

Beobachtungen zur Beweisart in Euklids Elementen

In einem bestimmten Sinn, den ich gleich erläutern werde, ist der unter dem Namen Euklids überlieferte Text mit dem lapidaren Titel Ὑποδοχὴ στοιχείων – *Die Elemente* – das Grund- und Hauptbuch jenes europäischen Konzepts von Wissenschaft, in dessen Zentrum der folgende Gedanke steht: Wissen, das des Namens einer Wissenschaft würdig sein soll, muß beweisbares Wissen sein, *apodiktisches* Wissen also, wie wir nach dem griechischen Wort für einen Beweis – ἀποδείξις – zu sagen pflegen. Formuliert hatte dieses Konzept etwa ein halbes Jahrhundert vor Euklid kein Geringerer als Aristoteles im I. Buch seiner *Analytica posteriora*.¹ Die nachgerade magisch erscheinende Kraft, die ein Beweis auf das Gemüt einer Person auszuüben vermag, die ihn – den Beweis – verstanden hat, stellt kaum ein Text der europäischen Ideengeschichte seinerseits schlagender unter Beweis als die genannten *Elemente* Euklids. Das glaubten jedenfalls in der frühen Neuzeit – der Zeit zwischen Kopernikus und Newton – viele mehr oder weniger gelehrte Enthusiasten der Wissenschaften. Bezeichnend für die hohe Wertschätzung des Euklid in jener Zeit ist eine Thomas Hobbes betreffende Anekdote, die John Aubrey, eine Art Klatschkolumnist der Gelehrtenwelt im England des 17. Jahrhunderts, in seinen *Brief Lives* (1669-96) kolportiert hat:

»Der Geometrie wandte er [*scil.*, Hobbes] sich nicht vor dem 40ten Lebensjahr zu: das geschah durch Zufall. Als er sich in eines Gentlemans Bibliothek aufhielt, lagen da aufgeschlagen Euklids *Elements*, und zwar 47 *El. libri* 1. Er las die Proposition. *Bey G—*, sagte er (dann & wann pflog er, *qua emphasis*, vehement zu fluchen), *das ist unmöglich!* Also liest er die Beweisführung, die ihn zu einer Proposition zurückführte. Welchselbige er las. Dies leitete ihn zu einer weiteren zurück, die er gleichfalls las. *Et sic deinceps*, so daß er zuletzt von jener Wahrheit *qua demonstratione* überzeuget ward. Also verliebte er sich in die Geometrie.« (Aubrey 1994, 185, [1])

¹ Ich kann es nicht kürzer und schon gar nicht besser sagen als Barnes 1975 [2], xi: »What Euclid later did, haltingly, for geometry, Aristotle wanted done for every branch of human knowledge. The sciences are to be axiomatized: that is to say, the body of truth that each defines is to be exhibited as a sequence of theorems inferred from a few basic postulates or axioms.«

Der §47 im I. Buch der *Elemente* enthält übrigens just den Lehrsatz, den man gemeinhin als den »Satz des Pythagoras« bezeichnet. Das wirft ein seltsames Licht entweder auf Hobbes oder auf Aubrey. Konnte es wirklich sein, daß ein 40 Jahre alter Gelehrter, der immerhin bereits dem Lordkanzler Francis Bacon bei der Herstellung der lateinischen Fassung seiner Schriften zur Hand gegangen war, über den »Satz des Pythagoras« wie ein kleines Kind staunte, weil er in seiner Ausbildung davon noch nie gehört hatte? Oder hat Aubrey sich hier einen subtilen Scherz auf Hobbes' Kosten erlaubt. Möglich ist indes auch, daß Aubrey derjenige war, der es zuvor nicht besser wußte und sein eigenes kindliches Erstaunen auf einen ungleich berühmteren Zeitgenossen projiziert hat. Was nun wirklich der Fall war, wir wissen es nicht.

Wir wissen jedoch, daß in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts im Rahmen der *postum* veranstalteten Ausgabe seiner nachgelassenen Werke eine *Ethica ordine geometrico demonstrata* erschienen ist, die einen fast ebenso großen Skandal machte wie Hobbes' berühmte *Leviathan*. Ich spreche von der *Ethik* des Niederländers Baruch Spinoza. Diese beiden – Spinoza und Hobbes – standen bei Frommen und Frömmern aller Konfessionen unter dem Verdacht, heimlich Atheisten zu sein. Das war aber nur ein kleiner Teil, höchstens ein Drittel, des Skandals. Ein zweiter Teil des Ärgernisses bestand darin, daß man ihnen dies dem Wortlaut ihrer Schriften nach nicht ohne weiteres nachweisen konnte, weil beide sich einer ostentativ theistischen Rhetorik bedienten. Komplettiert wurde der Skandal im Falle Spinozas dann – drittens – dadurch, daß er seine *Ethik* in der Tat exakt so aufgebaut hatte, wie die *Elemente* Euklids aufgebaut waren: Jedem ihrer fünf Teile waren *ordine geometrico* Definitionen, Axiome und Postulate vorangestellt, und die eigentliche Argumentation wurde in einer Folge numerierter Theoreme, Lemmata und Korollare präsentiert, deren jedes mit einem *prima facie* schlüssigen Beweis versehen war. Unangreifbar war diese Argumentation deshalb naturgemäß nicht. Aber sie anzugreifen, den maskierten Atheisten zu entlarven, war ungleich lästiger, als es gewesen wäre, wenn der Gegner sich nicht mit diesem Panzer gerüstet gehabt hätte.

Selbstverständlich haben seine Gegner den Vorwurf erhoben, der *ordo geometricus* Spinozas sei ein bloß äußerliches Nachäffen der Ordnung in Euklids *Elementen* und weit davon entfernt, dieselbe Überzeugungskraft zu entfalten wie diese, und das deshalb, weil die zugrundegelegten Definitionen, Axiome und Postulate anders als bei Euklid eben nicht *per se nota*, also nicht selbstverständlich seien, sondern willkürlich aufgestellt, mit Zweideutigkeiten gespickt und so weiter und so fort. Der Vorbildcharakter, den der *ordo geometricus* für ein wahrhaft wissenschaftliches Vorgehen hatte, sollte durch die freche Usurpation der zugehörigen Darstellungsart in dieser *Ethik* nicht im mindesten angetastet werden. Im Gegenteil, der *ordo* oder *mos geometricus* war und blieb das weithin akzeptierte Paradigma der Wissenschaftlichkeit auch jenseits einer nicht eigentlich geometrisch oder mathematisch bestimmten Thematik. Wenn zu Beginn des 18. Jahrhunderts Christian Wolff – auch er übrigens ein scharfer Kritiker Spinozas, obwohl oder gerade weil er zeitweilig verdächtigt wurde, selber Spinozist zu sein – wenn dieser nachmals so »berühmte Wolff«, wie Kant ihn meist zu nennen pflegt, im Untertitel eines seiner zahlreichen Werke etwas ausdrücklich als *methodo scientifica pertractatum* annoncierte, dann stieß man auf einen Text, der ähnlich

gegliedert und eingeteilt war wie Spinozas *Ethik*, ohne daß man dies vom Gegenstand her ebenso hätte erwarten dürfen, wie etwa im Fall von Newtons *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Man kannte Euklid auch im Mittelalter, zumindest dem Namen nach. So trifft Dante ganz am Anfang seiner in der *Göttlichen Komödie* geschilderten Jenseitsreise neben vielen anderen Ungetauften im *limbo* auch auf »Euclide geomètra« (Inf. IV.142). Nicht immer konnten frühneuzeitliche Humanisten es indes vermeiden, diesen mit dem Plato-Schüler Euklid von Megara zu verwechseln. Dem letzteren hat auch Pierre Bayle in seinem berühmten *Dictionnaire historique et critique* ([3], 1720, 1123 ff.) einen kürzeren Artikel gewidmet, aber nicht »unserem« Euklid, dem Geometer, über den es am Schluß des Artikels zu Euklid von Megara lediglich heißt: »Je renvoie au Supplément Euclide le Géometre«. (Ebd. 1125) Zu diesem *Supplément* ist es nur nie gekommen. Immerhin hat Bayle die beiden Euklide nicht verwechselt.

In welchem Sinn die *Elemente* Euklids als das Grund- und Hauptbuch eines europäischen Konzepts der Wissenschaft und der Wissenschaftlichkeit angesprochen werden können, habe ich durch diese rhapsodisch aufgesammelten ideengeschichtlichen Splitter – das war zumindest meine Absicht – zumindest angedeutet: Der mit viel Glück auf uns gekommene Text der *Elemente* – vergleichbare antike Texte, die es mit einiger Sicherheit gegeben haben dürfte, sind verschollen – wurde zu einem unverzichtbaren Requisit jener europäischen Großerzählung, nach der die Entwicklung der modernen Wissenschaften mit einer Rückbesinnung auf das begonnen habe, was in der Antike an wissenschaftlichem Wissen schon einmal vorhanden gewesen sei. So wurde der *ordo* oder *mos geometricus*, paradigmatisch verwirklicht in den *Elementen*, zum *methodus scientifica* schlechthin – jedenfalls für die Mandarine der Aufklärung. »Hat man je einen Geometer sich ›Euklidisten‹ nennen hören?« so fragte Voltaire ([10], M XXIII 517) in seiner *Éloge* auf die Newton-Übersetzerin Emilie du Chatelet. Das war eine gegen Platonisten, Aristoteliker, Cartesianer und andere Vertreter einer Schule gerichtete Spitze. Um jeden Zweifel auszuschließen, wie diese gemeint war, fügte Voltaire grimmig hinzu: »c'est le privilège de l'erreur de donner son nom à une secte.« Gerade weil das vorbildliche Werk Euklids einen direkten Weg zur Wahrheit weist – so darf man Voltaires *Aperçu* paraphrasieren –, ist es kontraindiziert, die konkrete Person als Autorität zu bemühen.

So weit, so gut. Aber wie wird in den *Elementen* bewiesen und vor allem was wird dort so bewiesen, wie es bewiesen wird? Kann das wirklich das Paradigma für die Präsentationsform eines jeden Wissens sein, das als Wissenschaft soll auftreten können?

Zweifel können einen schon deshalb beschleichen, weil der Einwand der Spinoza-Kritiker, dieser habe die literarische Form der *Elemente* nur äußerlich »nachgeäfft«, in einer Hinsicht nicht von der Hand zu weisen ist. Es fehlt in Spinozas *Ethik* wie auch in den, verschiedenen Branchen der Philosophie gewidmeten, Werken Wolffs, die ebenso arrangiert sind, an der Anschauung, die den Anfängen oder »Prinzipien« der Beweise in den *Elementen* ihre überwältigende Überzeugungskraft verschafft. Es gibt in diesen axiomatisch-deduktiv

angelegten Texten, obwohl es an vorgeblichen Beweisen in ihnen nicht fehlt, selten oder nie das, was der Leser der *Elemente* niemals – ich betone niemals – vermissen muß: Konstruktionsgeschichten, wie ich diese Teile des Textes von Euklid mit Martin Lemke ([8], 2015, 86 ff.) nennen möchte.

Die in den Handschriften in unterschiedlicher Zahl und Art überlieferten Skizzen oder Zeichnungen helfen, diese Konstruktionsgeschichten zu verstehen. Sie sind aber in dem Sinne keine unentbehrlichen Bestandteile der Argumentation, als es leicht ist, die Skizzen oder Zeichnungen nach den Angaben in der Konstruktionsgeschichte wiederherzustellen. In einem anderen Sinne sind die Zeichnungen allerdings durchaus kein überflüssiger Zierat, weil es keine Konstruktionsgeschichte gibt, die nicht in eine Skizze umsetzbar wäre, und die Konstruktionsgeschichten selbst nicht nur unentbehrlich, sondern das entscheidende Beweismittel in den *Elementen* sind. Das ist in mehr als einer Hinsicht bemerkenswert. Die eine Hinsicht betrifft das Bild, das wir uns vom Beweisen schlechthin zu machen haben. Die andere tangiert ein notorisches Problem weniger der Mathematik (und der Mathematiker) als vielmehr der Philosophie der Mathematik. Ich will es vorläufig etwas blaß als ›das Anwendungsproblem‹ etikettieren, um später darauf zurückzukommen.

Wer die aus den *Elementen* bekannte Gliederung in Definitionen, Axiome, Postulate, Theoreme, Lemmata und Korollare zu übernehmen oder zu imitieren beabsichtigt, sollte sich in Acht nehmen, wenn es nicht anschaulich gegebene Größen sind, über die etwas bewiesen werden soll. Das hätten Spinoza und Wolff unter anderem von einem Geometer lernen können, der auch als Philosoph von sich reden gemacht hat: von René Descartes, dessen bis heute unumstrittenster Beitrag zur Wissenschaftsgeschichte zweifellos die Entdeckung bzw. Erfindung der Analytischen Geometrie ist oder, wie ich vielleicht besser sagen sollte, die von ihm in seiner 1637 publizierte *Géométrie* mit fast provozierend zu nennender Beiläufigkeit praktizierte Vereinigung von Geometrie und Algebra. Im höchsten Maße umstritten war dagegen schon zu seiner Zeit das, was man seine »Metaphysik« oder »Erste Philosophie« nennen kann.

In einem Paratext zu seinen *Meditationen* über ebendiese Erste Philosophie hat Descartes, etwas widerwillig einer Anregung seines Freundes Marin Mersenne folgend, die von ihm bemühten Beweisgründe für die Existenz Gottes sowie für die reale Unterscheidung der Seele vom Körper auch noch einmal »*more geometrico*« ([5], AT VII 160) angeordnet. Seine ganze Metaphysik läßt sich nach dieser Darstellung in vier Theoremen und einem Korollar zusammenfassen. Drei der Theoreme handeln davon, daß und wie die Existenz Gottes zu erkennen ist, was dieselbe Anzahl von Gottesbeweisen ergibt. Das vierte verkündet den nachmals so berühmten Substanzdualismus: »Geist und Körper unterscheiden sich real voneinander.« ([5], AT VII 169) Das Korollar, das aus den vorangestellten Gottesbeweisen unmittelbar folgen soll, enthält – wiederum beiläufig – auch das, was man den »Hauptsatz der Cartesischen Erkenntnistheologie« nennen kann, d. i. die allgemeine Feststellung, alles, was wir klar und deutlich erfassen, könne Gott so schaffen, als was wir es auf diese Weise erfassen.

Die Prämissen, auf die Descartes sich für die zugehörigen Beweise angewiesen sah, verteilen sich auf 10 Definitionen, 7 Postulate und 10 Axiome. Daß Postulate und Axiome *Forderungen* enthalten, steht ihnen gleichsam auf die Stirn geschrieben. Für Definitionen gilt das ebenso. Indem sie nämlich für gewisse Kennzeichnungen als abkürzende Redeweise einen Ausdruck ins Spiel bringen, beanspruchen sie zumindest die mögliche Existenz dessen, worauf dieser Ausdruck sich beziehen soll, und fordern so die Akzeptabilität gewisser Sätze. In den letzten Prämissen, die Descartes in dieser Darstellung explizit nennt, haben wir folglich mindestens 27 Sätze vor uns, deren Wahrheit oder Akzeptanz zunächst nur gefordert ist.

Seit Aristoteles' Zeiten sagte man zwar, solche nicht beweisbaren Sätze am Anfang (lat. *principium*) einer axiomatisch-deduktiv aufgebauten Theorie müßten eines Beweises eben auch nicht bedürftig sein. Was genau dann der Fall ist, wenn sie selbst evident sind. Der Anspruch, ihnen zuzustimmen, ist in diesem Fall eine Forderung, die niemand zurückweisen kann und deshalb auch nicht zurückweisen wird. Doch darüber, ob derartige Forderungen sich wegen der unterstellten Evidenz des Geforderten tatsächlich nicht zurückweisen lassen, entscheiden stets die, an die sie gerichtet sind. Das wußte Descartes nur zu gut. In der Geometrie, meinte er, würden die für einen Beweis der Theoreme vorauszusetzenden Grundbegriffe (*»primae notiones, quae ad res Geometricas demonstrandas praesupponuntur«*) wegen ihrer anschaulichen Evidenz von jedermann leicht zugestanden (*»cum sensuum usu convenientes, facile a quibuslibet admittantur«*, [5], AT VII 156). In der Metaphysik, mußte er (ebd. 157) hinzufügen, sei das ganz anders. Hier seien es gerade die Grundbegriffe und -voraussetzungen, in seiner Sprache die *»primae notiones«* (frz. *»premières notions«*, [5], AT IX-1 122), die von widerspruchslüsternden Zeitgenossen nur zu leicht bestritten werden könnten (*»facile a contradicendi cupidis negari possent«*), wenn sie diesen ohne Vorbereitung isoliert präsentiert würden (*»si solae ponerentur«*, [5], AT VII 157). Aus diesem Grunde, so heißt es im Kontext, halte er gar nicht viel davon, die in der Geometrie sehr bewährte *»synthetische«*, d. h. axiomatisch-deduktive Beweisart auf die Metaphysik zu übertragen. Deren Gegenstände verlangten ein *»analytisches«* Vorgehen, welches darlege, wie methodisch das Verständnis zu erwerben sei, das einem die Zustimmung zu jenen Grundbegriffen und -voraussetzungen ermögliche. Wie Descartes glaubte, diesen Ratschlag selber befolgt zu haben, braucht uns hier nicht zu beschäftigen. Es spottet – unter uns gesagt – jeder Beschreibung (vgl. [9], Schütt 2009, 167 f.), aber Spinoza, Christian Wolff und andere Protagonisten des *mos geometricus* außerhalb der Geometrie hätten gut daran getan, den Ratschlag zu beherzigen.

Ob Descartes die *Elemente* Euklids genauer in Augenschein genommen hat, weiß ich, offen gestanden, nicht. Aber das mag immerhin sein. Auf dem Jesuitenkolleg in La Flèche, das er nicht zuletzt wegen der guten und avancierten mathematischen Ausbildung dort als erwachsener Mann gelegentlich (z.B. [5], AT VI 5) unaufgefordert gepriesen hat, könnten Auszüge daraus ein Gegenstand des Unterrichts gewesen sein. Wie dem auch sei. Sein Hinweis auf die anschauliche Evidenz der Beweisanfänge in der Geometrie wird eindrucksvoll bestätigt durch die Rolle, die den Konstruktionsgeschichten in Euklids *Elementen* zukommt.

Es mag verwunderlich klingen, mit Lemke von *Konstruktionsgeschichten* zu sprechen statt von *Konstruktionsanweisungen* oder *-vorschriften*. Die letzteren Ausdrücke klingen nicht so »historisch« oder, um einen modisch gewordenen Ausdruck zu gebrauchen, nicht so »narrativ« wie das Wort »Geschichten«. Aber groß ist der Unterschied schwerlich. Anweisungen oder Vorschriften sollen schließlich befolgt werden; und die Beschreibung ihrer Ausführung hat ganz von selbst wieder die Form einer Geschichte, zumal dann, wenn es sich um mehrere Anweisungen oder Vorschriften handelt, die nacheinander auszuführen sind. Da können wir ebenso gut gleich von *Konstruktionsgeschichten* sprechen. Was am Ende der Geschichte dasteht und zu sehen ist, wird dann zum Abschluß des Beweises in seinen Eigenschaften beschrieben, und zwar so, daß für jede Zuschreibung einer Eigenschaft an einen Teil der Konstruktion oder einer Relation an mehrere solcher Teile eine Rechtfertigung im Rekurs auf bereits Bewiesenes gegeben wird. Das Bemerkenswerte an einer solchen Konstruktionsgeschichte samt der sie abschließenden Beschreibung ist, daß sie auf gleichsam natürliche Weise in einer tempusspezifischen Sprache ausgedrückt wird – Griechisch im Falle Euklids. Das ist wie das Deutsch oder Englisch, dessen wir uns bedienen, eine Sprache, in der einem die *tempora verbi* (Präsens, Präteritum und Futur) zu Gebote stehen. Das gilt für jene Formelsprachen, die man nicht zu Unrecht für das adäquate Ausdrucksmittel der Mathematik halten kann, gerade nicht. Die fast universelle Hintergrundsprache der modernen Mathematik ist ein mengentheoretisches Idiom, dessen basale Konstante die Relation der Elementarschaft ist, ausgedrückt durch den zweistelligen Prädikator $\dots \in \dots$. Das Bestehen oder Nichtbestehen dieser Relation zwischen zwei mathematischen Objekten nach Präsens, Präteritum oder Futur konjugieren zu wollen, ist im Rahmen der Mengentheorie schlechterdings sinnlos. Von einer und derselben Menge zu sprechen, die gestern jene, heute aber diese und morgen vielleicht gar keine Elemente enthält, widerspräche dem Extensionalitätsaxiom, das in keiner klassischen Version einer Mengentheorie entbehrlich ist. Wenn die Platonische oder platonistische Vision unveränderlicher Objekte des reinen Denkens *alias* Ideen überhaupt irgendwo exemplifiziert ist, dann zu allererst im Reich der mathematischen Entitäten.

Wenn wir indes die *Konstruktionsgeschichten* in Euklids *Elementen* beim Wort nehmen, verhält es sich dort anders. Die Teile der dort angesprochenen Konstruktionen sind keine unveränderlichen von Ewigkeit zu Ewigkeit existierenden idealen Gebilde platonischer Provenienz, sondern z. B. die sich verändernde Linie AB, auf die von einem außerhalb ihrer liegenden Punkt C das Lot gefällt worden ist, weil – verkürzend gesprochen – die Mittelsenkrechte einer zwischenzeitlich konstruierten Strecke, die als Teil von AB hinzugekommen ist, diese Linie in einem ebenso erst später hinzugekommenen Punkt M schneidet. Diese sich verändernde Linie AB ist zwar noch dieselbe Linie wie zuvor, aber sie hat im Verlauf gleichsam neue Eigenschaften erworben, die sie zuvor noch nicht hatte. Ist diese Beschreibung dessen, wovon in Euklids *Elementen* die Rede ist, ernst zu nehmen, oder aber misst sie nur auf eine unangemessene naive Weise gewissen Äußerlichkeiten der Darstellung eine Bedeutung bei, die mit dem »eigentlichen« mathematischen Gehalt gar nichts zu tun hat?

A-propos »eigentlich«. Wenn man den »narrativen« Charakter der *Konstruktionsgeschichten* in Euklids *Elementen* ernst nimmt, sollte man sich, wie Lemke ([8], 2015, 91 ff.) eine weitere

Frage stellen: Welchen Status haben darin eigentlich die Großbuchstaben α , β , γ usw. oder endliche Folgen von solchen wie $\alpha\beta$ oder $\alpha\Delta\Theta$? Irgendwie nimmt der Text mit ihnen Bezug auf Punkte, Linien, Winkel, Kreise usw. Aber wie tut er das? Sind sie nicht wie Variablen zu verstehen, die innerhalb eines Beweiskontextes allein den anaphorischen Bezug zu sichern haben? So kann man den Gebrauch der Großbuchstaben in Aristoteles' Syllogistik deuten. In der Tat darf man diesen dafür preisen, daß er den Gebrauch von Variablen (in seinem Fall für Terme) und damit die formale Logik gleichsam erfunden hat. Im Kontext der Aristotelischen Syllogistik bereitet es auch keine Schwierigkeiten, sich ihren Gebrauch universell quantifiziert zu denken. Denn ein schlüssiger Modus liefert eben für alle zulässigen uniformen Substitutionen von Termen für die Buchstaben α , β und γ einen (gültigen) Syllogismus. Ist das nicht ebenso in Euklids *Elementen*? Die Bestandstücke seiner Konstruktionen sind in der jeweiligen Art mit den gegebenen Eigenschaften und Relationen frei gewählt – »beliebig, aber fest«, wie es im Jargon der Mathematiker heißt –, und am Ende der Argumentation darf man, weil die Restriktionen für die prädikatenlogische Schlußregel der *Universellen Generalisierung* eingehalten wurden, diese verallgemeinern zu einer Aussage über alle derartigen Objekte – sagen wir: über alle rechtwinkligen Dreiecke und die Quadrate über deren Katheten und Hypotenusen.

Nur redet Euklid bzw. sein Text so gerade nicht. Nimmt man wie Lemke die Form der Konstruktionsgeschichten ernst, liegt es viel näher, diese Buchstaben gerade nicht als Variablen anzusehen, sondern als eine Art von Namen, und zwar von Namen für die Teile der Konstruktion, die sozusagen nachzuspielen hat, wer der als Beweis angebotenen Konstruktionsgeschichte folgt. Aber das hieße ja, daß der Text sich gar nicht auf ideale geometrische Objekte bezöge, sondern auf konkrete erfahrbare Objekte der Erfahrungswelt, die den Beschreibungen in den bewiesenen Theoremen nur in einem für gewisse Zwecke hinreichenden Maß entsprechen! Angesichts dessen hätte »der göttliche Plato« sich bekreuzigt, wenn ihm dies als Zeichen des Entsetzens bereits verfügbar gewesen wäre (wie wohl Heinrich Scholz gesagt hätte). Jedenfalls war es für ihn und ist es für Platonisten eine Horrorvorstellung, geometrische Theoreme auf Objekte der Erfahrungswelt zu beziehen, womöglich gar auf die Zeichnungen in Ausführung der Konstruktionsvorschriften.

Damit bin ich schon bei der zweiten Hinsicht, die ich vorhin erwähnte, und dem vorläufig so genannten Anwendungsproblem. Der Platonismus in der Philosophie der Mathematik – und darunter verstehe ich wie üblich die Auffassung, daß mathematische Theoreme auf eigene, jenseits der Erfahrungswelt zeitlos existierende Objekte, die *mathēmatiká* der Griechen, zu beziehen sind –, dieser Platonismus hat seinen Preis. Er besteht nicht darin, daß es einem irgendwie unkeusch vorkommen kann, die Existenz solcher Objekte einfach zu unterstellen. Denn in dem Raum und der Zeit, worin wir uns selber und unsere Erfahrungen situieren, sind die atemporal beschriebenen und zu beschreibenden *mathēmatiká* nicht unterzubringen. Ihrer bloßen Existenz müßte das freilich noch nicht abträglich sein. Vielleicht existiert es sich ja außerhalb dieses Raumes und dieser Zeit durchaus weniger prekär als innerhalb derselben. Problematisch muß darum aufgrund ihrer statischen »Natur« gar nicht die Existenz der *mathēmatiká* sein, problematisch (und entsprechend »unkeusch«) ist aber sehr wohl, wie wir, Bewohner dieses Raumes und dieser Zeit, mit ihnen sollten den »Kontakt« auf-

nehmen können, dessen es bedarf, um von ihnen Kenntnis und Wissen zu erlangen. Wenn der Erwerb, der Besitz und die Kontrolle von Wissen nur insoweit plausibel erklärbar ist, wie man sich auf das Bestehen gewisser kausaler Beziehungen zwischen wissenden Personen und gewußten Konstellationen verlassen kann, dann ist es um eine plausible Erklärbarkeit mathematischen Wissens – Beweise hin, Axiome her – schlecht bestellt, zu schlecht, um damit zufrieden sein zu können.

Die Mathematik ist nicht irgendeine Wissenschaft, sie ist spätestens seit der frühen Neuzeit die »Königin der Wissenschaften«. Nicht zufällig wollte Leibniz die Mathematik in der (von ihm nur ausnahmsweise gebrauchten) deutschen Sprache »Wißkunst« genannt haben, was einer befriedigenden Lehnübersetzung des griechischen »mathēmatikḗ téchnē« ziemlich nahe kommt. Und: *per mathematicas scimus si quid scimus*. So lautete ein Gemeinpruch dieser Zeit. Darum ist es schlecht angängig, daß gerade mathematisches Wissen ein nicht plausibel erklärbares Phänomen sein sollte. Ebenso wenig plausibel erklärbar ist unter platonistischen Prämissen die Anwendbarkeit mathematischer Einsichten auf die Erfahrungswelt, im besonderen die Anwendbarkeit der Euklidschen Geometrie auf die irdischen Probleme der Landvermessung und der Raumgestaltung, die zu lösen sie ihrem Namen nach ja wohl einmal gedacht war.

Was nun die Lesart der Beweise in den *Elementen* Euklids, die Martin Lemke in seiner nun schon mehrfach erwähnten Arbeit detailliert und mit der größtmöglichen Präzision ausgeführt hat, angesichts dessen verspricht, das ist das Folgende: Vielleicht war der historische Euklid gerade kein Platonist. Vielleicht hat er sich um das von gewissen Personen in Platons Dialogen ausgesprochene Verdikt, daß es doch lächerlich wäre, geometrische Einsicht auf Zeichnungen oder gar Figuren im Sand zu beziehen, einfach nicht gekümmert. Vielleicht ging es ihm darum, seine Theoreme von vornherein auf mögliche Anwendungen zu beziehen, und zwar durch die Konstruktionsgeschichten, mit denen ein jeder seiner Beweise anhebt, die in den viel geschmähten Zeichnungen so etwas wie eine primäre und besonders leicht auszuführende Anwendung finden.

Wie erhellend Lemkes *Variationen über ein Thema von Euklid* auch in scheinbar nebensächlichen Einzelheiten sind, will ich kurz an einem Beispiel erläutern. Die erste Definition im I. Buch der *Elemente* bestimmt einen Punkt bekanntlich als das, »was keine Teile hat (hoû méros outhén)«. In der Regel zieht das *Definiens* alle Aufmerksamkeit auf sich, und zwar eine kritische, weil man naturgemäß geltend machen kann, wie unbestimmt oder vage doch der Terminus »Teil (méros)« sei. Bemerkenswert ist aber auch, durch welchen griechischen Ausdruck hier das *Definiendum* eingeführt wird. Ein geläufiges griechisches Wort, das mit »Punkt« übersetzbar ist und das auch in geometrischen Kontexten gelegentlich gebraucht wird, ist »stigmḗ« (uns vertraut durch das Fremdwort »Stigma«). Aber dieses Wort gebraucht Euklid in seiner ersten Definition gerade nicht, seine Bezeichnung für den zu Anfang seines Werks definierten Punkt ist »sêmeion«, und das ist anderswo ein Wort für Zeichen (uns vertraut durch Fremdwörter wie »Semiotik«). Lemke ([8], 2015, 219 ff.) schlägt vor, den

Euklidischen Terminus im Sinne von ›Markierung‹ zu verstehen und, derart verstanden, bekommt die Erklärung, dergleichen habe keine Teile einen sehr handgreiflichen und gar nicht erläuterungsbedürftigen Sinn, der sich übrigens gut auf die bei Euklid folgende Definition der Linie (grámmē) als »Länge ohne Breite« übertragen läßt.

Abschließend noch etwas zu unserem Bild vom Beweisen schlechthin. Beweise sind schlüssige Argumente, die zwei zusätzlichen Bedingungen genügen müssen: Ihre Prämissen sind (i) garantiert wahr und (ii) »leichter erkennbar« als ihre Konklusionen. Das sagt Aristoteles, der auch als der erste formale Logiker in unserer Tradition vorgemacht hat, wie man durch letztlich kombinatorische Betrachtungen zum Aufbau einer künstlich reduzierten, eben formalisierten Sprache erfolgreich versuchen kann, sich eine vollständige systematische Übersicht über alle schlüssigen Argumentformen eines bestimmten Typs zu verschaffen. Pedantische Schulmeister haben aus seiner Syllogistik später eine Art von Folterinstrument für Studierende gemacht. Aber Strafe muß sein, und die Strafe für die logischen Zuchtmeister, die den Geist, wie Goethes Mephistopheles so treffend sagt, in »spanische Stiefel« einzuschnüren belieben, waren die ausgemacht schlechten Beziehungen zwischen Logikern und Mathematikern. Denn die interessanteren der in arithmetischen oder geometrischen Beweisen mit Erfolg und Überzeugungskraft gebrauchten Schlußweisen konnte die auf Aristoteles zurückgehende Syllogistik gerade nicht formalisieren, weil in ihr kein rechter Platz für Relationsterme war. Die im *Collegium logicum* der Universitäten gelehrt Logik zog daher vor allem den beißenden Spott der Mathematiker auf sich. Auch dafür wäre Descartes ein Beispiel; und noch nicht einmal Leibniz sollte es gelingen, die Fesseln der Aristotelischen Syllogistik zu sprengen. Das gelang erst 1879 dem Jenaer *Extraordinarius* für Mathematik Gottlob Frege mit seiner »Begriffsschrift«. Die an ihn anknüpfende moderne mathematische Logik ist imstande, prinzipiell alle mathematischen Schlußweisen zu formalisieren. Die daraus entstandene Allianz zwischen Logik und Mathematik, die zweifellos zu den größten Fortschritten in der Ideengeschichte gehört, hat freilich eine dunkle Seite. Sie befördert eine Tendenz zur Algorithmisierung und wirkt gelegentlich so wie ein Bündnis zur Ausschaltung der anschaulichen Basis aller mathematischen Einsichten, die zugleich eine Versicherung ihrer Anwendbarkeit auf Sachverhalte der Erfahrungswelt ist. Desto bemerkenswerter, daß Descartes, dieser Erzfeind der aristotelischen Logik, der durch seine Vereinigung von Algebra und Geometrie zur Entwicklungsgeschichte der modernen Mathematik nicht wenig beigetragen hat, einen Blick dafür hatte, wie gut es ist, wenn den *primae notiones* einer Theorie, ihren Axiomen, eine sinnliche Anschauung zur Seite steht. Auf ihn geht übrigens auch unser Gebrauch der Termini ›reell‹ und ›imaginär‹ zurück, der Schülern bis heute einen an sich unbegründeten Respekt vor den komplexen Zahlen einflößt. Die Wurzel einer algebraischen Gleichung wie $x^2 + 1 = 0$ nannte Descartes ›imaginaire‹, weil er für solche Wurzeln keine solche anschauliche Deutung kannte wie für die von ihm ›réelles‹ genannten Wurzeln: nämlich die Deutung als endliche Teilstrecken des Zahlenstrahls. Hätte er die Gauß'sche Zahlenebene sowie die geometrische also anschauliche Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen schon gekannt, dann hätte er diese Wurzeln für ebenso wirkliche (d. h. ja ›réelles‹) gehalten wie die anderen.

Referenzen

- [1] Aubrey, John: Mr John Aubrey's, Esq. Lebens-Entwürfe. Dt. von Wolfgang Schlüter, Frankfurt am Main 1994
- [2] Barnes, Jonathan: Introduction and Notes, in: Aristotle's Posterior Analytics, Transl. with Notes, Oxford 1975
- [3] Bayle, Pierre: Dictionaire historique et critique, 4 Bde., Rotterdam 1720
- [4] Dante Alighieri: Die Göttliche Komödie. Ital.-dt., übers. u. komm. von Hermann Gmelin, 6 Bde., Stuttgart 1949-57
- [5] Descartes, René: [AT] Œuvres, publ. Charles Adam et Paul Tannery, 11 Bde., Paris 1897–1913, nouv. éd. 1996
- [6] Euklid: Elementa, post I.L. Heiberg ed. E.S. Stamatis, 5 Bde., Leipzig 1972-77;

 engl., The Thirteen Books of E.'s Elements, transl. from the text of Heiberg with introd. and comm. by T.L. Heath, 3 Bde., Cambridge 1909, 2nd ed. revised with additions 1925, repr. New York 1956;

 dt., Die Elemente, nach Heibergs Text aus dem Griech. übers. u. hrsg. von C. Thaer, Leipzig 1933-37, Nachdr. Darmstadt 1973
- [7] Kemmerling, Andreas: (Hrsg.) René Descartes: Meditationen über Erste Philosophie, Berlin 2009 (Klassiker Auslegen, Bd. 37)
- [8] Lemke, Martin: Variationen über ein Thema von Euklid.
 Über das Verhältnis der Mathematik zur Welt, in der wir leben, Münster 2015
- [9] Schütt, Hans-Peter: Die Stellung der Meditationen im Gesamtwerk Descartes', in: Kemmerling 2009, 147–172
- [10] Voltaire: [M] Œuvres complètes, nouv. éd. de L. Moland, conforme pour le texte à l'éd. de Beuchot, enrichie des découvertes les plus récentes, 52 Bde., Paris 1877-85

Foto:

Papyrus Oxyrhynchus (P. Oxy. I 29), ca. 100 v. Chr.: Fragment mit Lehrsatz 5 aus Buch 2 der *Elemente*, University of Pennsylvania, Quelle: Wikipedia



Die Basis der Vielfalt

Geometrie als Grundlage und Anregung des Denkens -

10. Tagung der DGfGG

Beyer, U. (Hrsg.)

2016, X, 265 S. 213 Abb., 161 Abb. in Farbe., Hardcover

ISBN: 978-3-658-14125-7