auseinandersetzung mit der Realität besteht lediglich im Auffinden des „richtigen" mathematischen Modells zur Verarbeitung der gegebenen Daten, nicht im Annähern bzw. im tatsächlichen *selbständigen* Modellieren eines Wirklichkeitsausschnittes mit selbst gewählten Mitteln. Insofern gibt es auch bei Aufgaben dieses Typs meist *eine* eindeutige Lösung, was im Beispiel die geschlossene Frage „*Wer verkauft das Handy günstiger?*" bereits suggeriert.

*Einkleidungen* und *Textaufgaben* lassen sich bewusst einsetzen, um unterrichtlich behandelte Lösungsverfahren (ein-)zu üben und mathematische Begriffe zu festigen (für die Grundschule, vgl. Franke 2003, S. 32ff) oder ggf. geeignete Grundvorstellungen aufzubauen – sie haben also durchaus eine Berechtigung unter einer dezidierten Zielperspektive (vgl. Abschnitt 1.1.3 in dieser Arbeit). Eine Funktion zur „Umwelterschließung" (im Sinne von Winter 1985; vgl. Abschnitt 1.1.2 und 1.1.3) haben sie jedoch in der Regel nur sehr eingeschränkt. Berechtigte Kritik an dieser Form „realitätsnaher" Aufgaben ist daher die eigentliche Realitätsferne, in der sich die Probleme darstellen: Sowohl inhaltlich (entsprechen die Aufgaben *wirklich* der Lebenswelt der Kinder bzw. der Jugendlichen?) als auch in der Darstellung (keine überflüssigen Angaben, keine „Lücken") scheint die Künstlichkeit dieses Aufgabentyps durch und kann den vieldiskutierten „sinnfreien" Umgang der Schülerinnen und Schüler mit

5 aus den zentralen Vergleichsarbeiten VERA 8, 2010.

Textaufgaben hervorrufen (Stern 1994, S.117; auch bei Verschaffel et al. 2000; vgl. auch Abschnitt 1.4.3 in dieser Arbeit).

Eingekleidete Aufgaben und Textaufgaben erfordern zudem oft einen kurzen „Lösungssatz" – eine passende „Einkleidung" des mathematischen Ergebnisses also – was von den Schülerinnen und Schülern nicht als authentisches, ggf. sogar hilfreiches (Verschaffel, De Corte & Lasure 1994), Antwortformat, sondern als zusätzliche Schwierigkeit, oft auch als zusätzliche „unnötige Schikane" (Heymann 1996, S. 195), empfunden wird.

*Anwendungen*

Kaiser (1995) unterscheidet Einkleidungen von *Anwendungen* und *Veranschaulichungen* mathematischer Verfahren – und diese wiederum von „Modellbildungen" (s. u.)[6]. Anwendungen und Veranschaulichungen im Sinne Kaisers bieten einen Sachkontext weniger als *beliebige Einbettung* einer Rechenaufgabe an (vgl. „Einkleidungen"), stattdessen liefern sie realistische „Bilder" der mathematischen Objekte oder Operationen selbst. Sie stellen insofern anspruchsvollere Realitätsbezüge her als reine Einkleidungen, da der Bezug zur Realität eine (andere) Funktion hat – er ist sozusagen von „Bedeutung": Damit ist er weniger austauschbar und muss insofern stärker berücksichtigt und gezielter ausgewählt werden. Als Beispiele für Anwendungen und Veranschaulichungen nennt Kaiser (1995) die Verwendung von Schulden oder Temperaturen bei der Einführung negativer Zahlen oder die Verwendung eines Extremwertkalküls zur Berechnung der Maße der materialsparendsten und insofern optimalen Konservendose.

Die Abgrenzung zu „Einkleidungen" und „Textaufgaben" ist gerade hier sicherlich nur als graduell zu betrachten: Auch Anwendungen im o. g. Sinne liefern, wie eingekleidete (Text-) Aufgaben, mit dem Aufgabentext in der Regel alle – und ausschließlich – die von den Lernenden zur Lösung benötigten Informationen. Die Schülerinnen und Schüler verfügen auch bei diesen Aufgaben meist über ein „sicheres Gesetz zur direkten Übersetzung der Sachsituation in ein Modell" (Meyer & Voigt 2010, S. 140), so dass die eigentliche „Modellierungsleistung" wieder verhältnismäßig elementar bleibt. Meyer & Voigt (2010) sprechen daher – in Abgrenzung zu „problemhaltigen Modellbildungen" (vgl. folgenden Abschnitt 1.2.2) – sowohl bei Anwendungen als auch bei eingekleideten (Text-) Aufgaben von trivialen oder „routinemäßigen Modellbildungen" (ebd., S. 140), die allein auf deduktive Weise zu lösen sind. Auch Heymann (1996, S. 195f) verortet Aufgaben dieser Art in den Bereich des eingekleideten

6 Hier zeigen sich unscharfe begriffliche Festlegungen: Sowohl die Begriffe „Anwendungen" als auch „Veranschaulichungen" erscheinen in der mathematikdidaktischen Literatur mit unterschiedlichen Bedeutungen. „Anwendungen" und „Veranschaulichungen" in diesem Absatz beziehen sich daher – wenn nicht anders markiert – auf das im Artikel von Kaiser (1995) dargestellte Verständnis.

„Übens“ unmittelbar zuvor im Unterricht behandelter Lösungsverfahren und betrachtet sie als „isoliert“ von ihrem (potenziellen) lebensweltlichen Kontext.

Eine pointierte Charakterisierung von Stillman & Galbraith (1998, S. 158) unterscheidet Einkleidungen und Anwendungen und verortet Anwendungen als eine bestimmte „Stufe“ in einem Spektrum, das von „completely structured word problems“ (Einkleidungen) bis hin zu „open modelling problems“ (offenen, völlig unstrukturierten Modellierungsproblemen, vgl. 1.2.2) reicht:

> „One such stage involves contexts where the aim of the problem is well defined, where the problem is couched in everyday-language, but where some additional mathematical information must be inferred on account of the real world setting in which the problem is presented.“ (Stillman & Galbraith 1998, S. 158)

Stillman (2012) unterscheidet Anwendungsaufgaben von Modellierungsaufgaben nach der Richtung der Beziehung zwischen Realität und Mathematik:

> „With applications the direction (mathematics → reality) is the focus. ‘Where can I use this particular piece of mathematical knowledge?’ The model is already learnt and built. With mathematical modeling the reverse direction (reality → mathematics) becomes the focus. ‘Where can I find some mathematics to help me with this problem?’ The model has to be built through idealising, specifying and mathematising the real world situation.” (Stillman 2012, S.2, o. Hv.)

Mit letzterem Konzept – dem selbständige „Bauen“ eines Modells – verweist Stillman bereits auf die spezifischen Anforderungen im Bereich der Sachprobleme/Sachaufgaben bzw. des „Modellierens“:

*Sachprobleme / Sachaufgaben*

Mit „Sachproblemen“ (auch: „Sachaufgaben“[7]) lassen sich Aufgaben bezeichnen, in denen die Mathematik eher das „Mittel zum Zweck“ ist und ein tatsächliches Problem aus der Umwelt und eine authentische Frage im Vordergrund stehen. Hier geht es nun insbesondere auch um die von Winter beschriebene Funktion des Sachrechnens als *Umwelterschließung* (vgl. Abschnitt 1.1.3).

So genannte *Modellierungsaufgaben,* die das Ziel der Umwelterschließung in nichttrivialer Weise umzusetzen versuchen, fallen in die Gruppe der Sachprobleme (z. B. Greefrath et al. 2013, S. 25). Sie sind für diese Arbeit von besonderem Interesse. Eine detailliertere Charakterisierung folgt daher in einem eigenen Abschnitt (1.2.2).

7 Traditionell wird die Dreiteilung Einkleidungen, Textaufgaben und Sachaufgaben unterschieden (s. o.). Da derzeit aber viel von einer Kategorisierung von Sachaufgaben die Rede ist, wird der Begriff „Sachaufgabe“ oft als Oberbegriff gebraucht und sollte dann von der Kategorie „umwelterschließender“ Aufgaben begrifflich trennbar sein. Greefrath et al. (2013) nutzen hierfür den Begriff der „Sachprobleme“ (ebd., S. 24), was in dieser Arbeit an dieser Stelle übernommen wird.

### 1.2.2 Modellierungsaufgaben als Sachprobleme

In den aktuellen Bildungsstandards (z. B. für den Mittleren Schulabschluss, KMK 2003) wird die Kompetenz „Modellieren“ ausformuliert als Tätigkeit, bei der die Schülerinnen und Schüler den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen, in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten und die Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen (ebd., S. 8). Es geht beim – insbesondere anspruchsvollen, problemhaltigen – Modellieren demnach also nicht allein um das Erstellen eines Modells, sondern vielmehr um einen umfassenden Modellierungs*prozess*, d. h. den gesamten Lösungsprozess einer Modellierungsaufgabe.

In der mathematikdidaktischen Diskussion versammeln sich unter dem Begriff des „mathematischen Modellierens“ bestimmte Sichtweisen auf angewandte Mathematik, die den Fokus auf den *Prozess* des Lösens realistischer Probleme legen (z. B. Greefrath et al. 2013, S. 11f), es werden vor allem „problemhaltige“ (Meyer & Voigt 2010, S. 140) bzw. „komplexe“ (Maaß 2011, S. 3) realistische Probleme angesprochen. Einige dieser Sichtweisen sind theoretisch – derzeit – eng verbunden mit der Vorstellung des (ggf. mehrmaligen, ggf. nicht kreisförmigen, ggf. nicht systematischen) Durchlaufens verschiedener „Phasen“ der Aufgabenbearbeitung.

*Der Modellierungskreislauf*

Die *theoretische Idealisierung* des Modellierungsprozesses wird in der Literatur durch verschiedene Schemata veranschaulicht. Das gängigste Schema in der derzeitigen Diskussion ist ein sequenzieller Kreislauf, der die einzelnen strukturellen Elemente und Phasen des Modellierungsprozesses beschreibt und in der Mathematikdidaktik seit einigen Jahren intensiv be- und überarbeitet wird. In diesem Zusammenhang wird häufig Pollak genannt (1968; z. B. bei Blum 1985, S. 200, Kaiser 2014, S. 398), dessen Vorstellung vom Anwenden von Mathematik als charakteristisch für die disparate Darstellung der realen Situation als Ausgangspunkt der Modellierung „auf der einen“ und der Mathematik „auf der anderen Seite“ aufgefasst werden kann.

Die Anzahl von Varianten von Modellierungskreisläufen in der aktuellen Literatur ist mittlerweile so groß, dass sie bereits in unterschiedliche Gruppen klassifiziert werden (Borromeo Ferri & Kaiser 2006, Greefrath et al. 2013, S.14ff). Unterscheidungsmerkmale sind dabei beispielsweise, ob zwischen realer Situation, Situationsmodell, realem Modell, mathematischem Modell, dem Interpretieren und Validieren (vgl. Abbildung 1) differenziert wird oder nicht. Greefrath et al. (2013, S. 14ff) unterscheiden Modellierungskreisläufe nach der Anzahl der Schritte, von der „Situation“ zum „mathematischen Modell“ (ebd., S. 16f). Gemeinsam ist allen „heute üblichen Modellauffassungen“ (Blum 1985) jedoch nach wie vor die zentrale disparate Darstellung von Mathematik einerseits und dem „Rest der Welt“ andrerseits. Dabei soll der „Rest der Welt“ den Kontext *wirklicher* realistischer Probleme darstellen.

Durchgesetzt hat sich in vielen Arbeiten zur Modellierung der „bewährte“ (Hinrichs 2008) bzw. „umfassende“ (Leiß 2007, S. 31) siebenschrittige Modellierungskreislauf von Blum & Leiß (2005, vgl. Abbildung 1). Wie die Darstellung zeigt, differenziert dieser Kreislauf die Phasen „Verstehen“, „Vereinfachen/Strukturieren“, „Mathematisieren“, „Mathematisch arbeiten“, „Interpretieren“, „Validieren“, „Darlegen/Erklären“ aus. Er zeichnet sich insbesondere durch die Einführung des „Situationsmodells“ aus, das als eine Art „mentale Repräsentation“ des Gegebenen das Verständnis und den Umgang durch das Individuum mit ins Spiel bringt.

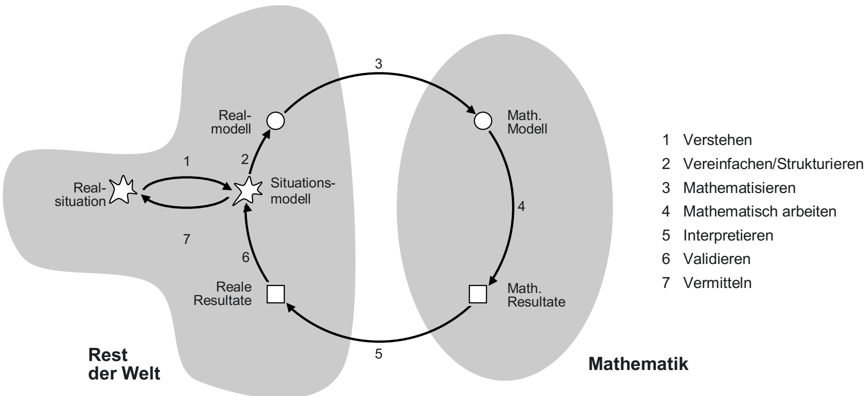



Abbildung 1: Modellierungskreislauf (nach Blum & Leiß 2005)

Ein verbreitetes Verständnis zum Modellieren besteht nun darin, ausschließlich solche Problemstellungen als Modellierungsaufgaben zu bezeichnen, bei denen *alle* oben genannte Schritte in „nichttrivialer Weise“ durchlaufen werden (z. B. Schukajlow et al. 2009). Das beinhaltet also die Strukturierung einer (möglichst authentischen) Realsituation, die Entwicklung eines realen Modells, das Mathematisieren, die Bearbeitung des mathematischen Modells mit Hilfe mathematischer Mittel, sowie die Übertragung des Ergebnisses (Validierung) zurück in die reale Situation. Blum (2007) betont beim „mathematischen Modellieren“ vor allem die Schritte 2, 3, 5 und 6 (vgl. Abbildung 1), also diejenigen Schritte, die mit der Beziehung von Welt *und* Mathematik zu tun haben.

Modellierungsaufgaben sind demnach sowohl bezüglich des *Modellierungsanspruchs* als auch bezüglich der *Authentizität des Kontextes* (vgl. 1.2.3) von „trivialen" Text- oder Sachaufgaben zu unterscheidende „problemorientierte authentische Textaufgaben, die für ihre Lösung eine Konstruktion, Bearbeitung und Validierung von Modellen erfordern" (Schukajlow-Wasjutinski 2010, S. 74 mit Verweis auf Niss et al., 2007, S. 8).

*Kreislaufdarstellung und Erfassung von Schwierigkeiten*

Vor dem Hintergrund, dass vier der sieben im dargestellten Kreislaufmodell (vgl. Abbildung 1) aufgeführten Phasen des Modellierens im „Rest der Welt" verortet werden und zwei weitere, das Mathematisieren und das Interpretieren, gerade mit dem Übergang von „Welt" und „Mathematik" zu tun haben, liegt die Frage nahe, ob dies tatsächlich genau diejenigen Phasen sind, die potenzielle kognitive Hürden für Schülerinnen und Schüler darstellen können, wie dies beispielsweise Schukajlow beschreibt (z. B. Schukajlow-Wasjutinski 2010, auch Blum 2007). Wäre dies der Fall, dann wird an dieser Darstellung besonders deutlich, wie groß die Rolle derjenigen Anforderungen beim Modellieren ist, die gerade *nicht* aus einem eng gefassten Kontext der „eigentlichen" Mathematik stammen – und die möglicherweise auch nicht (vollständig) im Mathematikunterricht erlernt werden (können). Doch selbst, wenn sich dies nicht bestätigen ließe, würde das Modell dennoch den offensichtlich hohen Wert konstatieren, den Blum & Leiß (2005) und andere Autoren auch *nicht (genuin) mathematischen Kompetenzen* beimessen. Solche Kompetenzen werden im Rahmen dieser Arbeit noch weiter betrachtet.

Neben der idealtypischen Veranschaulichung empirischer Bearbeitungsprozesse in der didaktischen Theorie haben die Kreislaufdarstellungen des Modellierens noch andere Funktionen: Sie sind Grundlage für Kompetenzformulierungen in den Bildungsstandards, d. h. sie formen Leistungsstandards für alle Schülerinnen und Schüler (s. o., vgl. KMK 2003). Weiter werden sie in der Annahme, dass sie zumindest „näherungsweise" die ausschlaggebenden Phasen im Modellierungsprozess differenzieren, für die Analyse und Entwicklung von (Leistungs-)Aufgaben zum Modellieren genutzt (z. B. Büchter & Leuders 2005, vgl. auch Leufer & Prediger 2007) sowie zur systematischen Analyse von Schwierigkeiten beim Modellieren (z. B. bei Schukajlow-Wasjutinski 2010).

Kritik an der Darstellung bzw. der Interpretation des Modellierungskreislaufes äußern beispielsweise Meyer & Voigt (2010): Sie konzedieren zwar darin, dass ein *routinemäßiger* Modellierungsprozess (also z. B. die Lösung eines eingebetteten Problems bzw. einer einfachen Textaufgabe) im Wesentlichen als reine Deduktionskette zu verstehen ist. Das Lösen eines *tatsächlichen* Modellierungsproblems (also eines wirklich komplexen Sachproblems) beinhalte jedoch mindestens einen kreativen Abduktionsschritt, der eine entscheidende Beziehung zwischen dem „Rest der Welt" und der „Mathematik" herstellt – und der sich in der analytischen Trennung dieser beiden „Welten“ nicht angemessen darstellen lässt (Meyer & Voigt 2010, Voigt 2011).

*Beispiele: Triviale und weniger triviale Modellierungen*

Die praktische Schwierigkeit der Abgrenzung wenig komplexer realitätsbezogener Aufgaben (z. B. Textaufgaben, vgl. 1.2.1) von „richtigen Modellierungsaufgaben“, bei deren Bearbeitungsprozess (im Wesentlichen) der gesamte Modellierungskreislauf durchlaufen wird, sollen die folgenden Beispiele demonstrieren.

Die ersten beiden („Schneckenaufgabe“ und „Busaufgabe“) unterscheiden sich zwar grundsätzlich von einfachen eingekleideten Aufgaben, da der realitätsbezogene Kontext der Aufgabe eine Validierung eines errechneten Ergebnisses vor dem Hintergrund des gegebenen Sachkontextes und also eine kompetente Berücksichtigung dieses Sachkontextes gegebenenfalls (Schneckenaufgabe) bzw. notwendig (Busaufgabe) erfordert (vgl. auch die systematische Aufgabenvariation bei Verschaffel et al. 1994). Dennoch würden in der mathematikdidaktischen Diskussion diese Aufgaben nicht unbedingt als vollwertige Modellierungsaufgaben betrachtet werden, da ihr Realitätsgehalt, ihr Aufforderungscharakter, die Strukturierungs- und Mathematisierungsarbeit usw. zu trivial, die tatsächliche Modellierungsleistung insgesamt also als zu gering eingeschätzt würde.

Als Gegenbeispiel dient das populäre Format so genannter „Fermi-Aufgaben“, die entsprechende mathematikdidaktische Anforderungen an „nichttriviale Modellierungen“ in besonderem Maße erfüllen.

*Beispiel: Schneckenaufgabe*

Die Schneckenaufgabe entstammt einem Materialband für die Grundschule[8], der sich explizit mit dem Problemlösen (also *nicht* explizit mit dem Modellieren) beschäftigt.

> Eine kleine Schnecke fällt in einen 9 m tiefen Brunnen.
> Sie kriecht jeden Tag 3 Meter hoch.
> Jede Nacht rutscht sie jedoch wieder 2 Meter runter.
> Wie viele Tage dauert es, bis die kleine Schnecke die Brunnenkante erreicht?

In diesem Beispiel ist die Strukturierung der Realsituation nicht allzu anspruchsvoll: Alle nötigen Daten sind gegeben, überflüssige Daten kommen nicht vor. Ein wirklich *authentischer* Sachkontext wird nicht aufgemacht. Die Mathe-

8 Quelle: Schnabel, J. & Trapp, A. (o. J.). Problemlösendes Denken im Mathematikunterricht. Donauwörth: Auer Verlag – AAP Lehrerfachverlage GmbH.

matisierung hat, gerade für jüngere Kinder, jedoch durchaus Problemlösecharakter: Wie stellt man die Dynamik der Schnecke mathematisch dar (Tabelle, Rechnung, Skizze/Zahlenstrich)? Dabei verlangen die unterschiedlichen Herangehensweisen eine unterschiedlich komplexe Vorstrukturierung des Problems im Kopf. Sukzessives Ausfüllen einer Tabelle liefert beispielsweise:

| Wann? | Tiefe der Schnecke |
|---|---|
| Start | 9m |
| Tag 1 | 9m - 3m = 6m |
| Nacht 1 | 6m + 2m = 8m |
| Tag 2 | 8m - 3m = 5m |
| Nacht 2 | 5m + 2m = 7m |
| Tag 3 | 7m - 3m = 4m |
| Nacht 3 | 4m + 2m = 6m |
| Tag 4 | 6m - 3m = 3m |
| Nacht 4 | 3m + 2m = 5m |
| Tag 5 | 5m - 3m = 2m |
| Nacht 5 | 2m + 2m = 4m |
| Tag 6 | 4m - 3m = 1m |
| Nacht 6 | 1m + 2m = 3m |
| Tag 7 | 3m - 3m = 0m<br>Schnecke erreicht also den Brunnenrand. |

Prinzipiell ähnlich wäre eine graphische Lösung z. B. am Zahlenstrich.

Da die Aufgabe in dieser (oder ähnlicher) Form für die Grundschule vorgesehen ist und mehr das Problemlösen als das Modellieren ansprechen soll, wird eine umfassende Validierung von Modell und Ergebnis kaum vorgesehen sein. Entsprechende Überlegungen würden den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe jedenfalls erheblich verändern: Kritische Modellierende würden beispielsweise Überlegungen anstellen, ob man nachts oder tagsüber mit der Beobachtung der Schnecke begonnen hat, ob das Erreichen der Brunnenkante tatsächlich eine plausible Zielvorstellung der Schnecke sein kann (denn sie könnte ja, nach dem Erreichen des Wertes 0, erst mal wieder abrutschen…), ob sie genauso senkrecht hinaufkriecht, wie sie vermutlich nachts abrutscht u. ä. [9]

Unter der Annahme, dass diese Aufgabe *nicht* erwartet, dass ein Kind Modell und Ergebnis validiert, kann man bei der „Schneckenaufgabe“ eher von einer eingekleideten realitätsbezogenen Problemlöse-Aufgabe sprechen, die nicht den theoretisch formulierten Ansprüchen einer komplexen „Mo-

9 Tatsächlich würde das Modell „Die Schnecke bewegt sich jeden Tag *einen* Meter nach oben“ zur rechnerischen Lösung „9 Tage“ führen. Dieses Modell wäre der Situation *nicht* angemessen und würde insofern eine Validierung unbedingt erfordern.

dellierungsaufgabe“ genügt. Bei genauem Hinsehen besitzt diese Aufgabe jedoch durchaus einen nichttrivialen Modellierungsanteil (vgl. Fußnote auf S. 33), wenn auch beim Bearbeiten der Modellierungskreislauf nicht komplett durchlaufen wird.

*Beispiel: Busaufgabe & Fahrstuhlaufgabe*

Die so genannte „Busaufgabe“[10] ist eine bekannte Aufgabe, die in ganz einfacher Weise eine Berücksichtigung des Sachkontextes erfordert. Sie war bereits Bestandteil der Lernstandserhebung Klasse 9 in Nordrhein-Westfalen (2004).

> 1128 Schülerinnen und Schüler einer Schule sollen von der Schule aus zu einer Sportveranstaltung fahren. Ein Schulbus kann 36 Schülerinnen und Schüler befördern.
> Wie viele Busse sind nötig, um alle Schülerinnen und Schüler zu der Veranstaltung zu bringen?

Die „Busaufgabe“ gibt alle relevanten Daten vor. Die Mathematisierung ist verhältnismäßig unproblematisch: Das mathematische Modell „Division“ ist geeignet, um die gegebene Realsituation so zu mathematisieren, dass eine Lösung mit mathematischen Mitteln (Berechnung 1128 : 36) möglich ist. Die entsprechende Grundvorstellung muss natürlich vorhanden sein.

Der Modellierunganspruch der Aufgabe liegt jedoch vielmehr in der kritischen Reflexion des mathematischen Ergebnisses: Wird die mathematische Lösung ($31\frac{1}{3}$) mit der realen Situation (es gibt nur ganze Busse, und sie dürfen zwar halbleer, aber nicht überfüllt fahren) abgeglichen (validiert) und ggf. korrigiert (geeignet gerundet)? Der realistische Kontext übernimmt hier mehr als nur die Aufgabe, eine „Geteilt-Rechnung“ einzubetten: Er *muss* bei der Angabe der Lösung in sinnvoller Weise berücksichtigt werden. Ein „vollständiger“ Modellierungskreislauf wird jedoch nur bedingt bzw. teils nur in trivialer Weise durchlaufen.

Ähnliches gilt für die „Fahrstuhlaufgabe“[11]:

10 Testaufgabe Mathematik Lernstand 9. Online unter: http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/upload/download/Testaufgaben/mathe-version-A1-schueler_04.pdf (letzter Zugriff am 25.06.2014).

11 aus dem britischen SEAC-Mathematiktest 1992, zitiert nach Cooper & Dunne 1998, S. 121 (eig. Übers.).

> Dies ist das Schild am Aufzug eines Bürogebäudes:
>
> | Dieser Lift kann bis zu 14 Personen befördern |
> |---|
>
> Beim morgendlichen Ansturm wollen 269 Leute den Lift benutzen.
> Wie oft muss er fahren?

Der Validierungsschritt besteht wie bei der „Busaufgabe“ darin, das nicht-ganzzahlige mathematische Ergebnis der Division (Anzahl der Personen geteilt durch Anzahl der Plätze im Bus/Aufzug) im Rahmen der gegebenen Realsituation zu deuten und auf ein sinnvolles ganzzahliges Ergebnis zu runden (vgl. hierzu Abschnitt 1.4.3).

Strukturähnliche Beispiele werden bewusst auch in der Untersuchung von Verschaffel et al. (1994) genutzt, bei der eingebettete Aufgaben (S) durch das Hinzunehmen eines notwendigen Validierungsschrittes (P) variiert werden (Kaelen 1992, nach Verschaffel et al. 1994, S. 276, eig. Übers.):

> (S) Stefan kauft 5 Bretter der Länge 2 m.
> Wie viele Bretter mit 1 m Länge kann er aus diesen Brettern aussägen?
> (P) Stefan kauft 4 Bretter der Länge 2,5 m.
> Wie viele Bretter mit 1 m Länge kann er aus diesen Brettern aussägen?

Ausgehend von einem „Standardproblem“ (S) – damit ist die Einkleidung gemeint –, die eine direkte Anwendung einer oder mehrerer mathematischer Operationen mit den gegebenen Zahlen verlangt, werden parallele Aufgabenvarianten (P) entwickelt, in denen sich die mathematischen Modellierungsannahmen als problematisch erweisen könnten, wenn man die Gegebenheiten des Sachkontextes ernst nimmt (Verschaffel et al. 1994, S. 275f).

*Beispiel: Fermi-Aufgaben*

Populäre und illustrative Beispiele für *offene* Modellierungsaufgaben sind so genannte „Fermi-Aufgaben“: Diese Aufgaben sind nach dem Physiker Enrico Fermi benannt, von dem erzählt wird, dass er in seinen Vorlesungen auf diese Weise die Modellbildungsfähigkeiten seiner Studierenden testen wollte (Büchter & Leuders 2005, S. 158f). Fermi-Aufgaben sind üblicherweise (sehr) offene Aufgaben zum quantitativen Abschätzen eines lebensweltlichen Sachverhaltes. Sie enthalten meist wenig oder gar keine Zahlenangaben (sind insofern also „unterbestimmt“), lassen mehrere plausible Herangehensweisen zu und besitzen in der Regel keine präzise, eindeutig richtige Antwort. Werden Fermi-Aufgaben in Leistungstests genutzt, so ist als Erwartungshorizont häufig ein großzügiges Lösungsintervall vorgegeben.

Fermi-Aufgaben gelten im Modellierungsdiskurs als realitätsbezogen, zugänglich und herausfordernd (Büchter, Herget, Leuders & Müller 2007, S. 6f.). Sie regen demnach das Weiterfragen an und öffnen den „Blick für die Welt" (ebd.) Sie werden insbesondere für heterogene Lerngruppen beworben, weil die Vielzahl der möglichen Lösungswege es idealerweise ermöglichen soll, dass die Lernenden auf ihren jeweiligen Niveaus arbeiten. Fermi-Aufgaben eignen sich demnach insbesondere auch als „Lernaufgaben". Das klassische Beispiel einer Fermi-Aufgabe lautet:

| Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago? |
| --- |

Die Aufgabe ist jedenfalls unterbestimmt, sie gibt überhaupt keine Zahlenwerte vor. Zunächst muss ein geeignetes reales Modell der Situation durch Vernachlässigung oder Ergänzung von Informationen, durch Idealisierung, durch das eigenständige Einführen (auch Schätzen, s. w. u.) zusätzlicher Annahmen u. ä. entwickelt werden. Dann erst oder im Wechselspiel zwischen „Welt" und „Mathematik" kann die Übersetzung der überarbeiteten Situation (also des realen Modells) in ein mathematisches Modell erfolgen. Die Lernenden müssen also neben den mathematischen auch entsprechende lebensweltliche Kenntnisse einbringen (vgl. die exemplarische Bearbeitung in 3.4.2): Wie groß ist Chicago? Wie viele Leute besitzen Klaviere? Wie oft muss ein Klavier gestimmt werden? Entsprechend dieser jeweiligen Annahmen werden unterschiedliche Schülerinnen und Schüler zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen.

### 1.2.3 Modellieren und Schätzen

Das „Schätzen" wird in der derzeitigen mathematikdidaktischen Diskussion – insbesondere auch für die Grundschule – als wichtiger, auch eigenständiger, curricularer Inhalt betrachtet (z. B. Herget & Scholz 1998, Selter 2007). Insbesondere im Zusammenhang mit Modellierungsaufgaben spielt das Schätzen eine zentrale Rolle: Denn wird der Schritt von der Situation zum mathematischen Modell differenziert betrachtet (vgl. Abbildung 1, auf S. 30 in dieser Arbeit), dann geraten individuelle Aspekte wie z. B. die jeweilige Situationsanalyse, die Datenbeschaffung und Annahmen der Schülerin und des Schülers (thematisiert bspw. bei Fischer & Malle 1985) in den Blick. Insbesondere die Datenbeschaffung bei unterbestimmten Aufgaben, wie z. B. bei Fermi-Aufgaben, macht in vielen Fällen das „Schätzen" notwendig.

*Schätzen in den Bildungsstandards*

Nimmt man die Verankerung in den Bildungsstandards zum Maßstab, dann ist das „Schätzen" zweifellos als offizielle Praxis im Mathematikunterricht angekommen: In den Bildungsstandards für die Grundschule findet sich, im Bereich „Größen und Messen", das „Schätzen von Größen" als Messverfahren neben dem Vergleichen und Messen von Größen. In Sachsituationen geht es zudem darum, „*angemessen* mit Näherungswerten" zu rechnen und „dabei Größen *begründet* [zu] schätzen" (KMK 2004, S. 11 eig. Hv.). Die Bildungsstandards für die Sekundarstufe formulieren das Schätzen als inhaltsbezogene mathematische Kompetenz unter der „Leitidee 2 – Messen" aus: „Schülerinnen und Schüler schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten" (KMK 2004, S. 10).

Aus den Formulierungen wird deutlich, dass das Schätzen in den Standards mindestens für die Grundschule eine starke Präsenz hat und mit dem Anspruch des „*angemessenen* Rechnens" und des „*begründeten* Schätzens" nicht vollständig explizierte Kriterien beinhaltet – was ggf. divergente Interpretationen ermöglicht. Die Formulierung der Standards für die Sekundarstufe betont das Schätzen eher wenig, die explizitere Formulierung gibt jedoch einen Hinweis auf die Natur der Praxis, um die es überhaupt geht, sowie auf ihre Voraussetzungen: Wenn Schülerinnen und Schüler Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten schätzen, dann besteht der Prozess des Schätzens darin, das eigentliche Problem herunterzubrechen in eines oder mehrere „kleine Schätzprobleme" (dies sind die „Repräsentanten"), zu denen man mit Hilfe von Stützpunktvorstellungen bzw. von Größenvorstellungen bzw. von lebensweltlichen Erfahrungen einen „lebensweltlichen" Zugang findet. Das Vorhandensein dieser Größenvorstellungen ist dann ausschlaggebend dafür, dass auch tatsächlich geschätzt werden kann und nicht etwa geraten wird:

> „Im Unterricht werden Schülerinnen und Schüler häufig dazu angeregt, vor dem Messen zu schätzen, obwohl sie noch nicht über ausreichende Stützpunktvorstellungen verfügen. Dies kann zur Folge haben, dass manche Kinder eher raten als schätzen oder aber zunächst messen und einen leicht veränderten Messwert als Schätzung notieren. Gerade wenn die (möglichst geringe) Differenz zwischen dem Schätz- und Messwert im Vordergrund der unterrichtlichen Reflexion steht, erhöht sich die Gefahr, dass das Schätzen von den Kindern als etwas „Unmathematisches" abqualifiziert wird." (Peter-Koop & Nührenbörger 2008, S. 105)

Eine systematische Vorgehensweise unter Nutzung geeigneter Stützpunktvorstellungen zur Erarbeitung einer unbekannten Größe kann man als *begründeten Zugang* durch einen Schätzvorgang betrachten und die Formulierung aus den Standards für die Sekundarstufe in diesem Sinne an die Formulierung für die Grundschule anschließen.

*Lebensweltliches und mathematisches Schätzen*

Schätzaufgaben erfordern in der Regel den Umgang mit Ungenauigkeit, wobei Ungenauigkeit auf verschiedene Weise ins Spiel kommen kann:

Modellierungsaufgaben mit dem Anspruch einer authentischen Fragestellung sind bezüglich der gegebenen Daten häufig über- oder unterbestimmt (vgl. Abschnitt 1.2.1 und 1.2.2). Im Falle der Überbestimmtheit müssen relevante Daten ausgewählt werden, im Falle der Unterbestimmtheit müssen nötige Daten beschafft, also beispielsweise *geschätzt* werden. Insbesondere im Falle der Unterbestimmtheit muss ein Zugriff auf den nichtmathematischen „Rest der Welt" erfolgen bzw. auf das „Vorwissen" der Lernenden, das in der Regel nichtmathematischen und nichtschulischen Kontexten entstammen wird. Stillmann (2012, S. 3) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen

- dem aus persönlichen Erfahrungen gewonnen Alltagswissen („episodic knowledge"),
- dem grundsätzlichen weltlichen Allgemeinwissen („encyclopaedic knowledge")
- und dem Erfahrungswissen der Lernenden aus anderen Schulfächern („academic knowledge").

Größenvorstellungen („Stützvorstellungen") bzw. das Wissen um „geeignete Repräsentanten" lassen sich demnach zu diesem Repertoire an mitgebrachtem Vorwissen zählen, wodurch das „Schätzen einer Größe" im Sinne der Bildungsstandards notwendig an individuelle Ressourcen gebunden wird: Denn selbst wenn der Vorgang des Schätzens – beispielsweise der Anzahl der Klavierstimmer in einer Stadt, der Länge eines Staus u. ä. – „systematisch" erfolgt, beruht er letztlich doch auf einem Stück nichtpräzisem „Alltagswissen" (vgl. auch Abschnitt 1.4.2 in dieser Arbeit). Greefrath (2010) spricht in diesem Zusammenhang von „kontextbezogene[n] Aspekte[n]" (ebd., S. 214) des Umgangs mit Ungenauigkeit. Im Folgenden wird dieser Fall als „lebensweltliches Schätzen" bezeichnet.

Anders gelagert sind Schätzaufgaben, die nicht bezüglich ihrer Datenlage unterbestimmt sind, sondern bezüglich des „Modells": Geht es beim lebensweltlichen Schätzen beispielsweise darum, die Länge eines Staus zu einer gegebenen Anzahl von Autos zu berechnen, so ist ein bestimmtes mathematisches Modell (geschätzte Länge der Fahrzeuge mal Anzahl der Fahrzeuge plus Summe der geschätzten Abstände) eindeutig zielführend und in gewisser Weise in der Aufgabenstellung „versteckt". Nur die fehlenden Daten (Länge Fahrzeuge, Länge Abstände) werden geschätzt. Ist dagegen die Fläche von Spanien anhand einer maßstabsgetreuen Landkarte zu bestimmen, so müssen keine Werte angenommen oder recherchiert werden: Die gegebene Aufgabe hält alle nötigen

Informationen vor. Allerdings muss nun die Mathematik in Form bekannter und berechenbarer Modelle an die komplexe Realsituation herangetragen werden. Der Vorgang des Schätzens besteht dann eher im Vorgang des „Approximierens“, besser: „näherungsweise Bestimmens“ und beruht auf mathematischen Vorkenntnissen zu geometrischen Formen u. ä. Man könnte eine solche Aufgabe daher als Aufgabe zum „mathematischen Schätzen“ bezeichnen, da man in der Mathematik verbleibt. Legt man die Formulierung der Bildungsstandards zugrunde, wäre das mathematische „Modell“ mitsamt seiner Berechnungsformel in diesem Fall der „geeignete Repräsentant“, über den man (innermathematische) „Vorstellungen“ haben muss (vgl. hierzu auch die Überlegungen von Meyer & Voigt 2010 zum „Rationalen Modellieren“).

Bei „Schätzaufgaben“ resultiert aus dem Schätzvorgang in der Regel eine gewisse Ungenauigkeit der Ergebnisse gegenüber einem „tatsächlichen“ Wert – so dieser überhaupt bekannt bzw. ermittelbar ist: Diese Ungenauigkeit entsteht beim *lebensweltlichen Schätzen* durch die Differenz geschätzter und tatsächlicher Daten (Autolänge, Abstände usw.; vgl. auch Herget 1999). Die Ungenauigkeit beim *mathematischen Schätzen* ergibt sich aus der Abweichung schätzender Modelle (z. B. Flächeninhalt eines geeigneten Kreises oder geeigneter zusammengesetzter geometrischer Figuren mit relativ einfach zu berechnendem Flächeninhalt) und tatsächlicher Gegebenheiten („tatsächliche“ Größe Spaniens, so recherchierbar). Am Modellierungskreislauf veranschaulicht kommt der *Umgang mit Ungenauigkeit* also an unterschiedlichen Stellen ins Spiel.

*Beispiel „Lebensweltliches Schätzen“: Münzturm-Aufgabe*

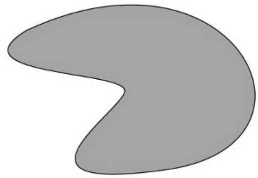
Die Aufgabe zum „Schätzen der Höhe eines Münzturms“ war in ähnlicher Form Bestandteil der Zentralen Prüfungen (ZP 10) Mathematik in Nordrhein-Westfalen (2012):

> Schätze, wie hoch ein Turm aus hunderttausend
> 1-Euro-Münzen ungefähr sein würde.

Hier bezieht sich der Vorgang des „Schätzens“ ausschließlich auf das einmalige Schätzen der Dicke einer Münze. Hierfür leistet die mathematische Welt keine Hilfe, die unbekannte Angabe wird also *lebensweltlich* geschätzt – hierzu muss man entsprechende Münzen kennen. Das weitere Vorgehen zur Lösung der Aufgabe besteht in der Multiplikation der geschätzten Größe („Repräsentant“) mit dem Faktor 100 000 und ggf. im sinnvollen Runden des Ergebnisses. Das mathematische „Modell“ ist in diesem Sinne unproblematisch. Man kann hier von einer „Schätzaufgabe“ sprechen oder aber, die Ausführungen in den Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2 berücksichtigend, von einer einfachen bzw. „trivialen“ oder „routinemäßigen“ (vgl. 1.2.2) Modellierungsaufgabe, wenn man das zu schätzende Problem (die Höhe eines Turmes aus x Münzen) als „reales Problem“ auf-fasst und das zielführende mathematische Modell (x mal die Höhe einer Münze) als „gegeben" bzw. als verhältnismäßig unproblematisch und in gewisser Weise in der gegebenen Situation „versteckt" betrachtet.

*Beispiel „Mathematisches Schätzen": Fläche schätzen*

a) Schätze den Flächeninhalt der grauen Fläche ab. Beschreibe - ggfs. mithilfe der nebenstehenden Abbildung - wie du vorgegangen bist.



Bei dieser Aufgabe (aus den Musteraufgaben zu den Zentralen Abschlussprüfungen in Nordrhein-Westfalen[12]; vgl. auch die Aufgabe „Schätzen 1" im Abschnitt 4.1.2 in dieser Arbeit) soll der Flächeninhalt der grauen Fläche geschätzt werden. Eine mathematische Formel zur präzisen Bestimmung des Flächeninhaltes dieser Figur haben die Lernenden nicht zur Verfügung. Die Fläche muss also durch ein Modell angenähert werden.

Wird die konkrete Fläche als „reales Problem" in der „realen Welt" gedeutet, das in eine Form (Modell) übergeführt werden muss, in der ein mathematischer Zugriff möglich wird, so kann diese Aufgabe im Prinzip als (entsprechend wenig authentische) Modellierung gesehen werden. Eine offensichtlich realitätsbezogene Variante der Aufgabe wäre das Bestimmen oder Schätzen des Flächeninhaltes einer realen Fläche beispielsweise eines Kakaoflecks oder eines Landes anhand einer gegebenen Karte o. ä. Als Aufgabe zum Schätzen betrachtet, übernimmt das mathematische Modell die Funktion des geeigneten Repräsentanten. „Vorstellungen" über den Flächeninhalt eines solchen Modells nutzen Kinder und Jugendliche in der Regel wohl nicht, sie haben jedoch Berechnungsmöglichkeiten mit Hilfe von Formeln zu Flächeninhalten bekannter geometrischer Figuren. Die obige Aufgabe aktiviert also das „mathematische Schätzen", im Sinne des „näherungsweisen Bestimmens" der vorgegebenen Fläche.

Ein Bearbeitungsverfahren, das zusätzlich einen lebensweltlichen Zugang aktiviert, wäre beispielsweise, wenn Schülerinnen und Schüler die Fläche mit Hilfe eines „geeigneten Repräsentanten" schätzen würden, über den sie tatsächlich Vorstellungen besitzen: Dies könnte z. B. die „Breite" eines Fingers sein (etwa 1 cm) oder die „Fläche" eines Fingerabdrucks (etwa 1 cm²), um davon ausgehend die Fläche bzw. den Radius eines Kreismodells u. ä. „auszumessen".

12 Entnommen aus: Stark, Musteraufgaben ZP 10 NRW 2007. Online unter: http://www.stark-verlag.de/upload_file/Muster/51400m3.pdf (letzter Zugriff am 22.1.2015).

### 1.2.4 Der Erwartungshorizont realitätsbezogener Aufgaben

Realitätsbezogene Aufgaben lassen sich in unterschiedliche „Typen“ ordnen, wie in den vorhergehenden Abschnitten ausgeführt wurde. Dabei werden Dimensionen zu Grunde gelegt, die in vielfacher Weise miteinander verbunden und aufeinander bezogen sind. Als aufschlussreiche Unterscheidungsmerkmale sowohl für die Charakterisierung realitätsbezogener Aufgaben sowie ggf. für die Abgrenzung von Modellierungsaufgaben haben sich dabei insbesondere der normative *Modellierungsanspruch*, die *Authentizität und Bedeutung des Kontextes* – in Verbindung mit der didaktischen/pädagogischen Intention der Aufgabe – sowie die *Datenlage* erwiesen. Diese Merkmale scheinen für viele in der Literatur zitierte Charakterisierungen realitätsbezogener Aufgaben wesentlich.

In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus bei der Betrachtung realitätsbezogener Aufgaben insbesondere auf dem *angemessenen* Umgang mit dem Alltagskontext bzw. dem Schulkontext und den entsprechenden *Kontextwechseln* – worauf in den Abschnitten 1.4 und 1.5 sowie in den Kapiteln 4 und 5 genauer eingegangen wird. Damit ist der Erwartungshorizont angesprochen, insbesondere die Erwartung an eine geeignete Berücksichtigung der außermathematischen Welt. Im Folgenden soll daher eine einfache Klassifizierung realitätsbezogener Aufgaben bezogen auf den entsprechenden *Erwartungshorizont* vorgenommen werden, die für Aufgabenanalysen im späteren Teil dieser Arbeit (Kapitel 4) genutzt werden kann.

*Klassifizierung nach „intendiertem Kontextgebrauch“*

In den beiden vorherigen Abschnitten 1.2.2 und 1.2.3 wurden einige Schätzaufgaben bzw. (mehr oder weniger triviale) Modellierungsaufgaben betrachtet und gezielt daraufhin beschrieben, an welchen Stellen im Bearbeitungsprozess durch das Schätzen Ungenauigkeit ins Spiel kommt.

Die Frage nach der „erlaubten“ bzw. „erforderten“ Ungenauigkeit einer realitätsbezogenen Aufgabe übersetzt in gewisser Weise die Frage, an welcher „Stelle“ im Modellierungsprozess tatsächlich auf die reale Welt zugegriffen werden soll, die außerhalb der gegebenen und damit von den Aufgabenstellenden kontrollierten Informationen liegt[13]. Damit operationalisiert sie die erforderliche bzw. erwartete Orientierung der Schülerinnen und Schüler im Hinblick auf den *Umgang mit Alltagswissen* bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben im Mathematikunterricht. Entlang des Merkmals der Eindeutigkeit bzw. der „Präzision“ des Ergebnisses als Resultat eines „ungenauen“

13 Dies hat sich zumindest bei der hier vorgenommenen Auswertung empirischer Daten als erkenntnisreiches Unterscheidungsmerkmal herausgestellt. In Kapitel 3 und 4 komme ich darauf zurück.

Zugriffs auf die Mathematik bzw. die realistische Welt, lassen sich die folgenden Aufgabentypen unterscheiden (vgl. auch 3.4).

(0) Aufgaben, die *keine* außermathematische Beschäftigung mit dem realistischen Kontext erfordern, d. h. „eingekleidete Aufgaben“ oder „Berechnungsaufgaben“: Hier ist der Kontext für das Ergebnis unwichtig und austauschbar, eigene realistische Annahmen sind nicht nötig und das mathematische Modell ist quasi vorgegeben. Die Aufgabe hat ein eindeutiges (und präzises) Ergebnis. Ziel einer solchen Aufgabe ist in der Regel nicht der Umgang mit realistischen Inhalten, sondern das Üben mathematischer Inhalte (vgl. Abschnitt 1.1.3) oder allgemeiner Kompetenzen, ggf. auch das bewusste Anstoßen elementarer Mathematisierungsprozesse. Beispiele sind eingebettete Aufgaben, ggf. auch die „Schneckenaufgabe“ (S. 32 in dieser Arbeit), unter der Annahme, dass eine Validierung nicht gewünscht wird.

(1) *Einfache Validierungsaufgaben*: Mathematisches Modell und zu verwendende Daten sind in der Aufgabenstellung an- bzw. festgelegt. Die Aufgabe muss in der Regel „entkleidet“ werden. Der eigentliche Zugriff auf den „realen“ Kontext der Aufgabe erfolgt erst bei der Validierung und damit – wenn man den Modellierungskreislauf (S. 30) zugrunde legt – *nach* der Bestimmung eines mathematischen Ergebnisses (und dessen sachkontextualer Interpretation). Die Validierungen können in ihrer Formulierung, sollten aber üblicherweise nicht bezüglich der Argumentationsbasis oder im Ergebnis voneinander abweichen. Daten, Modell und somit auch die Lösung sind mit dem Erwartungshorizont festgelegt, müssen also „gefunden“, nicht aber selbst „modelliert“ werden. Das Ergebnis der Aufgabe ist damit eindeutig, Ungenauigkeit kommt durch die Berücksichtigung der Realität in der Regel nicht ins Spiel. Beispiele sind die in 1.2.2 aufgeführten Aufgaben „Busaufgabe“ und „Fahrstuhlaufgabe“.

(2) *Einfache „Schätzaufgabe“* – Einschrittiges bzw. mehrschrittiges *lebensweltliches Schätzen*: Hier ist das mathematische Modell im Wesentlichen festgelegt. Ein Zugriff auf die „reale Welt“, d. h. über den in der Aufgabenformulierung gegebenen Kontext hinaus, ist nötig, um *ein* Datum oder ggf. mehrere (aber nicht beliebig viele) Daten zu beschaffen, die für die Berechnung der Lösung im Rahmen des Modells nötig sind. Die Lösung ist nicht eindeutig bzw. nicht präzise durch die Ungenauigkeit, die durch die „Datenrecherche“ entsteht. Ein Beispiel wäre die Aufgabe zur Schätzung der Höhe eines Münzturms aus 1-Euro-Münzen (vgl. „lebensweltliches Schätzen“ im Abschnitt 1.2.3).

(3) *Einfache „Schätzaufgabe“* – Einschrittiges bzw. mehrschrittiges *mathematisches Schätzen*: Zu dieser Gruppe zählen Aufgaben, die an *einer Stelle bzw. an wenigen Stellen* der Modellbildung eine Ungenauigkeit zulassen bzw. erfordern, z. B. weil eine Form oder eine Funktion nur angenähert be-

rechnet werden kann. Ein Zugriff auf die „reale Welt“ erfolgt dagegen nicht unbedingt. Das Ergebnis ist durch die Ungenauigkeit, die durch die Wahl des nur annähernden mathematischen Modells ins Spiel kommt, nicht eindeutig bzw. präzise festlegbar. Ein Beispiel ist die Aufgabe „Fläche berechnen“ (vgl. „mathematisches Schätzen“ im Abschnitt 1.2.3) und die ähnliche Aufgabe „Schätzen 1“ (in 4.1.2).

(4) Aufgaben, die wirklich *außermathematische Argumentationen* erfordern (authentische Modellierungsaufgaben): Der Kontext muss berücksichtigt werden, ferner darf bzw. muss tatsächlich „frei“ in der nichtmathematischen Welt „gewildert“ werden. Mit angenäherten Modellen und recherchierten Daten kommen, durch die Herangehensweise bedingt, an mehreren und im Erwartungshorizont nicht festgelegten Stellen Ungenauigkeiten ins Spiel. Eine solche Aufgabe wird in der Regel nach dem sinnhaften Vorgehen beurteilt, sie kann in Bezug auf ihre Ergebnisse eigentlich keine Vorgaben (z. B. in Form eines Lösungsintervalls etc.) machen, was die Fermi-Aufgabe auf S. 36 (Abschnitt 1.2.2) „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ sehr gut illustriert.

Die Klassifizierung nach „intendiertem Kontextgebrauch“ ist hilfreich für eine Analyse von Aufgaben entlang der zentralen Frage dieser Arbeit nach dem Verhandeln *angemessener Realitätsbezüge* bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben, da sie den Erwartungshorizont mit diesem Fokus abbilden kann (vgl. Abschnitt 3.4 und Kapitel 4).

## 1.3 Zu sprachlichen Schwierigkeiten realitätsbezogener Aufgaben

Realitätsbezogene Textaufgaben bzw. *Modellierungsaufgaben* erfordern in der Regel nicht nur *eine* Kompetenz: Der Modellierungsprozess, idealtypisch dargestellt durch den Modellierungskreislauf (Abbildung 1, S. 30), spricht unterschiedliche Fähigkeiten in unterschiedlichen Bearbeitungsphasen an, die sich nur schwer isoliert betrachten lassen (vgl. 1.2.2). Die Kompetenz des mathematischen Modellierens sei, wie Blum (2007) schreibt, „untrennbar mit anderen Kompetenzen verwoben“ (Bum 2007, S. 6): Hierzu gehören demnach mindestens das verstehende und Sinn entnehmende Lesen der Aufgabenstellung, das Entwerfen und Anwenden von Bearbeitungsstrategien (ebd.) sowie vielfältige innermathematische Arbeiten, die entsprechende technische Probleme aufwerfen können. Zu diesen kognitiven und metakognitiven Anforderungen komme, so Blum, „dass in allen Modellierungsschritten inhaltliche Vorstellungen von den involvierten mathematischen Inhalten benötigt werden“ (ebd., S. 6).

Insbesondere zu *(meta)kognitiven* Schwierigkeiten beim Modellieren wurde in den letzten Jahren viel geforscht („3. Phase“, vgl. Abschnitt 1.1.1). Für die deutschsprachige Diskussion sei hier z. B. auf die zahlreichen Arbeiten von Blum, Kaiser, Borromeo Ferri, Greefrath und Maaß (dargestellt z. B. in Borromeo Ferri et al. 2013) verwiesen. Schukajlow-Wasjutinski führt in seiner Dissertation (2010) Schwierigkeiten aus, die insbesondere das *Problemlösen* als zentrale Anforderung beim Modellieren betreffen.

Der Fokus dieser Arbeit soll auf Schwierigkeiten liegen, die bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben im Zusammenhang mit *sozialen Disparitäten* Relevanz beanspruchen dürften. Daher werden in diesem Kapitel einige aktuelle Arbeiten zu *sprachlichen Schwierigkeiten* von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund im Unterricht und insbesondere beim Umgang mit Textaufgaben vorgestellt. Es wird von der Darstellung quantitativer Belege für einen Zusammenhang sprachlicher Kompetenzen und der Mathematikleistung insbesondere von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund (1.3.1) ausgegangen, um schließlich „Sprache als Schwierigkeit“ zu bestimmen, die in der Schulbiographie von Kindern und Jugendlichen fortschreitende Hürden erwarten lässt (1.3.2). Die Unterscheidung von Alltags-, Fach- und Bildungssprache ist hilfreich, um die Rolle der *Bildungssprache* für das schulische Lernen vor dem Hintergrund zu problematisieren, dass sie womöglich nicht erschöpfend im Unterricht vermittelt werden kann, sondern zu großen Teilen von „zu Hause“ mitgebracht werden muss (1.3.3). Der Abschnitt 1.3.4 konkretisiert dieses Problem für die Frage nach den sprachlichen Hürden bei (realitätsbezogenen) Textaufgaben.

In Abgrenzung – oder besser: *Ergänzung* – zu den in diesem Kapitel dargestellten sprachlich bzw. linguistisch motivierten Konzepten wird mit dem folgenden Abschnitt 1.4 dann versucht, für diese Arbeit eine soziologische Perspektive auf realitätsbezogene Aufgaben zu entwickeln.

### 1.3.1 Lese- und Mathematikleistung von Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund

Die in der Einleitung bereits angeführten internationalen Schulvergleichsstudien haben wiederholt gezeigt, dass das deutsche Schulsystem im Vergleich mit anderen Ländern besonders starke Differenzen in Bezug auf Schulerfolg bei Lernenden mit *unterschiedlichen sozialen Hintergründen* aufweist (z. B. Deutsches PISA-Konsortium 2001, S. 379ff, PISA-Konsortium Deutschland 2004, S. 225ff, PISA-Konsortium Deutschland 2007, S. 309ff, Bos et al. 2003, S. 265ff). Insbesondere bezieht sich dieses Datum auf Kinder und Jugendliche mit *Migrationshintergrund* (ebd.).

*Mathematikleistung*

Ein konkretes Beispiel: Im Fach Mathematik (Schwerpunktbereich bei PISA 2003) beträgt der von PISA 2003 gemessene Kompetenzunterschied zwischen den Jugendlichen aus den so genannten „oberen Statusgruppen“ (oberes Viertel, mit höchstem Berufsstatus der Familie als Bezugspunkt) im Vergleich zu Jugendlichen aus den „unteren Statusgruppen“ 102 Punkte. Bei einem Mittelwert von 503 Punkten erscheint dieser Unterschied dramatisch. Im internationalen Durchschnitt liegt der Unterschied zwischen den Statusgruppen bei 92 Punkten (PISA-Konsortium Deutschland 2004).

Dieses Ergebnis betrifft in besonderer Weise Jugendliche mit Migrationshintergrund: PISA zeigt auch, dass Jugendliche aus zugewanderten Familien in Deutschland (aber auch in anderen Staaten mit vergleichbarer Einwanderungssituation) im Durchschnitt ein niedrigeres Niveau (nicht nur) mathematischer Kompetenzen erreichen als Jugendliche, deren Eltern in Deutschland geboren sind (ebd.).

*Leseleistung*

Nationale Leistungsstudien belegen sowohl schwächere *Leseleistungen* von Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund während der gesamten Grundschulzeit (z. B. Bos et al. 2003, Bos et al. 2007, Stanat, Pant, Böhme & Richter 2012) als auch schwächere Mathematikleistungen (z. B. Bos et al. 2003, Bos & Pietsch 2006, Stanat et al. 2012) im Vergleich mit ihren Altersgenossen ohne Migrationshintergrund. Tiedemann & Billmann-Mahecha (2004) weisen für die von ihnen befragten Grundschulkinder nach, dass sich sowohl bei den Leseleistungen als auch in Mathematik die Familiensprache deutlich auswirkt. Kinder mit nichtdeutscher Familiensprache hätten demnach fachübergreifend die ungünstigsten Voraussetzungen für Schulerfolg während der Grundschulzeit.

Für die Gruppe der Fünfzehnjährigen finden sich vergleichbare Befunde, z. B. in den Analysen der PISA-Studie (z. B. PISA-Konsortium Deutschland 2007, Stanat & Christensen 2006, PISA-Konsortium Deutschland 2004, Deutsches PISA-Konsortium 2001; aufgearbeitet auch in Gogolin, Neumann & Roth 2003). Mangelnder Erfolg wird hier – unter anderem – ebenfalls in ursächliche Verbindung mit *sprachlichen Schwierigkeiten* gebracht, für die die Leseleistung in der Regel als wichtiger Indikator gilt: Entscheidend für das schlechte Abschneiden von Jugendlichen mit Migrationshintergrund bei PISA (z. B. 2000) sei demnach eine fehlende

> „[…] Beherrschung der deutschen Sprache auf einem dem jeweiligen Bildungsgang angemessenen Niveau […] Nach den Befunden scheinen sich sprachliche Defizite kumulativ in Sachfächern auszuwirken, sodass Personen mit unzureichendem Leseverständnis in allen akademischen Bereichen in ihrem Kompetenzerwerb beeinträchtigt sind.“ (Baumert & Schümer 2001, S. 379, eig. Hv.)

Die Gruppe der Bildungsverlierer scheint sich diesen Befunden zufolge geändert zu haben: Statt dem „katholische[n] Mädchen vom Lande“, das in den 1960er und 1970er Jahren als Prototyp der „Bildungsverliererin“ galt (Dahrendorf 1966, Peisert 1967), zeigen die großen Studien nun den sprachlich nicht ausreichend kompetenten „Migrantensohn“ im Zentrum der Argumente für soziale und gesellschaftliche Benachteiligung.

### 1.3.2 Sprache als Schwierigkeit

Die angeführten Studien weisen insgesamt auf unterschiedliche Problemfaktoren hin: Migrationshintergrund, Armut, Bildungsstand der Familie etc. Anhand der Datenlage lässt sich jedoch ableiten, dass sich besonders der Sprachstand der Schülerinnen und Schüler als (ein) *ausschlaggebender* Faktor für Schulerfolg erweist (z. B. Tiedemann & Billmann-Mahecha 2004, Heinze et al. 2011, Deutsches PISA-Konsortium 2001, PISA-Konsortium Deutschland 2004, Gogolin, Kaiser, Roth, Deseniss, Hawighorst & Schwarz 2004, Gogolin et al. 2003, Short & Fitzsimmons 2007) – auch im vermeintlich wenig sprachlastigen Fach Mathematik (z. B. Heinze, Herwartz-Emden & Reiss 2007, Deutsches PISA-Konsortium 2001, PISA-Konsortium Deutschland 2004).

Eine aktuelle Studie zu den Zentralen Prüfungen (ZP 10) in Nordrhein-Westfalen zeigt zudem, dass sich in Bezug auf die ausgewerteten Ergebnisse speziell die (akademische) Sprachkompetenz („language proficiency“) stärker auf die Mathematikleistung auswirkt als andere familiäre Benachteiligungen wie sozioökonomischer Status, Mehrsprachigkeit, Migrationshintergrund oder die reine Leseleistung (Prediger, Renk, Büchter, Gürsoy & Benholz 2013).

Solche Ergebnisse lassen es zwingend notwendig erscheinen, die *sprachlichen* Anforderungen beim Mathematiklernen bzw. beim Lösen mathematischer Aufgaben aus verschiedenen Perspektiven näher zu beleuchten. Insbesondere lenkt es den Blick jedoch auf die Anforderungen und Funktionen von *Fach- und Unterrichtssprache (Bildungssprache),* die in den letzten Jahren in der internationalen wie nationalen Diskussion eine verstärkte Aufmerksamkeit von Erziehungs- und Sprachwissenschaftler(inne)n sowie von Sprach- und Fachdidaktiker(inne)n erfahren haben.

### 1.3.3 Fachsprache und Bildungssprache im Unterricht

In den letzten Jahrzehnten wird in der nationalen wie internationalen mathematikdidaktischen Diskussion verstärkt auf die Bedeutung von *Sprache als Voraussetzung* für das Lernen von Mathematik hingewiesen. Dabei kommen unterschiedliche Argumente und Perspektiven zum Tragen:

Während Maier (1986) die besondere Rolle der Sprache beim Mathematiklernen mit der speziellen ontologischen Eigenart der mathematischen Objekte begründet, da diese „nicht realer Natur und damit den Sinnen nicht zugänglich“ (ebd., S. 137) seien, hebt Pimm (1987) den Charakter der Mathematik als soziale Tätigkeit hervor, die derart mit verbaler Kommunikation verbunden ist, dass man von Mathematik als (eigener) „Sprache“ sprechen könnte. Diese Ansätze könnte man als Betonung der Rolle der spezifischen *Fachsprache* in der Mathematik verstehen, die sich nach Maier & Schweiger (1999, S. 20f) mit eigenen Fachtermini, spezifischen Satzstrukturen und spezifischen „Textsorten" konstituiert. Eine solche mathematische Fachsprache, mit ihren differenzierten Begrifflichkeiten einerseits, dem Metaphernreichtum andererseits bzw. den vielen Begriffen, die aus dem alltagssprachlichen Kontext zwar bekannt sind, dort aber eine abweichende Bedeutung besitzen, generiert mit Sicherheit besondere sprachliche Schwierigkeiten für Lernende mit nichtdeutscher Familiensprache.

Auf der anderen Seite lässt sich jedoch auch die Sprache des Vermittelns, sowohl mathematischer Inhalte als auch der Fachsprache selbst, betrachten: Gemeint ist die kognitiv anspruchsvolle *Unterrichtssprache*, insbesondere gesprochen von den Lehrerinnen und Lehrern, die sich mitunter wesentlich von der Alltagssprache der Schülerinnen und Schüler unterscheidet, und die trotz vieler gemeinsamer Merkmale auch mit der Fachsprache nicht gleichzusetzen ist (für eine Illustration zur Unterscheidung vgl. Meyer & Prediger 2012). Diese Unterrichtssprache lässt sich am zutreffendsten mit dem Begriff der „Bildungssprache" bezeichnen (Gogolin 2009, bereits bei Habermas 1977), in der englischsprachigen Literatur ist von „academic language" oder auch von „language of schooling" (z. B. Gibbons 2002, Schleppegrell 2004) die Rede.

Gogolin vermutet (z. B. Gogolin, Neumann & Roth 2003, Gogolin 2009) mit Referenz zu Bernstein und Halliday, dass Schülerinnen und Schüler mit einer anderen Muttersprache als der Unterrichtssprache, einerseits über ein *anderes Register* (gemeint ist damit nicht allein das Vokabular, sondern auch syntaktische und kommunikative Muster) verfügten; zusätzlich jedoch nähmen sie sprachbasiertes Wissen auch anders wahr und erhielten in der Schule nicht ausreichend Gelegenheit, die „Bildungssprache" zu erwerben (Gogolin 2009, S. 268ff; vgl. auch Heinze et al. 2011). Die hieraus erwachsenden Sprach- „Defizite" (Heinze et al. 2011, S. 12) mehrsprachiger Schülerinnen und Schüler mit nichtdeutscher Muttersprache, die im Alltag oft wenig oder gar nicht zu beobachten sind, würden sich demnach in den schulischen Lernprozessen in derartiger Weise auswirken, dass auch in einem vermeintlich wenig sprachlastigen Fach wie Mathematik mit dem Zuwachs von Abstraktion und Komplexität fortschreitende Benachteiligungen zu erwarten sind (Heinze et al. 2011, S. 12).

Auch wenn ein großer Teil des Mathematikvermittelns – gerade in der Grundschule – handlungsorientiert erfolgen kann (vgl. Bruner 1966), so ist die sprachliche Vermittlung fachlicher Begriffe bzw. spezieller Bedeutungen immer noch ein zentrales Medium für das Lernen und Lehren im Mathematikunterricht. Zugleich dient die Unterrichtssprache, aber auch der Organisation, der Aufmerksamkeitsfokussierung, der Interpretation und Kontrolle mathematischer Inhalte sowie der generalisierenden Reflexion (Maier & Schweiger 1999, S. 70). Damit wird plausibel, dass sich grundsätzliche, gravierende Defizite in Bezug auf die Unterrichtssprache (Bildungssprache) auf die Möglichkeit zur Partizipation am Unterrichtsgeschehen auf mehreren Ebenen auswirken können.

*Merkmale von Bildungssprache*

Nach Ortner (2009) kann Bildungssprache als „innersprachliche Verkehrssprache“ zwischen den unterschiedlichen Fachsprachen (ebd., S. 2229) bzw. zwischen Fach- und Alltagssprachen (ebd., S. 2232) gesehen werden (vgl. auch Morek & Heller 2012). Andere Autoren fassen Bildungssprache als Überbegriff über verschiedene „elaborierte“ Sprachvarietäten auf, um „Fachsprache“ dann als *ein* Element von Bildungssprache zu betrachten (Duarte et al. 2011, S. 38f).

Als grundsätzliches Merkmal schulischer Bildungssprache wird in der Literatur übereinstimmend die „konzeptionelle Schriftlichkeit“ genannt (z. B. Koch & Österreicher 1985), die im Gegensatz zu „konzeptionell mündlicher Sprache“ Merkmale aufweist wie z. B. inhaltliche Dichte, komplexer Satzbau, begriffliche Präzision und strukturelle Transparenz („Explizitheit“) sowie zunehmende Abstraktheit, um komplexe Inhalte losgelöst von konkreten (Interaktions-)situationen vermitteln, interpretieren, kontrollieren oder reflektieren zu können (z. B. Koch & Österreicher 1985; detailliert bei Morek & Heller 2012, S. 71ff, Ortner 2009, S. 2228f). Die linguistischen Merkmale folgen dabei den (u. a. kommunikativen) Funktionen von Bildungssprache, sie lassen sich im Sinne der funktionalen Grammatik Hallidays (z. B. 1983) grundsätzlich systemisch-funktional interpretieren.

Neben der Funktion des Wissenstransfers lässt sich wie bei Morek & Heller (2012, S. 70ff) auch die epistemische Funktion von Bildungssprache als „Werkzeug des Denkens“ sowie die sozialsymbolische und ggf. ungleichheits-reproduzierende Wirkung im Zusammenhang mit Bildungssprache als „Visitenkarte“ bzw. als „Eintrittskarte“ in eine bildungssprachliche oder akademische *Community* betrachten. Insbesondere die Funktion eines „Werkzeugs des Denkens“ plausibilisiert dabei sprachliche Merkmale, die einer engen Verzahnung von kognitiver Entwicklung und sprachlichem Lernen geschuldet sein könnten.

In der aktuellen sprach- und fachdidaktischen Literatur zu diesem Thema wird für die Abgrenzung von Alltagssprache und Bildungssprache häufig eine Unterscheidung nach Cummins (eingeführt 1979; kurz in Cummins 2002) aufgegriffen (vgl. auch z. B. Heinze et al. 2011, S. 12, S. 28, Duarte et al. 2011, S. 36f, Morek & Heller 2012, S. 75, Meyer & Prediger 2012), wonach alltagssprachliche Fähigkeiten, nämlich *basic interpersonal communication skills* (BICS), zu differenzieren sind von einer kognitiv anspruchsvollen akademischen Sprachfähigkeit, der *cognitive academic language proficiency* (CALP), die in schulspezifischen (oft schriftlichen) Sprachhandlungen wie Beurteilen, Erläutern, Begründen usw. gefordert wird, die aber nicht an fachliche Inhalte gebunden ist (z. B. Cummins 2002; vgl. auch Rösch & Paetsch 2011, S. 56).

Uwe Gellert (2011) betrachtet in erster Linie die mündliche Kommunikation im Unterricht und spricht explizit von einer „Bildungssprache des Unterrichts“. Er differenziert (mit Verweis auf Pimm 1987) für den „stark klassifizierten“

(ebd.[14]) Mathematikunterricht eine spezifische Bildungssprache der Mathematik aus, mit einer mathematikspezifischen Terminologie, einer spezifischen Symbolik sowie kohärenzbildenden Sprachmitteln und begründenden Konnektoren. Im Zusammenhang mit dem Merkmal der konzeptionellen Schriftlichkeit von Bildungssprache weist Gellert auch auf die „altbekannten“, grundlegenden Arbeiten Bernsteins hin (z. B. 1971, 2000), der selbst von *elaborierten* Sprachmitteln, bzw. dem *elaborierten Sprachcode* in formalen (Bildungs-)kontexten spricht (und diesen vom „restringierten Code“ unterscheidet). Das Merkmal der Kontextunabhängigkeit („sprachliche Dekontextualisierung“, Gellert 2011, S. 98) bzw. der sprachlichen Explizitheit (auch bei Morek & Heller 2012, S. 68) werden als zentrales Merkmal des elaborierten Codes betrachtet, über den Schülerinnen und Schüler aus bildungsnahen Familien aufgrund ihrer Sozialisation demnach sicherer verfügen als Schülerinnen und Schüler nichtprivilegierter sozialer Gruppen (z. B. Bernstein 1971, 2000; vgl. auch Kap. 2 in dieser Arbeit).[15]

*Bildungssprache und Ungleichheit*

Weder bei Bernstein (z. B. 2000) noch in der Diskussion um CALP und BICS nach Cummins (z. B. 2002) geht es um die Kenntnis *entweder* des einen *oder* des anderen Registers. Es sei durchaus die Beherrschung beider Register bzw. Codes möglich und, um schulisch erfolgreich zu sein, auch notwendig. Die Ansprüche des CALP nähmen dabei im Laufe der Schulkarriere zu.

Heinze et al. (2011) schreiben: „Die bei Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund oft vorhandene Fähigkeit, sich auch mit mangelndem Wortschatz und geringen morphologischen Kenntnissen im Alltag mündlich zu bewähren, reicht für schulische Lernprozesse nicht aus“ (Heinze et al. 2011, S. 12). Cummins selbst und Bernstein würden vermutlich von einem anderen „Register“ sprechen, ggf. von einem anderen „Code“, und eine defizitäre Inter-

14 „Stark klassifiziert“ kann hier als „stark abgegrenzt“ verstanden werden. Der Begriff der „Klassifikation“, den Uwe Gellert nutzt, bezieht sich auf den Klassifikationsbegriff von Basil Bernstein (z. B. 1990, 2000), der im Abschnitt 2.3 ausführlich dargestellt wird.

15 Die Charakterisierung „nichtprivilegierter Herkunft“ bzw. „nichtprivilegierter sozialer Gruppen“ soll unterschiedliche Aspekte wie Einkommen, Bildungsstand der Familie, Migrationshintergrund etc. ansprechen. Sie soll damit tendenziell in die Richtung der von den hierzulande üblicherweise genutzten und diskutierten Indizes weisen, die, beispielsweise bei PISA, die sozioökonomische Stellung der Familien von Schülerinnen und Schülern anhand von „Daten zur relativen Position [der] Eltern in einer sozialen Hierarchie, deren Ordnungsprinzipien in der Verfügung über finanzielle Mittel, Macht oder Prestige bestehen“ messen (Baumert & Maaz 2006, S. 12). Der Begriff „nichtprivilegiert“ ist für diese Arbeit jedoch in erster Linie als relationales Konzept relevant – in Abgrenzung zu „privilegiert“. Für eine präzise soziologische Begriffsbestimmung privilegierter und nichtprivilegierter *Milieus*, die in dieser Arbeit nicht eingelöst werden soll, vgl. z. B. Vester (2004, 2005).

pretation der Unterscheidung vermeiden wollen. Für eine erfolgreiche Teilnahme an den fachinhaltlichen Vermittlungsprozessen ist das Verfügen über bildungssprachliche bzw. elaborierte Sprachmittel im oben ausgeführten Sinn jedoch – darin stimmen die Autoren überein – eine notwendige *Voraussetzung*.

Mit anderen Worten: Wird Bildungssprache zum *Vehikel* schulischer Vermittlungsprozesse, aber nicht selbst zum Lerngegenstand, so bildet die Beherrschung von Bildungssprache eine wesentliche Lernvoraussetzung, die jedoch nicht in der Schule gelehrt wird, sondern im familialen Umfeld erworben werden muss. Stärker als die eigentliche „Fachsprache" (s. o.) wirkt sich damit der unterrichtliche Gebrauch der „Bildungssprache" ungleichheitsverstärkend, d. h. als potenzielle Benachteiligung des Kindes bzw. des Jugendlichen in Bezug auf Schulerfolg, aus.

### 1.3.4 Sprachliche Schwierigkeiten bei Textaufgaben

Die schulische Relevanz von (Bildungs-)Sprache bzw. von systematisch kontextentbundenen Sprachhandlungen ist mittlerweile schulstufen- und fächerübergreifend in den Bildungsstandards ausgeführt und festgeschrieben (vgl. KMK 2003). Dabei werden für die Mathematik sowohl die Bereiche der Sprachrezeption und Sprachproduktion (z. B. K1 und K6 in KMK 2003, S. 8) angesprochen als auch explizit Anforderungen aus dem Bereich der (fachlichen) Sprachreflexion gestellt: „Symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt" (K5, ebd., S. 8). Tendenziell sprachlastige Kompetenzbereiche wie das Argumentieren, Problemlösen und Modellieren, in denen sich gerade „tiefergehende[s] begriffliche[s] Verständnis" (Heinze et al. 2011, S. 28) zeigt, gewinnen damit an Bedeutung. Auch die in dieser Arbeit herausgehobenen Anforderungen des *Modellierens* können als (fachsprachlich) reflektive und insofern sprachlich anspruchsvolle Leistungen betrachtet werden: Nicht nur sind in vielen Fällen längere (einbettende) Texte zu verstehen, beim Modellieren müssen die Schülerinnen und Schüler zudem „Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen" (K3, ebd., S. 8).

Die sprachlichen Schwierigkeiten bei Textaufgaben gehen über das reine Textverständnis also hinaus: Vor dem theoretischen Hintergrund eines *linguistisch-handlungsorientierten Erklärungsansatzes* (nach Reusser & Stebler 1997, Reusser 1990) zu Schwierigkeiten bei mathematischen Textaufgaben weisen Duarte et al. (2011) darauf hin, dass neben mathematischem Wissen auch alltagsbezogenes Wissen sowie eine „geeignete semantische Interpretation der im Problemkontext gegebenen Beschreibungen beim Aufbau der Textbasis und des episodischen Situationsmodells sowie des episodischen Problemmodells eine wichtige Rolle für das Verstehen" (ebd., S. 44) spielen. Hier, nämlich bei der „Konstruktion der Repräsentation" der im Aufgabentext beschriebenen Inhalte, vermuten die Autorinnen in Anlehnung an empirische Studien von Gogolin et al. (2004) und Kaiser & Schwarz (2009) spezifische Probleme der

Jugendlichen mit Migrationshintergrund. (Bildungs-)Sprachliche Defizite wirken sich demnach systematisch auf die Herangehensweise an die realitätsbezogene Aufgabenstellung aus: Die in der Studie von Kaiser & Schwarz (2009) bei zweisprachigen Probanden festgestellten Muster des Umgangs mit sprachlastigen Textaufgaben berücksichtigen beispielsweise die Bedeutung der Präpositionen für eine zielführende Lösung der vorgelegten Aufgabe („Salzbergwerk“, aus mathe live 7, S. 19[16]) nicht. Die untersuchten Schülerinnen und Schüler haben infolgedessen ungleich größere Schwierigkeiten, ein geeignetes reales und in der Folge mathematisches Modell der Situation zu erstellen. Nach den Erkenntnissen der MuM-Studie (Prediger 2013) greifen sprachlich schwache Lernende sehr schnell zur „erstbesten verfügbaren Schätzgröße“ (ebd., S. 28), ohne ein adäquates Situationsmodell zu bilden.

Die Konsequenzen der Einbettung von Mathematikaufgaben in schülergeeignete, meist sprachlich dargebotene Kontexte auf die Bearbeitungsprozesse sind damit – vorsichtig – zu problematisieren. Sicherlich ist der sprachliche Anspruch realitätsbezogener Aufgaben in vielen Fällen hoch. Die Befunde in Bezug auf die erhobenen Leistungen sind dennoch widersprüchlich (vgl. 1.4.2). So schreiben beispielsweise Rösch & Paetsch (2011) über die sprachlichen Anforderungen von Textaufgaben:

> „Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass schriftlich gestellte Sach-/Textaufgaben schlechter gelöst werden als die zu den Textaufgaben rechnerisch äquivalenten Aufgaben. Dies wäre zumindest vor dem Hintergrund schwacher Leseleistungen der untersuchten Schülerinnen und Schüler kein allzu überraschendes Ergebnis.“ (Rösch & Paetsch 2011, S. 65)

Im selben Artikel stellen die Autorinnen jedoch mit Blick auf den Aufforderungscharakter solcher Aufgaben fest:

> „Es hat sich gezeigt, dass die Leistungen der Kinder im Bearbeiten von Sach- und Textaufgaben besser werden, wenn Aufgaben in für sie interessanten Kontexten dargestellt werden.“ (Rösch & Paetsch 2011, S. 71)

Ähnlich divergente Befunde liefern in diesem Zusammenhang ebenso die Studien von Gravemeijer (1994), Van den Heuvel-Panhuizen (1999), Busse (2009) sowie Busse & Kaiser (2003), die jedoch den sprachlichen Aspekt nicht vordergründig berücksichtigen. Sie beschreiben insgesamt eine individuell unterschiedliche und eher nicht vorhersehbare Rezeption von Sachkontexten und stellen keinen starren Zusammenhang zwischen Bearbeitungsgerfolg und Vertrautheit mit dem Sachkontext her. Sie erkennen den Aufforderungscharakter und die Zugänglichkeit von Textaufgaben an, weisen aber darüber hinaus auf die Gefahr einer Überidentifizierung mit einem interessanten Kontext hin, die von der eigentlichen Aufgabe ablenken und damit eine zusätzliche Hürde darstellen könnte. Der Aspekt des *Umgangs mit dem Sachkontext* soll im folgenden Abschnitt weiter ausgeführt werden.

---

16 mathe live 7 (2000). Stuttgart: Klett Verlag.

## 1.4 Zur Problematik der Verhandlung mathematischer und lebensweltlicher Kontexte

In diesem Kapitel wird nun – nach entsprechender Begriffsklärung (1.4.1) – der Umgang mit dem Sachkontext thematisiert (1.4.2). Angesprochen werden zunächst zwei Problemlagen, die in der Literatur gut beschrieben sind: Hierzu gehören die Rolle des Vorwissens und motivationale Aspekte – also die Frage, ob die Nähe zu oder das Interesse an einer bestimmten Fragestellung den Zugang zur Mathematik (zur Mathematikaufgabe) erleichtern oder möglicherweise auch erschweren bzw. eine zusätzliche Hürde darstellen kann (1.4.2). Fokussiert wird in dieser Arbeit dann eine weitere Problematik: nämlich die Kenntnis des Lernenden, wann und in welcher Form auf die „reale Welt" zugegriffen werden muss bzw. in den lebensweltlichen Kontext gewechselt und wieder in den mathematischen Kontext „zurückgewechselt" werden soll. Es geht also im Kern um die Frage der „Angemessenheit des Realitätsbezuges". Hier lässt sich theoretisch eine Tendenz zur Überbetonung des mathematischen Kontextes (1.4.3) und eine Tendenz zur Überbetonung des Sachkontextes (1.4.4) unterscheiden. Ergebnisse und Fallbeispiele aus der Literatur motivieren die zentrale Frage dieser Arbeit, ob eine solche Tendenz in einen Zusammenhang mit dem sozialen Hintergrund von Schülerinnen und Schülern gebracht werden kann (1.4.5).

### 1.4.1 Begriffsklärung: Sachkontext und situativer Aufgabenkontext

Grundsätzlich ist „Kontext" ein relationales Konzept, bei dem der inhaltliche Umfang damit zusammenhängt, was im Zentrum der Aufmerksamkeit steht und insofern „eingebettet wird". In dieser Arbeit sind dies in der Regel „Texte". Sowohl der *Kontext*, in dem eine realitätsbezogene Aufgabe bearbeitet wird, als auch der *Kontex*t, auf den sie sich bezieht, können in diesem Sinne verstanden werden. Für die Betrachtung der Formulierung und Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben lassen sich die Begriffe *Sachkontext*, *situativer Kontext* und *transsituativer* Kontext von Aufgaben unterscheiden.

*Text und Sachkontext*

Mit „Sachkontext" einer realitätsbezogenen Aufgabe ist im Folgenden die Realsituation gemeint, auf die der „Text" explizit oder nichtexplizit Bezug nimmt und in die die Problematik der Aufgabe eingebettet oder angebunden wird. Der Sachkontext realitätsbezogener Aufgaben ist also in der Regel ein Teil der „außermathematischen Welt". Beliebte und viel genutzte Sachkontexte für Mathematikaufgaben sind z. B. „Einkaufen", „Sport", „Haustiere" usw. oder genauer: „Bezahlen", „Schnelllaufen" oder „Futterkosten"[17] .

17 Vgl. hierzu beispielsweise die Schulbuchreihe „mathe live" (Klett-Verlag).

Damit wird der Sachkontext für diese Arbeit quasi *objektiv* bzw. *normativ* (aus Sicht des Aufgabenerstellers) bestimmt und getrennt von seiner Wahrnehmung durch die Lernenden beschrieben, die natürlich durch den (Aufgaben-)Text, durch sich selbst oder durch andere Faktoren beeinflussbar sind. Dieses Verständnis folgt in gewisser Weise dem Ansatz von Clarke & Helme (1996), die mit dem Hinweis auf konstruktivistische Überlegungen bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben ein *objektives Angebot* („objective figurative context“), das allen Lernenden in vergleichbarer Weise zur Verfügung steht, von dessen *individueller innerer Repräsentation* („subjective figurative context“) unterscheiden. Diese analytische Setzung ermöglicht die für diese Arbeit relevante Gegenüberstellung von „Sachkontext“ und seinen unterschiedlichen Rezeptionen und damit die Untersuchung der wahrnehmungskonstituierenden oder besser: bedeutungskonstituierenden Faktoren, die einen zentralen Punkt dieser Arbeit bilden. (Nur) so lässt sich die Frage stellen: Warum verstehen und lösen verschiedene Schülerinnen und Schüler die gleiche Aufgabe auf ganz unterschiedliche Weise?

*Situativer Kontext und transsituativer Kontext*

Das „Setting“ der Aufgabenbearbeitung wird im Folgenden als „situativer Kontext“ bezeichnet. Der situative Kontext bettet sozusagen die (kommunikative) Situation ein, als die eine Unterrichtssequenz oder auch eine Aufgabenbearbeitung im Rahmen eines Interviews interpretiert werden kann. Als „classroom micro-culture“ (nach Cobb & Bauersfeld 1995) oder „Klassenfachkontext“ (Prediger & Leufer 2009) aufgefasst, wirken im *situativen Kontext* dann mindestens die relevanten Bedeutungen des jeweiligen Faches, in dem die Aufgabe gestellt wird, und die sich in dieser Aufgabe in expliziter oder impliziter Weise realisieren, sowie andererseits die sozialen Strukturen der handelnden oder der üblicherweise handelnden Akteure.

Hierbei kann es auch sinnvoll sein, den „situativen Kontext“ auf die (ggf. beobachtbaren) Aspekte der unmittelbaren Interaktion, d. h. der „Mikroebene“, zu beschränken und „größere“ Aspekte, die über die fokussierte Situation hinausweisen, auszuklammern und wiederum begrifflich zu unterscheiden. Eine Möglichkeit ist, diesen darüber hinausweisenden Kontext der „Mesoebene“ oder „Makroebene“ als „transsituativen“ Kontext einzuführen (Prediger & Leufer 2009).

### 1.4.2 Zum Umgang mit dem Sachkontext

Beim Bearbeiten von Text- und Modellierungsaufgaben werden in der Literatur auch schwierigkeitserzeugende Aspekte diskutiert, die direkt durch den einbettenden bzw. den herangezogenen Sachkontext auftreten können – und die nicht vordringlich mit dem sprachlichen „Mehraufwand“ der Aufgabe zusammenhängen. Im Folgenden werden exemplarisch die Rolle des lebensweltlichen Vorwissens beim Verstehen des Sachkontextes und beim Erarbeiten einer adäquaten Antwort, die Rolle der Motivation und – schlussendlich – die für diese Arbeit zentrale Frage nach der Angemessenheit des Umgangs mit dem Sachkontext angesprochen.

*Zur Rolle lebensweltlichen Vorwissens*

Schukajlow-Wasjutinski schreibt in seiner Dissertation (2010) über Schüler-Schwierigkeiten und Schüler-Strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben:

> „Eine Textaufgabe zu verstehen, bedeutet, eine mentale Repräsentation der Aufgabenstellung zu bilden […] Die Grundlagen für den Aufbau von mentalen Repräsentationen bilden der Text, das Bild der Situation und das *Vorwissen* des Lesers." (Schukajlow-Wasjutinski 2010, S. 77, eig. Hv.)

Damit wird – neben dem Textverständnis – explizit auch dem „Vorwissen" des Lernenden eine bedeutende Rolle beim Erschließen einer Modellierungsaufgabe zugeschrieben. Hierbei ist mit „Vorwissen" nicht nur Vorwissen im sprachlichen, rechnerischen, strategischen oder begrifflich-mathematischen Bereich gemeint, sondern insbesondere auch lebensweltliches Vorwissen, d. h. außerschulisch erworbene und individuell unterschiedliche Voraussetzungen für einen erfolgreichen Modellierungsprozess. Blum (2003) weist beispielsweise mit Referenz zu Freudenthal (1973), Pollak (1979), Blum (1996) und Burkhardt (2004) auf die Notwendigkeit von „außermathematische[m] Sachwissen" für das Modellieren hin. Blum vermutet hierin (auch) einen Grund dafür, dass die Modellierungsaktivitäten im Mathematikunterricht immer noch einen (zu) geringen Anteil darstellen (Blum 2003, 2007).

Entsprechende Betrachtungen lebensweltlichen Vorwissens werden in der Literatur danach differenziert, an welcher Stelle des Modellierungsprozesses es eingesetzt werden muss.

Borromeo Ferri (2007) beispielsweise spricht von Einfluss und Notwendigkeit von „individual experiences" und „extra mathematical knowledge" bei Modellierungsprozessen von Schülerinnen und Schülern. In ihrer Adaption des Modellierungskreislaufes von Blum & Leiß (2005) verortet sie das „außermathematische" Wissen („EMK") in der zweiten und dritten Phase des Modellierungsprozesses (vgl. Abbildung 2), also beim *Strukturieren des gegebenen Problems* und bei der *mathematischen Modellbildung*.

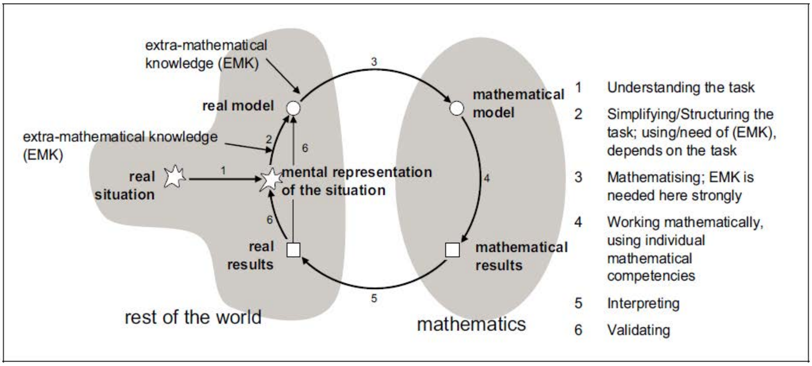



Abbildung 2: Modellierungskreislauf aus kognitiver Perspektive (Borromeo Ferri 2006, S. 87)

Ebenso führt Stillmann (2012) aus, dass umfangreiches Vorwissen schon beim Erschließen des Sachkontextes nötig sei. Es sei notwendig, um eine beschriebene reale bzw. realitätsbezogene Situation zu verstehen und geeignete Strategien abrufen zu können, damit die Situation, die modelliert bzw. mathematisiert werden soll, vollständig spezifiziert und Lücken in der Darstellung des Problemkontextes geschlossen werden könnten. Dabei müsse „akademisches", „episodisches", und „enzyklopädisches" Wissen eingebracht werden (Stillman 2012, S. 3), wie am Beispiel der „Stützpunktvorstellungen" in dieser Arbeit bereits dargestellt wurde (vgl. 1.2.3).

Die individuell unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler wirken sich neben dem Verständnis des Sachkontextes also insbesondere bei einer ggf. nötigen „Datenbeschaffung" aus, da hier das sachkontextuale (Vor-)Wissen und entsprechende Strategien zur Erarbeitung von Informationen von besonderer Relevanz sind. Auf die Bedeutung der Datenbeschaffung beim Modellieren weist in der deutschsprachigen Diskussion explizit der Modellbildungsprozess hin, wie ihn Fischer & Malle (1985, S. 101) beschreiben.

In ihrer Studie zu „realistischen Überlegungen" beim Bearbeiten von Textaufgaben untersuchen Verschaffel et al. (1994) die Aktivierung lebensweltlicher Kenntnisse und lebensweltlicher Argumentationen sowohl zu Beginn des Modellierungsprozesses als auch bei der *Validierung und Interpretation* der mathematischen Ergebnisse. Die Studie vergleicht jedoch nicht Bearbeitungsprozesse bei rein rechnerischen Mathematikaufgaben mit den Herangehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei realitätsbezogenenen Aufgaben. Verschaffel et al. (1994) untersuchen stattdessen Aufgabenpaare realitätsbezogener Aufgaben, bei denen in einem Fall zwischen der Situation und der mathematischen Operation ein sehr einfacher Zusammenhang besteht (also ein „eingekleidetes Problem"), während bei der zweiten Aufgabe diese Beziehung zumindest dann problematisch wird, wenn der vorgegebene Sachkontext der Aufgabe ernst genommen wird (also Aufgaben im Stil der „Busaufgabe“ oder der „Fahrstuhlaufgabe“; vgl. S. 34 in dieser Arbeit). Die Autoren stellen fest, dass die Schülerinnen und Schüler ihrer Stichprobe grundsätzlich dazu tendieren, den Sachkontext zu vernachlässigen (vgl. auch Abschnitt 1.4.3). Einige der in der Studie genutzten Aufgaben geben zudem Hinweise darauf, dass dies wohl nicht allein an der fehlenden Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler liegt, lebensweltliches Wissen zu aktivieren. Das nötige lebensweltliche Vorwissen – das die Aufgabensteller bewusst oder unbewusst voraussetzen – scheint in manchen Fällen schlicht nicht vorhanden. Das heißt: Lebensweltliches Vorwissen wirkt sich nicht nur auf die „frühen“ Phasen beim Modellieren aus: Auch im ggf. abschließenden Schritt einer Validierung bzw. Interpretation eines gefundenen Ergebnisses können fehlende lebensweltliche Kenntnisse bewirken, dass die Beziehung zwischen mathematischem Ergebnis und Sachsituation falsch beurteilt wird.

*Motivationale Aspekte und Auseinandersetzung mit „interessanten“ Sachkontexten*

Heben interessante Sachkontexte nun tatsächlich die Motivation der Lernenden und werden Aufgaben dadurch leichter bzw. Bearbeitungen erfolgreicher?

Wie bereits dargestellt (vgl. Abschnitt 1.3.4 in dieser Arbeit) gibt es hier kontroverse Befunde: So lässt sich einerseits zeigen, dass schriftlich gestellte Sach-/Textaufgaben schlechter gelöst werden als die zu den Textaufgaben rechnerisch äquivalenten Aufgaben (Rösch & Paetsch 2011, S. 65). Jedoch wird auch beschrieben, dass Leistungen von Schülerinnen und Schülern beim Bearbeiten von Sach- und Textaufgaben besser werden, wenn Aufgaben in für sie *interessanten Kontexten* dargestellt werden (Rösch & Paetsch 2011, S. 71). Auch Busse & Kaiser (2003) belegen positive Effekte: Die von ihnen untersuchten Lernenden empfanden die Realitätsbezüge zum Teil als sehr *motivierend* und nutzten ihr sachkontextuales Wissen zur Validierung ihrer Ergebnisse.

Andererseits beschreiben Busse & Kaiser (2003) auch, wie manchmal eine emotional Anteil nehmende Haltung mit lebensweltlichen Themen des Sachkontextes, wie z. B. Umweltzerstörung, von der eigentlichen Aufgabe ablenken kann. Die Lernenden in ihren Studien werden von der eigentlichen Aufgabe abgelenkt, gerade wenn sie mit den Themen vertraut bzw. von den Themen des Sachkontextes betroffen sind. Boaler (1993) führt in diesem Zusammenhang das Beispiel einer Aufgabe mit dem Sachkontext „Mode“ an, das in ihrer Studie von den männlichen Teilnehmern eindeutig besser gelöst wurde. Sie vermutet unter Bezug auf Untersuchungen aus der Naturwissenschaftsdidaktik, dass Mädchen dazu neigen, sich mehr auf den Sachkontext einzulassen und dadurch Schwierigkeiten bei der Abstraktion haben könnten.

Ein zu reiches Sachwissen kann ebenfalls hinderlich wirken, wenn es die lebensweltlichen Assoziationen der Schülerinnen und Schüler zu sehr verstärkt und die Aufgabe dadurch komplizierter wird: Van den Heuvel-Panhuizen (1999) verweist auf ein Beispiel von Gravemeijer (1994), in dem Schülerinnen und Schüler die Aufgabe lösen sollten, 18 Flaschen Cola auf 24 Kinder auf einer Schulfeier zu verteilen. Statt wie eigentlich von der Aufgabe intendiert, eine Division durchzuführen, identifizierten die Probanden sich stark mit dem Kontext und argumentierten damit, dass nicht alle Kinder (gleich gern) Cola mögen und bei einem solchen Anlass auch nicht alle gleich viel davon trinken würden. Schülerinnen und Schüler, die sich mit dem Sachkontext der Aufgabe „zu gut" auskennen, fügen ggf. also komplizierte sachkontextuale Annahmen hinzu und entwickeln so ein „Realmodell", dem sie mathematisch gar nicht mehr gewachsen sind.

Ob eine Aufgabe *erfolgreich* bearbeitet wird oder nicht, lässt sich nach empirischen Ergebnissen von Busse und Stillman *nicht* in einen einfachen Zusammenhang mit der *Vertrautheit* mit dem Sachkontext oder mit der *Intensität* der Auseinandersetzung mit dem Sachkontext bringen (Busse 2009, S. 242, Stillman 2012). Tendenziell scheinen in Busses Studie eher schlechte Ergebnisse mit eher wenig Auseinandersetzung mit dem Kontext zusammenzufallen. Hier könnte das (ggf. fehlende) Vorwissen eine nicht unwesentliche Rolle spielen. Eine – möglicherweise im Interesse für den Sachkontext begründete – *intensive* Auseinandersetzung mit dem Kontext lässt sich andererseits jedoch *nicht* als notwendige Bedingung für eine erfolgreiche Bearbeitung ableiten, wozu wiederum die o. g. Ergebnisse von Busse & Kaiser (2003) und Gravemeijer (1994) passen. Die Intensität der Auseinandersetzung mit dem Kontext erweist sich in den entsprechenden Studien zudem als aufgabenspezifisch (z. B. Stillman 2012, S. 5).

Insgesamt, so könnte man diese Ergebnisse zusammenfassen, werden angebotene Sachkontexte einer realitätsbezogenen Aufgabe zumindest in den genannten Studien individuell unterschiedlich und nicht vorhersehbar rezipiert (Busse 2009). Die Intensität der beobachteten Rezeption wiederum liefert diesen Studien zufolge noch keinen sicheren Indikator dafür, ob ein Lösungsprozess *erfolgreich* verlaufen wird oder nicht. Busse & Kaiser (2003) plädieren aus diesem Grunde dafür, theoretische Hoffnungen, die in die verstärkte Nutzung von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht gesetzt werden (vgl. 1.1.3), sehr differenziert zu betrachten:

> „We have to be more careful with psychological arguments concerning the inclusion of modelling and applications in mathematics education. We should put more emphasis on normative reasons for the inclusion of real world problems in mathematics education." (Busse & Kaiser 2003, S. 15)

### *Unangemessener Umgang mit Sachkontexten*

Ob eine starke Auseinandersetzung mit dem Sachkontext einer Aufgabe tendenziell zu Erfolg oder Misserfolg führt, muss notwendig eine offene Frage bleiben, wenn dabei nicht der *Erwartungshorizont* der Aufgabenstellung berücksichtigt wird: Wenn interessante, für die Schülerinnen und Schüler bedeutungsvolle Sachkontexte von der eigentlichen Intention der Aufgabe ablenken, dann stellt dies für die Schülerinnen und Schüler vor allem dann eine Hürde dar, wenn sie den *eigentlichen* mathematischen Anspruch der Aufgabe nicht erkennen oder *nicht angemessen* berücksichtigen. Andererseits ist das Entkleiden der Aufgabenstellung und die Konzentration auf den mathematischen Kern auch kein Königsweg für alle Aufgabenformate: Fermi-Aufgaben beispielsweise wären so gar nicht lösbar. Doch auch bei weniger offenen realitätsbezogenen Aufgaben sind Aspekte des Sachkontextes in *angemessener Weise* zu berücksichtigen, z. B. Materialeigenschaften oder geeignete Einheiten, auch sinnvolles, dem Sachkontext entsprechendes Runden eines Ergebnisses kann nötig bzw. erwartet sein. Beispiele hierfür sind die „Fahrstuhlaufgabe“ und die „Busaufgabe“ (auf S. 34 in dieser Arbeit).

Insgesamt muss also der realitätsbezogene Kontext bzw. der realistische Anspruch, der durch den realistischen Kontext gegeben ist, ernst genommen werden, aber nicht *zu* ernst. In der *richtigen Einschätzung* des angemessenen Realitätsbezuges liegt der Schlüssel, oder besser: eine Bedingung, für die erfolgreiche Bearbeitung einer realitätsbezogenen Aufgabe. *Unangemessenheit* im Zugriff auf den lebensweltlichen oder aber den mathematischen Kontext äußert sich dagegen entweder in einer *Überbetonung des lebensweltlichen Kontextes* (und gleichzeitiger Vernachlässigung des mathematischen Kontextes) oder in einer *Überbetonung des mathematischen Kontextes* (und gleichzeitiger Vernachlässigung des lebensweltlichen Kontextes). Diese beiden „Phänomene“ werden im Folgenden als unterschiedliche Herangehensweisen aufgefasst, somit noch ohne Intention, Zweck oder Kausalität bestimmt und unterschieden. Später werden sie als „Strategien“ bezeichnet und es wird die Frage ihrer Milieuspezifität in „unsicheren Kontextsituationen“ aufgeworfen.[18]

### 1.4.3 Zur Überbetonung des mathematischen Kontextes

Lernende ignorieren in manchen Situationen den realistischen Kontext und bearbeiten eine mathematische Problemstellung, ohne dabei realistische Überlegungen durchzuführen oder Aspekte ihres Wissens aus nichtmathematischen Zusammenhängen zu nutzen (vgl. z. B. Greer 1993, Van den Heuvel-Panhuizen 1999, Verschaffel et al. 1994). In Leufer (2008) sowie Leufer & Sertl (2010) wurde dieses Phänomen als eine „Überbetonung des offiziellen bzw. mathematischen Kontextes“ sowie als eine „Überbetonung des *spezialisierten Kontextes*“ gegenüber dem lebensweltlichen bzw. *nichtspezialisierten* Kontext bezeichnet. Für dieses Phänomen wird in der fachdidaktischen Literatur unter anderem die Sozialisation der Schülerinnen und Schüler mit traditionellen Einkleidungen und einer entsprechend formal orientierten Unterrichtskultur verantwortlich ge-

18 Zum Verständnis des Begriffs „Milieu“ vgl. Fußnote auf S. 7.

macht, die der Modellierungsperspektive wenig systematische Aufmerksamkeit schenkt (De Corte & Verschaffel 1985, Freudenthal 1991, Saljö 1991, Selter & Spiegel 1997, Van den Heuvel-Panhuizen 1999). Die Schülerinnen und Schüler lernen demnach oft bereits im Laufe ihrer Grundschulzeit, dass es eher hinderlich als förderlich für die Lösung der Aufgabe ist, sich auf den Sachkontext solcher Aufgaben einzulassen (z. B. Verschaffel et al. 1994, S. 273f, Gellert 2012). Stillman (2012) beschreibt vor diesem Hintergrund die *Überbetonung des offiziellen Kontextes* sogar als durchaus vernünftige „Taktik“ (ebd., S. 4) bei Problemstellungen, in denen der Kontext nicht authentisch erscheint oder vollkommen getrennt vom eigentlichen mathematischen Problem wahrgenommen wird. Statt als realistischer Kontext zu wirken und die Schülerinnen und Schüler zu einer Auseinandersetzung mit realistischen Themen einzuladen, werden diese Aufgaben als künstlich und unrealistisch empfunden (z. B. Verschaffel et al. 1994, Freudenthal 1991, Gellert 2012), was sich in den Bearbeitungen spiegelt.

Verschaffel et al. (1994) vermuten neben instruktionalen Ursachen einer *Überbetonung des spezialisierten Kontextes* auch die Möglichkeit fehlenden sachkontextualen Wissens in den angesprochenen Inhaltsbereichen (vgl. Abschnitt 1.4.2).

*Beispiel: Kapitänsaufgabe*

Wie absurd die Taktik bzw. *die Strategie* der Überbetonung des spezialisierten Kontextes mitunter wirken kann, zeigen die bekannten Beispiele der „Kapitänsaufgaben“ (z. B. Radatz 1983, Baruk 1989, ausführlich bei Selter & Spiegel 1997).

> Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen.
> Wie alt ist der Kapitän?

Eine Arbeitsgruppe am Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) von Grenoble ließ diese Aufgabe von Kindern der zweiten und dritten Klasse bearbeiten. 76 der befragten 97 Schüler beantworteten die Frage, indem sie die angegebenen Zahlen der Aufgabenstellung miteinander kombinierten und so eine „Lösung“ der Aufgabe angeben konnten: „36“ (Baruk 1989). Selbst wenn keine Zahlen im Text gegeben wurden („Auf einem Schiff befinden sich Schafe und Ziegen ...“), auf einer dazugehörigen Abbildung jedoch ein Boot mit Schafen und Ziegen zu sehen war, versuchten 69 % der Kinder die Aufgabe durch das Abzählen und Addieren der Schafe und Ziegen auf dem Bild zu beantworten (Keller & Brandenberg 1999). Radatz (1983) legte zusätzlich Kindergartenkindern derartige Aufgaben vor und konnte feststellen, dass diese sehr viel weniger dazu tendierten, bei diesem Aufgabentyp etwas rechnen zu wollen. Die Erklärung liegt nahe, dass viele Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer schulischen Sozialisation dazu neigen, solche Aufgaben zu berechnen (vgl. ausführlich Selter & Spiegel 1997, auch Verschaffel et al. 1994): Sie verhalten sich also nicht „absurd“, sondern vielmehr – in diesem Sinne – *strategisch* (Stillmann 2012) bzw. erwartungskonform.

*Beispiel: Busaufgabe*

Weniger absurde, aber dennoch eindrückliche Ergebnisse zur Überbetonung des *mathematischen Kontextes* liefert die „Busaufgabe“ (vgl. S. 34 in dieser Arbeit), in der es darum geht, ein durch eine Division erhaltenes nichtganzzahliges Ergebnis auf seine Sinnhaftigkeit im gestellten Kontext zu überprüfen.

> 1128 Schülerinnen und Schüler einer Schule sollen von der Schule aus zu einer Sportveranstaltung fahren. Ein Schulbus kann 36 Schülerinnen und Schüler befördern.
> Wie viele Busse sind nötig, um alle Schülerinnen und Schüler zu der Veranstaltung zu bringen?

Die Aufgabe war in dieser bzw. ähnlicher Form bereits Bestandteil der Lernstandserhebung Klasse 9 in Nordrhein-Westfalen. Sie wurde in der Pilotierung von 38 % der Befragten korrekt gelöst, 23 % rundeten das berechnete Ergebnis 1128 : 36 = 31,33 sachlich falsch (nämlich auf 31 ganze Busse), ca. 40 % hatten andere falsche Lösungen (vgl. Prediger 2009).

In ihrem Artikel zu vielfältigen Theorien nennt Prediger (2009) unterschiedliche theoretische Zugänge in der mathematikdidaktischen Diskussion dieser Aufgabe. Analog zu instruktionalen Überlegungen beim vorherigen Beispiel („Kapitänsaufgabe“) wird einmal das Ausblenden realistischer Überlegungen auf den entsprechenden schulisch erlernten Umgang mit eingekleideten Textaufgaben im Unterricht zurückgeführt (man könnte dies als „Argument schulischer Sozialisation“ bezeichnen; auch bei Verschaffel et al. 1994, Verschaffel et al. 2000). Für diesen Zugang spricht, dass ein anderer Unterricht, der speziell für diesen Aufgabentyp sensibilisiert (z. B. nach den Erfahrungen von Renkl 1999, dargestellt bei Prediger 2009) eine deutliche Leistungssteigerung (im Sinne „angemessener“ Orientierungen) hervorrufen kann.

Einen anderen Zugang bietet die Diskussion der im Klassenraum etablierten soziomathematischen Normen und Prozeduren im Umgang mit Textaufgaben (man könnte dies als „Argument sozialer Interaktion“ bezeichnen; vgl. Neth & Voigt 1991, Chevallard 1988; auch genutzt in Gorgorió & Planas 2003). Dieser Zugang verweist auf das Erklärungspotenzial soziologischer Perspektiven, auf welches im Folgenden noch mehrfach zurückgekommen wird. Interaktionsanalysen wiederum können darlegen, wie soziomathematische Normen etabliert werden, die nur bestimmte Übergänge zwischen realistischen und schulmathematischen Kontexten als legitime Praktiken konstituieren (Neth & Voigt 1991, Gellert & Jablonka 2009) und in diesem Sinne dafür sorgen können, dass entsprechende Erwartungshaltungen von Aufgaben „transparent“ werden.

### 1.4.4 Zur Überbetonung des informellen Kontextes

Andererseits weigern sich Schülerinnen und Schüler mitunter, sich auf die Mathematik in einer gestellten Aufgabe einzulassen und/oder versteigen sich auf realistische Argumentationen, mit denen sie zu nichtmathematisch begründeten Antworten auf die gestellte Frage gelangen. In Leufer (2008) und Leufer & Sertl (2010) wurde dieses Phänomen als eine „Überbetonung des lebensweltlichen Kontextes“ gegenüber dem mathematischen, allgemeiner: dem formalen oder *spezialisierten,* Kontext der Schule bezeichnet. Beispiele für dieses Phänomen dokumentieren z. B. Gravemeijer (1994), Stillman (2012), Verschaffel et al. (1994), Cooper & Dunne (2000), Gorgorió & Planas (2003), Gellert (2009), Lubienski (2000), Zevenbergen (2001). *Ein* Grund für die Überbetonung des lebensweltlichen Kontextes könnte, wie bereits dargestellt, eine Überidentifizierung mit den angesprochenen Inhalten sein (1.4.2), ein anderer könnte darin liegen, dass die bearbeitenden Kinder bzw. Jugendlichen aus noch näher zu beleuchtenden Gründen die Erwartungshaltung der Aufgabe nicht sicher erkennen (vgl. die folgenden Beispiele).

*Beispiel: Stadtviertel von Barcelona (Gorgorió & Planas 2003)*

In Gorgorió & Planas (2003) wird der Fall des ca. 15 Jahre alten Migrantensohnes Malik diskutiert, der im Mathematikunterricht die unten stehende Aufgabe bearbeiten sollte. Die Methode sah vor, zunächst in kleinen Gruppen zu arbeiten und dann im Rahmen einer Plenumsdiskussion den Lösungsweg für die ganze Klasse vorzustellen.

The following table gives you the population and the area of two neighbourhoods in Barcelona, Sarrià and La Barceloneta. Discuss in which of the two neighbourhoods people have more living space.

| *Sarrià* | *La Barceloneta* |
|---|---|
| 135,570 inhabitants | 297,930 inhabitants |
| 14 km$^2$ | 3 km$^2$ |

Das folgende Transkript zeigt einen Ausschnitt aus dem Dialog zwischen Malik (M) und seiner Lehrerin (L):

M: I have not solved it with numbers, Miss.
L: How have you solved it?
M: I know about these neighbourhoods. I have been there.
L: And what do you mean by that?

M: In Sarrià they live much more spaciously, I know.
L: Which mathematical operations have you used?
M: Numbers are not necessary here, Miss.
L: OK, I don't want to waste our time with such a discussion. We are supposed to do mathematics here and we only have ten minutes left.
M: I don't know how to explain it, but I'm sure they have more room in Sarrià, my grandmother lives in La Barceloneta.

Den Autorinnen des Artikels geht es vor allem um das Aushandeln von Normen des praktischen Mathematikunterrichts (vgl. die Arbeiten von Yackel & Cobb 1996, Voigt 1996) und das Berücksichtigen von „backgrounds" – also den Hintergründen – und „foregrounds" der Lernenden. Unter „foregrounds" werden die Möglichkeiten, Chancen und Perspektiven einer Person verstanden, wie sie sie selbst wahrnimmt (vgl. Skovsmose 2002). „Foregrounds" werden reflektiert, um Schülerinnen und Schülern, gerade aus Migrantenfamilien, *bedeutungsvolle* realitätsbezogene Aktivitäten im Unterricht anzubieten. Gorgorió & Planas (2003) gehen davon aus, dass soziale und kulturelle Aspekte des Unterrichtskontextes anpassungsbedürftig für diejenigen sind, die aus anderen Kulturen (gemeint sein können andere nationale, aber auch andere disziplinäre Kulturen) stammen. Solche Normen beziehen sich demnach auf Vereinbarungen bzw. Regularitäten der sozialen Interaktion, die nicht absolut sind, sondern für die jeweilige Gruppe ausgehandelt werden und dort gelten. Dies beinhaltet auch die Wahrnehmung dessen, was akzeptabel oder richtig ist. Die Teilnahme an diesen Aushandlungsprozessen oder zumindest deren Transparenz ist notwendig, um die damit verbundenen, vom Lehrer intendierten Arbeits- und Lernprozesse im Unterricht „bedeutungsvoll" werden zu lassen (ebd.).

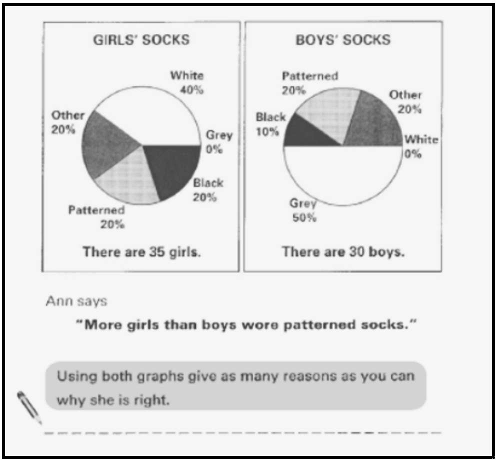
Malik und seine Lehrerin haben offensichtlich eine unterschiedliche Auffassung davon, was eigentlich ein Problem bzw. eine Aufgabe ist und wie man sie löst. Maliks Verständnis der Situation ist, dass es sich hier um ein Problem handelt, für das man eine zuverlässige Lösung braucht, die er – sein Alltagswissen nutzend – geben kann. Daher beantwortet er nicht nur die Frage, sondern verweist auch wiederholt darauf, dass und warum er bezüglich dieser Frage kompetent sei: *„I know […]. I have been there", „I know", "my grandmother lives in La Barceloneta".*

Es gibt für Malik keinen Anlass, in dieser Situation Mathematik zu verwenden. Die „harsche" Intervention der Lehrerin "*I don't want to waste our time"* und der Hinweis *"We are supposed to do mathematics here"* hilft ihm nicht, die Erwartungshaltung der Lehrerin zu „erraten". Malik ist jedoch, wie Gorgorió & Planas (2003) weiter ausführen, in der Folge frustriert und beteiligt sich nicht weiter am Unterricht. Die Auffassung der Lehrerin dagegen ist, dass das Lösen solcher Aufgaben ein Mittel ist, um Mathematik zu lernen und dass dies das Nutzen mathematischer Algorithmen erfordert (ebd.). Die Frage, was ein mathematisches Problem ist und wie es bearbeitet werden soll, scheint kein Gegenstand der Aushandlungsprozesse in der Gruppe gewesen zu sein:

„Using her status as a teacher, Mrs. L. […] determined that 'what a problem should look like and what it means to solve it' was not a matter for negotiation." (ebd., o. S.)

*Beispiel: Die Sockenaufgabe*

Cooper (1998) und Cooper & Dunne (2000) untersuchen anhand von Aufgaben aus nationalen Leistungstests und nachfolgenden Interviews die Art und Weise, wie Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher sozialer Schichten auf „realistische" Items antworteten. Das folgende Beispiel (aus Cooper & Dunne 1998, S. 45f) illustriert sehr gut die Wirkung des Sachkontextes auf die Orientierungen der Probanden. Es zeigt auch, wie durch entsprechende Nachfragen des Interviewers Schlüsselaspekte ins Spiel kommen, die das Mädchen zu einer Bearbeitung im Sinne der Aufgabenstellenden führen, während sich der Junge in seiner durch den Kontext assoziierten lebensweltlichen Argumentation verstrickt.




Der Transkriptausschnitt (vgl. Cooper & Dunne 1998, S. 46f, Zwischentexte eig. Übers.) zeigt die Bearbeitung von Diane (D) im Interview mit Barry Cooper (BC).

D: [liest Frage] But it says, why she's right, but she's wrong. Cos they're identical! [freudig]
BC: Are they? Have you read it all, carefully?
D: Oh, drat! Oh, there are 30.
BC: A tricky question.
D: Usually, in schools, it's more boys than girls though.
BC: In this school?
D: In most schools, I'm saying, that I've visited.
BC: There are more?
D: Boys than girls.
BC: Are there? More boys than girls? Ah. [Pause]
D: [murmelt vor sich hin.] It's quite hard to explain.

BC: What, to explain?
D: Um, just to work out whether, I mean, whether she is right.
BC: Ah, do you think she's right?
D: Yes.
BC: Right, so why do you think she's right?
D: Because, although it's the same proportion, there are more girls.
BC: That's it. Same proportion but there are more girls.

Der folgende Transkriptausschnitt (Cooper & Dunne 1998, S. 46f, Zwischentexte eig. Übers.) zeigt die Bearbeitung von Mike (M) im Interview mit Barry Cooper (BC).

BC: How about this one?
M: These charts show the colour of socks worn on one school day. [Pause] That says that they, the girls, wore more patterned socks than the boys, but it says they both, they both had the same [klingt verwirrt].
BC: So what do you think, then? What do you want to say? [Pause]
M: Is it? I think, really, boys just wear, like, plain old sporty socks, white socks – unless they're, like, teachers' pets – with the socks up here, and things – socks all the way up to their knees [deutet währenddessen auf seine Knie]. But the girls, the girls seem to have more pattern on their socks – they're white and they've got patterns on all of them. The boys have just got the old sporty things with something like sport written down them. Not much of a pattern.
BC: So you want – you don't agree with that then?
M: No.
BC: Ok. What about this bit here [zeigt auf die Aussagen unter den Kreisdiagrammen zur Anzahl der Jungen bzw. Mädchen]? There are 35 girls. There are 30 boys. Does that make a difference?
M: It might do [Pause] in one way. Or another. But [Pause] I mean, really, you've got [Pause] five more girls than boys and, like, they're just going for it.

Das Mädchen, das einem eher bildungsnahen Milieu[19] angehört, verhandelt die Grenze zwischen Alltag und mathematischem bzw. formalem, Bereich besser – in Bezug auf die Erwartungen der Aufgabenstellenden. Auch sie reagiert auf den ihr vertrauten Sachkontext und argumentiert zunächst mit ihren eigenen Erfahrungen: *„Usually, in schools, it' s more boys than girls though."* Dennoch verbleibt sie, im Unterschied zu Mike, immer am mathematischen Diskurs orientiert. Sie erkennt sozusagen den mathematischen Anspruch hinter der realistischen Einbettung und kommt letztendlich, angeleitet durch den Interviewer, über die richtige „Sprachwahl" auch zum richtigen Ergebnis. Mike, ein Junge, der aus einem eher bildungsfernen Milieu stammt, tut dies nicht und scheitert insofern als er seine mathematische Kompetenz, die er im nachfolgenden Inter-

19 Cooper & Dunne (2000) sprechen von „middle class". Da es nicht unproblematisch ist, das Gesellschaftsmodell Englands, auf das sich Cooper & Dunne beziehen, auf Deutschland anzuwenden verwende ich hier den Begriff „Milieu". Eine Charakterisierung von „Milieus" nach der Position in einer arbeitsteiligen Gesellschaft ist für die Deutung der Ergebnisse Cooper und Dunnes jedoch zentral (vgl. Fußnote auf S. 7).

view beweist, hier – und im schriftlichen Test – nicht zeigen kann. Seine Lesart der Fragestellung und seine grundlegende Orientierung lassen ihn die Aufgabe als alltagsweltliches Problem betrachten, in dessen Assoziationen er sich verstrickt: Sein sachkontextuales Vorwissen verleitet ihn, im alltagsweltlichen Kontext zu verbleiben, er erkennt den mathematischen Anspruch nicht und überbetont den „lebensweltlichen Kontext".

### 1.4.5 Kontextwechsel und sozialer Hintergrund

Das Phänomen der „Überbetonung des lebensweltlichen Kontextes", wie bei Mike (s. o.), erweist sich in den Arbeiten von Cooper und Dunne nicht als Einzelfall. Cooper und Dunne (1998, 2000) zeigen, dass beim Bearbeiten realitätsbezogener Testitems im Mathematikunterricht *systematische Unterschiede zwischen Lernenden unterschiedlicher Herkunft* auftreten und vermuten, dass – abhängig von den soziokulturellen Hintergründen bzw. den Herkunftsmilieus der Lernenden – soziale Disparitäten in Bezug auf die Art und Weise auftreten, wie die Ansprüche „realistischer" Fragen interpretiert werden.

Dies ist vielleicht ein zunächst überraschendes, tatsächlich aber recht gut dokumentiertes Phänomen: Zahlreiche Untersuchungen der letzten Jahrzehnte (z. B. Verschaffel et al. 1994, Holland 1981, Cooper & Dunne 1998, 2000, Gellert 2008, Straehler-Pohl & Gellert 2012, Zevenbergen 2001, Lubienski 2000, Gorgorió und Planas 2003) belegen und verallgemeinern Cooper & Dunnes These sowohl mit Hilfe quantitativer als auch qualitativer Forschungsarbeiten: Die „Fähigkeiten"[20] von Schülerinnen und Schülern, den mathematischen Anspruch in eingebetteten Aufgaben („realistic items") zu erkennen und „angemessen" zu verhandeln, scheinen *nicht* über alle sozialen Milieus *gleich* verteilt zu sein. Den übereinstimmenden Ergebnissen dieser Studien zufolge beziehen sich dabei mehr Schülerinnen und Schüler aus nichtprivilegierten Milieus unangemessen auf ihr Alltagswissen als Schülerinnen und Schüler vergleichsweise privilegierter Herkunft. Lernende aus nichtprivilegierten Milieus – wie Mike – tendieren demnach dazu, nichtformale, d. h. lebensweltliche, Argumentationen zu wählen, z. B. Kontexte der Peer-Groups oder der Familie. Sie scheitern insgesamt häufiger daran, die eigentliche Mathematikaufgabe in Anbetracht des suggerierten Realismus der Aufgabenstellung zu erkennen und den Kontext entsprechend zu wechseln und überbetonen also tendenziell den „lebensweltlichen Kontext".

20 Dies wird im Laufe der Arbeit konkreter gefasst: Es geht um mehr oder weniger intentionale Entscheidungen bezüglich der angemessenen Vorgehensweise in einer grundsätzlichen Situation „unter Unsicherheit". Dies darf nicht „defizitär" gedacht werden, da eine solche Entscheidung nur in Bezug auf die betrachtete Situation „unangemessen" sein kann. Der Begriff „Fähigkeit" wird hier also in Anführungszeichen gesetzt. Später werden in diesem Zusammenhang insbesondere die Begriffe der „Orientierung" und, mit Fokus auf die Tätigkeiten der Beteiligten, „Strategien" genutzt.

Dafür müssen nicht notwendig schicht- oder milieuspezifische *Unsicherheiten* gegenüber dem Sachkontext der Aufgabe verantwortlich sein: Zumindest berichtet Busse (2009), dass *alle* Versuchspersonen seiner Studie sich auf die eine oder andere Weise damit auseinandersetzten, „in welcher Weise sachkontextuale Erwägungen in den Lösungsprozess einfließen dürfen, müssen oder können." Es ist demnach also nicht von einer „Verunsicherung" ausschließlich bestimmter sozialer Gruppen auszugehen, die zu einem unangemessenen Umgang mit dem Sachkontext führen. Vielmehr scheint die durch die Aufgabe generell ausgelöste Verunsicherung, „wie viel" Kontextorientierung angemessen sei, bei einigen sozialen Gruppen zu mehr, bei anderen zu weniger adäquaten Entscheidungen zu führen. Busse bezeichnet diesen Entscheidungsprozess als Auseinandersetzung mit einer soziomathematischen Norm (orientiert an den Arbeiten von Yackel & Cobb 1996, Busse 2009, S. 240). Im Folgenden wird diese Reaktion als spezifisches „Verhalten" in einer unsicheren Kontextsituation bzw. im Umgang mit unscharfen Kontextgrenzen interpretiert: Die genannten Studien zur „Übertonung des häuslichen Kontextes" belegen aus dieser Perspektive, dass Kinder und Jugendliche aus nichtprivilegierten Milieus (bildungsfernen Schichten, Arbeiterschicht o. ä.) *in unsicheren Kontextsituationen* tendenziell eine „falsche" Entscheidung treffen – und zwar die, zu stark im Alltagskontext zu verbleiben und die oft versteckten Erwartungen der mathematischen Aufgabenstellung auf diese Weise nicht zu erfüllen.

Cooper und Dunne (2000) beschreiben das Phänomen angemessener und unangemessener *Kontextwechsel* als „boundary problem", d. h. als ein Problem der Grenzziehung (ebd., S. 3) und verweisen auf die Soziologen Basil Bernstein und Pierre Bourdieu, die beide behaupten, dass Kinder (und Erwachsene) verschiedener sozialer Schichten erhebliche Unterschiede aufweisen, wenn es darum geht, Grenzen zwischen Alltagswissen und speziellem („esoterischen") Wissen zu erkennen (ebd., S. 2f; vgl. auch Cooper & Dunne 1998).

Mit dem Vokabular des Soziologen Basil Bernstein lässt sich ein unangemessener Umgang mit dem Sachkontext realitätsbezogener Aufgaben als *Frage nach einer grundlegenden Orientierung* und entsprechender Auswahl von *Strategien* beim Bearbeiten realitätsbezogener Aufgaben formulieren (vgl. Kapitel 2 und 3). Seine Arbeiten geben weiter Hinweise auf mögliche milieuspezifische Gründe für entsprechende Orientierungen und resultierende Verhaltensmuster „unter Unsicherheit".

## 1.5 Feldbeobachtung

Vor dem Hintergrund der Frage nach der Entstehung sozialer Disparitäten im Schulkontext (im Allgemeinen) und milieuspezifischen Schwierigkeiten im Mathematikunterricht (im Besonderen) sollte eine „teilnehmende Beobachtung" im Mathematikunterricht eines städtischen „Brennpunkt"-Gymnasiums eine

Sensibilisierung für das „Feld“ schaffen – und so zur Konkretisierung der Forschungsfrage dieser Arbeit beitragen. Intention und Anlage der Feldstudie und einige Beobachtungen werden im Folgenden dargestellt (1.5.1 und 1.5.2). Der Versuch einer plausiblen Deutung dieser Beobachtungen (1.5.3) liefert in Auseinandersetzung mit der rezipierten Literatur (dargestellt in den Abschnitten 1.1 bis 1.4) die Motivation für die empirische und theoretische Fragestellung dieser Arbeit, die im nächsten Abschnitt (1.6) ausformuliert wird.

### 1.5.1 Fragestellung und Vorgehen

Mit dem zunächst unspezifizierten Forschungsfokus auf der Identifizierung möglicher kulturell verankerbarer Strategien von Schülerinnen und Schülern nichtprivilegierter Herkunft bzw. mit Migrationshintergrund wurde der Mathematikunterricht einer zehnten Gymnasialklasse (10a[21]) nach Ostern bis zum Ende des Schuljahres beobachtet, wobei die Zentralen Abschlussprüfungen (ZP 10) in den Beobachtungszeitraum fielen. Die Auswahl der „Brennpunkt“-Schule erfolgte bewusst: Der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit Migrationshintergrund an dieser Schule lag zum Zeitpunkt der Beobachtung deutlich über 70 Prozent, das Einzugsgebiet der Schule lässt auf ein mehrheitlich nichtprivilegiertes Herkunftsmilieu der Schülerschaft schließen.

Die Beobachtung orientierte sich an den Methoden der ethnologischen Feldforschung, insbesondere der „Erforschung“ des ausgewählten Feldes durch die *Teilnehmende Beobachtung* (Geertz 2003). Dabei ist es das Ziel, als Beobachtende mit möglichst großer Selbstverständlichkeit in das Feld einzutauchen, um dieses in – durch die eigene Anwesenheit – *möglichst* unverfälschter Weise studieren zu können.

Die Beobachtungen wurden in einer Art „Feldtagebuch“ notiert und reflektiert. Es wurde versucht, das Beschriebene zu *verstehen*, was methodisch das Kontextualisieren von Einzelfällen, das Herstellen von Zusammenhängen u. ä. beinhaltet. Die Reflexion der Notizen wiederum beeinflusste den Beobachtungsfokus und das eigene Rollenverhalten, strukturierte die systematische Kontaktaufnahme mit den Schülerinnen und Schülern und ermöglichte eine zunehmend zielgerichtete Datensammlung (Einsicht in Arbeitshefte, Schulaufgaben, Erzählungen der Lehrkraft, Beobachtungen außerhalb des Klassenkontextes mit entsprechendem Fokus u. ä.). Die Beobachtungsphase endete mit einer kontinuierlich erarbeiteten Deutung ausgewählter Aspekte der Beobachtung, orientiert an der Idee der „dichten Beschreibung“ (Geertz 2003). Zur Ausschärfung der Forschungsfrage dieser Arbeit wurde diese „Beschreibung“ mit einigen in der Literatur dokumentierten Ergebnissen kontrastiert.

21 Die Bezeichnung „10a“ ist fiktiv.

### 1.5.2 Beobachtungen

Die beobachtete Klasse des „Brennpunkt"-Gymnasiums bestand ausschließlich aus Schülerinnen und Schülern mit Migrationshintergrund, die nach Angaben des Klassenlehrers zu Hause eine andere Sprache als in der Schule sprachen. Zwischen Eltern, Lehrkräften, Mitarbeitern und den Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums wird – wie in vielen Schulen üblich – ein Schulvertrag ausgehandelt, in dem Eltern, Schülerinnen und Schüler, aber auch Lehrkräfte und Mitarbeitende das Einhalten grundlegender Verhaltens- und Umgangsregeln zusichern. Dazu gehört die respektvolle Behandlung aller Beteiligten, aber auch des Schulgebäudes. Weiter werden Pünktlichkeit, Freundlichkeit, kooperatives Verhalten, der Umgang mit Kritik usw. im Vertrag thematisiert. Bemerkenswert ist insbesondere die Passage über die Schulsprache: „Deutsch ist unsere gemeinsame Sprache. Um niemanden von Gesprächen auszuschließen, spreche ich während der Unterrichtszeit nur Deutsch. Schülerinnen und Schüler mit anderen Muttersprachen können außerdem ihre Deutschkenntnisse nur durch den ständigen Gebrauch verbessern."

*Ambitionen und Leistungsgrenzen*

Die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler der 10a achteten peinlich genau auf die Einhaltung des Vertrages: Wenn Mitschülerinnen oder Mitschüler im Mathematikunterricht störten wurden sie in der Regel von anderen zurechtgewiesen. Der Mathematiklehrer, dem die Schülerinnen und Schüler mit großem Respekt und auch großer Sympathie begegneten, musste kaum Zeit investieren, um beispielsweise um Ruhe zu bitten, zur Pünktlichkeit oder Aufmerksamkeit zu ermahnen o. ä. Auch außerhalb des Unterrichts war eine enorme und für eine zehnte Klasse wohl ungewöhnliche Orientierung an den vorgegebenen Regeln zu beobachten: Selbst nach Schulschluss auf dem Pausenhof konnte die Autorin mithören, wie Schülerinnen eine Mitschülerin ermahnten, doch Deutsch zu sprechen – und nicht etwa die von allen Anwesenden geteilte nichtdeutsche Muttersprache. Man könnte sagen: Die 10a erkannte, akzeptierte und realisierte Schule als einen *offiziellen Kontext* mit eigenen Regeln und verhielt sich – bewusst, bemüht und erfolgreich – danach.

Im Mathematikunterricht zeigten die Schülerinnen und Schüler der 10a einen deutlichen Lern- und Leistungswillen, der mit dem Fach, den anstehenden Zentralen Prüfungen, aber sicherlich auch mit der großen Sympathie für die Lehrkraft zu tun hatte: Die 10a war ausgesprochen fleißig – so fertigte beispielsweise eine türkischstämmmige Schülerin als Vorbereitung auf die Zentralen Abschlussprüfungen mit Hilfe der entsprechenden Schulbücher ein eigenes Lehrwerk über den Stoff der letzten Schuljahre(!) an. Auch das Angebot, samstags in die Schule zu kommen und dort in Gruppenarbeit Mathematikaufgaben als Vorbereitung zu bearbeiten, nahmen erstaunlich viele Schülerinnen und

Schüler an – relativ unabhängig davon, ob sie dies wirklich nötig hatten. Der Lehrer hatte jedoch – nicht nur in seiner Funktion als Mathematik- und Klassenlehrer – auch über den Unterricht und die Prüfungsvorbereitung hinausweisende wichtige Funktionen für die Klasse: Er kümmerte sich intensiv um Probleme und Sorgen der Jugendlichen, auch wenn sie nicht unmittelbar mit dem Unterricht zu tun hatten und wurde zu einer engen Bezugsperson.

Im eigentlichen, relativ lehrerzentrierten Fachunterricht, fiel neben der grundsätzlich hohen Leistungs- bzw. Lernbereitschaft auf, dass vor allem dann Probleme auftraten, wenn es nicht um das eher technische Lösen „traditioneller Rechenaufgaben“, sondern beispielsweise um das Entwickeln eigener (Text-) Aufgaben zu vorgegeben Inhalten (z. B. Trigonometrie) ging. In Einzelgesprächen zeigte sich außerdem, dass die Schülerinnen und Schüler zum Teil erstaunlich schlechte Größenvorstellungen hatten – oder ihre eigenen Vorstellungen und lebensweltlichen Erfahrungen einfach nicht einbringen wollten. Eine realitätsbezogene Aufgabe, in der Pflastersteine verlegt werden sollten, führte beispielsweise zu absurden Ergebnissen, da sich viele Schülerinnen und Schüler verrechneten und das Ergebnis einfach nicht validieren wollten oder konnten.[22]

*Kollektive Wahrnehmung und Ergebnisse der Zentralen Prüfungen*

Besonders interessant war die Haltung der Klasse in Bezug auf die Zentralen Prüfungen vor dem Hintergrund ihrer großen Leistungs- und Anpassungsbereitschaft: Die relativ schwachen Ergebnisse einer zentralen Lernstandserhebung im Vorjahr hatten für die Schüler wohl deutlich herausgestellt, dass sie (wie sie selbst sagten) „besonders schlecht“ wären. Sie signalisierten deutlich, dass sie als Kollektiv mit dem gemeinsamen Charakteristikum des Migrationshintergrundes und aufgrund der damit verbundenen Sprachhürden grundsätzlich nur „geringen Erfolg“ bei einer zentralen Überprüfung erwarteten. Die Klasse formulierte klar (schon bei der ersten Hospitation auffallend), dass sie in Bezug auf die Abschlussprüfungen davon ausgingen, dass sie „sowieso die Schlechten“ (auch im Vergleich mit der Parallelklasse, in der der „Ausländeranteil“ deutlich geringer war) wären. Die Jugendlichen bezogen sich also in dieser schulischen Situation auf eine Vorannahme, die über den Rahmen der „Schulsituation“ hinausgeht – und auf Strukturen verweist, die außerhalb des Schulkontextes zu suchen sind.

Die Durchführung der Zentralen Prüfungen war in dieser Klasse mit entsprechend viel Aufregung und Nervosität verbunden, die auch der Lehrer nicht

22 Es handelte sich um die Aufgabe „Offenes Pflaster“ aus: Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg., 2006). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen, Scriptor.

mehr beruhigen konnte – oder sogar dadurch verstärkte, dass er sehr transparent machte, dass die „zentrale“ Prüfung etwas anders wäre als der normale Unterricht und als „Kontext“ anders zu bewältigen wäre als die „gewohnte“ Situation einer Klassenarbeit. Letztendlich erzielte die Klasse 10a in den ZP 10 einen Schnitt, der eine ganze Note schlechter war als der Notendurchschnitt der verhältnismäßig entspannt ablaufenden Klassenarbeiten, die der Lehrer selbst stellte. Sicherlich war hierfür neben anderen Faktoren auch die Tatsache mitverantwortlich, dass die Abschlussprüfungen einen hohen Anspruch an den Umgang mit realitätsbezogenen Aufgaben hatten, die mitunter recht textlastig waren. Die Wahrnehmung der Klasse, dass die Prüfungsaufgaben schwer waren, wurde im Allgemeinen (in Nordrhein-Westfalen) überwiegend nicht geteilt.

### 1.5.3 Verdichtung und Deutung

Neben der starken „Regelgeleitetheit“ der Schülerinnen und Schüler erschien ihre intensive Wahrnehmung eines „Klassenkollektivs“ auffällig, die die Person des Lehrers gewissermaßen miteinbezog, während die Zentralen Prüfungen sozusagen als gemeinsamer externer Feind empfunden wurden. An diesen Stellen wurde eine Kluft zwischen der „offiziellen Praxis“ der Institution Schule und den „realen Lebenswelten“ der Schülerinnen und Schüler deutlich: Die Schule wurde dabei als Institution betrachtet, die u. a. durch den Schulvertrag auch eine recht konkrete Regulierung und Organisation erhielt. Diese Vorgaben waren transparent und explizit und daher leicht einzuhalten – sofern man dies wollte. Der Mathematikunterricht profitierte von der Bereitschaft der Schülerinnen und Schüler, sich der offiziellen Praxis mit ihren inhaltlichen und sozialen Regeln anzupassen und funktionierte effektiv bzw. verhältnismäßig störungsfrei. Der Lehrer war mit seiner Klasse „sozial“ und „fachlich“ zufrieden und bewertete ihr Verhalten positiv. Die Schülerinnen und Schüler erhielten normale bzw. gute Noten.

„Fachliche“ Probleme, sowohl im Unterricht als auch in den Prüfungen, traten gerade dort auf, wo nicht offiziell regulierte, alltagsweltliche Aspekte (z. B. Realitätsbezüge, überschlagendes Rechnen mit unsicheren Größen) im „offiziellen Kontext“ des Mathematikunterrichts auftauchten. Jedoch hatte die beobachtete 10. Klasse eher die Tendenz, den offiziellen bzw. den mathematischen Kontext *überzubetonen*, statt ihn zugunsten einer Auseinandersetzung mit dem Alltagskontext zu vernachlässigen. Nach den Ergebnissen der Studien von Cooper & Dunne (2000) u. a. wäre jedoch zu erwarten gewesen, dass die eher einem nichtprivilegierten Milieu zuordenbare Klasse in einer *unsicheren Kontextsituation* den „häuslichen Kontext“ überbetonen würde (1.4.5).

Insgesamt bewerteten die Schülerinnen und Schüler selbst ihre soziale Herkunft in Bezug auf den Schulkontext als problematisch. Sie erwarteten – als Kollektiv – von institutioneller Seite eine negative Rückmeldung in Form mangelnden Erfolges zumindest in den offiziellen Schulleistungstests. Ihre Erwartungshaltung beinhaltete hier Aspekte, die eindeutig über den Schulalltag hinausgehen und verwies auf Strukturen – nämlich ihren sozialen Hintergrund –, die außerhalb des Schulkontextes, in den häuslichen Lebenswelten, verortet waren. Sie erlebten oder vermuteten in ihrer familiären Struktur, d. h. in ihrem kulturellen oder ökonomischen Status eine Bildungsbarriere. Auf die Klassenarbeiten des Klassenlehrers bezog sich diese Problematik dagegen nicht (so stark): Hier schien die wahrgenommene „Kluft" zwischen dem lebensweltlichen und dem schulischen Kontext – womöglich durch den engen persönlichen Bezug zum und die Vermittlung durch den Lehrer – nicht so groß und/oder die wahrgenommene *Verunsicherung* nicht so ausgeprägt zu sein.

Die Ergebnisse der Arbeiten von Cooper (1998), Cooper & Dunne (1998, 2000) oder Verschaffel et al. (1994, 2000) bestätigten sich für die beobachtete Klasse also *nicht*: Die Jugendlichen der 10a sind nicht durch eine unangemessene Überbetonung des Sachkontextes bei Aufgaben aufgefallen, die eine lebensweltliche Thematik ansprechen. Vielmehr fiel auf, wie bemüht die Jugendlichen waren, ihren häuslichen und den schulischen Kontext zu trennen.

Die Frage, ob ihre dezidierte Wahrnehmung des jeweiligen Kontextes und die Auswahl einer entsprechenden Orientierung als Strategie betrachtet werden kann, die für den Bildungs*erfolg* der Schülerinnen und Schüler (denn schließlich besuchen sie ein Gymnasium) auch mit verantwortlich (gewesen) sein könnte, war zentral für die Entwicklung der Fragestellung und das weitere Vorgehen im Rahmen dieser Forschungsarbeit.

## 1.6 Entwicklung der Fragestellung

Die in den vorherigen Abschnitten dieser Arbeit dargestellten Ergebnisse lassen sich zu folgenden Annahmen zusammenfassen und zur konkreten Fragestellung dieser Arbeit entwickeln.

### 1.6.1 Zusammenfassung

Das charakteristische Merkmal realitätsbezogener Aufgaben besteht im bewussten Aufeinanderbeziehen mathematischer und lebensweltlicher Kontexte. Sie werden aus vielfältigen pädagogischen und didaktischen Gründen im Mathematikunterricht eingesetzt. Es sind jedoch auch spezifische Schwierigkeiten mit realitätsbezogenen Aufgaben verbunden: Neben sprachlichen Schwierigkeiten sind dies auch Schwierigkeiten, die den Sachkontext selbst betreffen und die Anforderung, die richtige „Grenze" zwischen dem mathematischen und lebensweltlichen Kontext zu finden.

Empirische Arbeiten geben Hinweise darauf, dass das Verhandeln der Kontextgrenzen Verunsicherung auf Seiten der Schülerinnen und Schüler verursachen kann und dass die Auflösung dieser Verunsicherung – und damit die unabdingbare Voraussetzung für eine erfolgreiche Bearbeitung – unterschiedlichen sozialen Gruppen unterschiedlich gut gelingt. Die Literatur dokumentiert insbesondere, dass Lernende aus nichtprivilegierten Milieus dabei zur „Überbetonung des häuslichen Kontextes“ neigen. Aus der Gegenüberstellung dieser Annahmen mit eigenen Beobachtungen der Schülerinnen und Schüler einer zehnten Klasse ergibt sich die folgende Hypothese:

Geht man davon aus, dass die Überbetonung des häuslichen Kontextes ein Phänomen bei (tendenziell leistungsschwachen) Schülerinnen und Schülern aus eher bildungsfernen Milieus darstellt, könnte das beobachtete Phänomen der „Überbetonung des offiziellen Kontextes“ in der 10a als eine Strategie gerade *bildungserfolgreicher* Schülerinnen und Schüler (nichtprivilegierter Herkunft) betrachtet werden, möglicherweise, um eine (stark) wahrgenommene Kluft zwischen der eigenen Lebenswelt und dem Schulkontext durch sorgfältige „Abgrenzung“ zu verhandeln. Eine vermeintliche *Überbrückung* dieser Kluft durch eine implizite Anbindung mathematischer Anforderungen an die abgegrenzte und „unterdrückte“ Alltagswelt wirft für diese Schülerinnen und Schüler demnach ungleich größere Schwierigkeiten auf und würde ihre Erfolgsstrategien in Frage stellen.

Wäre dies der Fall, dann würden gerade realitätsbezogene Aufgaben, die eigentlich – unter anderem – dazu dienen sollten, den Zugang zur Mathematik für Kinder und Jugendliche aus nichtprivilegierten Milieus durch das Überbrücken von „Passungsdifferenzen“ zu erleichtern (1.1.3 und 1.4.2), Gefahr laufen, durch ihre Realitätsbezüge ausgerechnet diejenigen Schülerinnen und Schüler zu benachteiligen, die sie eigentlich fördern wollten. Und: Es würden zudem Kinder in besonderer Weise benachteiligt werden, deren Schulbiographien *trotz* eines nichtprivilegierten Herkunftsmilieus bisher erfolgreich verlaufen sind.

Für diese Fragestellung erscheinen die bildungssoziologischen Studien von Bernstein und Bourdieu, die auch Cooper (1998) sowie Cooper & Dunne (1998, 2000) bemühen, als tragfähige theoretische Grundlagen. Sowohl Bernstein als auch Bourdieu haben Konzepte entwickelt, die den Zusammenhang zwischen kulturellen Unterschieden und ihren Konsequenzen innerhalb des Erziehungssystems thematisieren und darstellen. Das gemeinsame Argument beider ist, dass „gesellschaftlich untergeordneten“ Gruppen, d. h. also Kindern bzw. Jugendlichen aus nichtprivilegierten Milieus, der Zugang zu den kulturellen Ressourcen, welche die Schule verlangt, schwerer fällt und dass diese gleichzeitig den Lebensstil der dominanten sozialen Gruppen widerspiegeln (vgl. Cooper & Dunne 2000, Lerman 2014). Bourdieu versucht, dies mit seinem Konzept des Habitus zu begreifen, Bernstein mit seinem Konzept der Codes (s. nächstes Kapitel).

Im Folgenden werden nun die konkreten Leitfragen dieser Arbeit formuliert sowie ihr grundsätzliches theoretisches Anliegen.

### 1.6.2 Fragestellungen und Vorgehensweise

Intention dieser Arbeit ist es, theoretisch zu argumentieren und an einigen Beispielen zu zeigen, ob, wann und ggf. warum bestimmte Schülerinnen und Schüler (ggf. aus nichtprivilegierten sozialen Milieus) Kontexte realitätsbezogener Aufgaben angemessen verhandeln – oder nicht. Die erste Leitfrage lautet demnach:

*(1) Inwiefern lassen sich beim Lösen realitätsbezogener Aufgaben (milieu-) spezifische „Strategien" zur Kontextorientierung beobachten und wie könnte man sie beschreiben?*

Diese Frage bezieht sich auf die *Schülerinnen und Schüler* und ihr Verhalten in einer bezüglich des zu erkennenden Kontextes „unsicheren" Situation. Um sie zu beantworten, ist eine Auseinandersetzung mit Bearbeitungsprozessen von Schülerinnen und Schülern nötig. Dies geschieht im Kapitel 5 an ausgewählten Interviewsequenzen mit Schülerinnen und Schülern einer zehnten Klasse[23] des bereits erwähnten städtischen „Brennpunkt"-Gymnasiums.

Dabei muss auch der Übermittlungsgegenstand in den Blick genommen und das Konzept von „Legitimität" bzw. von „Angemessenheit" in geeigneter Weise hinterfragt werden:

*(2) Bei welchen Aufgaben ist die „Angemessenheit" der Antwort bezüglich der Berücksichtigung des Kontextes besonders schwierig zu erkennen und wie müsste eine Aufgabenanalyse operationalisiert sein, damit das Problem einer „angemessenen" Kontextorientierung theoretisch beschreibbar wird?*

Diese zweite Frage adressiert eine Analyse des *Gegenstandes* „realitätsbezogene Aufgaben" (in Kapitel 4). Dies kann wiederum nicht gelingen, ohne die Intention entsprechender Aufgabenstellungen zu reflektieren und damit auch den Prozess der Aufgabenentwicklung in den Blick zu nehmen.

Der folgende Versuch entsprechender Beschreibungen bzw. Analysen orientiert sich daher an den bereits erwähnten bildungssoziologischen Arbeiten *Basil Bernsteins*, die in der Lage sind, das gesamte Feld pädagogischer Diskurse in den Blick zu nehmen, und die, wie sich zeigen wird, theoretische Begriffe und Strukturen bereit halten, die sich für genau diese Fragestellungen als hilfreich erweisen (Kapitel 2 und 3).

In den formulierten Fragen sind im jeweils ersten Teil der Fragestellung die empirischen Felder benannt, die im Anschluss (Kapitel 4 und 5) betrachtet wer-

---

23 Dabei handelt es sich um dieselbe Schule, nicht aber um dieselbe zehnte Klasse, die in der vorausgegangenen Feldstudie (vgl. 1.5) beobachtet wurde.

den. Der jeweils zweite Teil der Frage zielt auf eine entsprechende Einordnung mit Hilfe der bernsteinschen Beschreibungssprache und gleichzeitig auf deren Weiterentwicklung. Primäres Ziel dieser Arbeit ist es damit *nicht*, die oben formulierten Fragen (abschließend) zu beantworten, sondern sie mit Hilfe einer bildungs- und wissenssoziologischen Annäherung theoretisch zu fassen und zu begründen und anhand dieses kleinen fachdidaktisch zugespitzten Ausschnitts für die Problematik der Reproduktion von Bildungs- bzw. Chancenungleichheit *durch* Schule zu sensibilisieren.

Mein theoretisches Anliegen ist vor diesem Hintergrund auch, den englischen Bildungssoziologen Basil Bernstein als einen Theoretiker vorzustellen, dessen Arbeiten durch die Verknüpfung mikro- und makrosoziologischer Dimensionen ein Begriffsinstrumentarium liefern, mit dem die integrierte Modellierung pädagogischer Prozesse in Unterricht und Schule sowie der Produktionsebene pädagogischer Diskurse schlüssig gelingen kann. Insbesondere sind Bernsteins Arbeiten in der Lage, im Hinblick auf den sozialen Hintergrund von Schülerinnen und Schüler differenzierende und selektive Wirkungen pädagogischer Prozesse aufzudecken und zu problematisieren. Dieses Potenzial der bernsteinschen Modelle für die (weitere) Forschung in der Mathematikdidaktik soll in der vorliegenden Arbeit an der beschriebenen Fragestellung vorgeführt werden. Dabei werden Bernsteins Modelle für den Mathematikunterricht interpretiert und adaptiert.

http://www.springer.com/978-3-658-13927-8

Kontextwechsel als implizite Hürden realitätsbezogener Aufgaben
Eine soziologische Perspektive auf Texte und Kontexte nach Basil Bernstein
Leufer, N.
2016, XII, 277 S. 9 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-13927-8