

2 Stieltjesintegral und Funktionen von beschränkter Variation

Dieses Kapitel behandelt das Stieltjesintegral reellwertiger Funktionen in einer reellen Variablen. Dieser Integralbegriff bildet die Basis für die pfadweise stochastische Integration. Dafür sei zunächst $t > 0$ und wir betrachten das Intervall $[0, t]$. Unter einer Zerlegung dieses Intervalls verstehen wir eine Menge von Zwischenpunkten

$$\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_r \mid r \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \dots < t_r = t\}.$$

Das Feinheitsmaß einer solchen Zerlegung sei mit $|\mathfrak{Z}| := \max_{1 \leq k \leq r} (t_k - t_{k-1})$ bezeichnet. Für Funktionen $f, g: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ unterscheiden wir folgende Zerlegungssummen:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{Z}} f dg &:= \sum_{k=1}^r f(t_{k-1})(g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ \sum_{\mathfrak{Z}} df dg &:= \sum_{k=1}^r (f(t_k) - f(t_{k-1}))(g(t_k) - g(t_{k-1})) \\ \sum_{\mathfrak{Z}} |df| &:= \sum_{k=1}^r |f(t_k) - f(t_{k-1})|. \end{aligned}$$

Die Funktion f heißt g (-Stieltjes)-integrierbar von 0 bis t , wenn der Grenzwert

$$\lim_{|\mathfrak{Z}| \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{Z}} f dg =: \int_0^t f dg$$

in \mathbb{R} existiert. Es gelte noch folgende Konvention: $\int_0^0 f dg := 0$.

$$\mathrm{Var}_{[0,t]} f := \sup \left\{ \sum_{\mathfrak{Z}} |df| \mid \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } [0, t] \right\}$$

heißt die Variation von f auf $[0, t]$. Ist die Variation endlich, so heißt f von beschränkter Variation auf $[0, t]$. In diesem Fall gilt der folgende Satz, der wichtig ist, um eine möglichst große Menge von Funktionen als Stieltjes-integrierbar zu erkennen.

Satz 2.1. *Sei f eine auf $[0, t]$ definierte reellwertige Funktion von beschränkter Variation auf $[0, t]$. Dann ist die Funktion*

$$V_f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad V_f(s) := \mathrm{Var}_{[0,s]} f$$

wohldefiniert. Außerdem sind V_f und $V_f - f$ monoton wachsend. Die einseitigen Grenzwerte von V_f und f existieren und es gilt:

$$|V_f(s) - V_f(s\pm)| = |f(s) - f(s\pm)| \quad (2.1)$$

für jedes $s \in [0, t]$, für welches der jeweilige Grenzwert Sinn ergibt.

Beweis. Seien $u, v \in [0, t]$ mit $v \geq u$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine Zerlegung \mathfrak{Z} von $[0, u]$, so dass

$$\begin{aligned} V_f(u) - \epsilon + |f(v) - f(u)| &\leq |f(v) - f(u)| + \sum_{\mathfrak{Z}} |df| \\ &\leq \sum_{\tilde{\mathfrak{Z}}} |df| \leq V_f(v) \end{aligned} \quad (2.2)$$

gilt. Dabei ist $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} \cup \{v\}$ eine Zerlegung von $[0, v]$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies

$$f(v) - f(u) \leq |f(v) - f(u)| \leq V_f(v) - V_f(u) \quad (2.3)$$

und damit die Tatsache, dass V_f wohldefiniert und monoton steigend ist. Außerdem entpuppt sich auch $V_f - f$ als monoton steigend. Weil V_f monoton ist, hat diese Funktion einseitige Grenzwerte. Sei nun

$s \in (0, t]$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $s_n < s$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Da $V_f(s_n)$ konvergiert, ist diese Folge eine Cauchy-Folge. Darüber hinaus zeigt (2.3): $|f(s_n) - f(s_m)| \leq |V_f(s_n) - V_f(s_m)|$. Also ist auch $(f(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ als Cauchy-Folge konvergent und damit existiert $f(s-)$. Wieder mit (2.3) sieht man, dass $|f(s) - f(s_n)| \leq V_f(s) - V_f(s_n)$. Nach Grenzwertbildung ergibt sich daraus der erste Teil von (2.1):

$$|f(s) - f(s-)| \leq |V_f(s) - V_f(s-)|$$

Für die entgegengesetzte Ungleichung sei $\epsilon > 0$. Dann wähle man eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_r\}$, so dass

$$V_f(t) - \sum_{\mathfrak{Z}'} |df| < \epsilon,$$

für jede Verfeinerung \mathfrak{Z}' von \mathfrak{Z} richtig ist. Seien nun $N \in \mathbb{N}$ und $l \in \{0, \dots, r-1\}$, so dass $t_l \leq s_n \leq s \leq t_{l+1}$ für jedes $n \geq N$. Man betrachte dann für $n \geq N$ die Verfeinerung $\mathfrak{Z}_n := \mathfrak{Z} \cup \{s_n, s\}$ von \mathfrak{Z} . Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 \epsilon &> V_f(t) - \sum_{\mathfrak{Z}_n} |df| \\
 &= [V_f(t) - V_f(s) - (|f(t_{l+1}) - f(s)| + |f(t_{l+2}) - f(t_{l+1})| + \dots \\
 &\quad \dots + |f(t_r) - f(t_{r-1})|)] \\
 &\quad + [V_f(s) - V_f(s_n) - |f(s) - f(s_n)|] \\
 &\quad + [V_f(s_n) - (|f(t_1) - f(t_0)| + \dots + |f(s_n) - f(t_l)|)].
 \end{aligned}$$

Dabei ist jede der eckigen Klammern ≥ 0 aufgrund der Definition der Variation, bzw. wegen (2.2) und (2.3). Die zweite eckige Klammer zeigt

$$V_f(s) - V_f(s_n) < \epsilon + |f(s) - f(s_n)|$$

und damit die ausstehende Ungleichung nach Grenzwertbildung. Man beachte, dass $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde. Analog zeigt man die Existenz des Grenzwerts und die zugehörige Gleichung für Folgen die von oben gegen ein $s \in [0, t]$ konvergieren. \square

Bemerkung 2.2. Eine Funktion f ist somit genau dann von beschränkter Variation und stetig, wenn sie Differenz zweier stetiger monoton steigender Funktionen ist. Diese Aussage behält auch dann noch ihre Gültigkeit, wenn die Eigenschaft stetig durch rechtsstetig oder linksstetig ersetzt wird.

Im nächsten Satz werden wir zeigen, dass Stieltjesintegrale unter gewissen Voraussetzungen Integrale nach geeigneten Borelmaßen sind. Ein Grund dafür ist, dass jede rechtsstetige wachsende Funktion $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mu_g([s, t]) := g(t) - g(s) \text{ für } 0 \leq s \leq t \quad \text{und} \quad \mu_g(\{0\}) = 0$$

ein eindeutiges Maß μ_g auf der Borel- σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$ von \mathbb{R}_+ definiert. Ein Beweis für diese eindeutige Existenz eines solchen Maßes auf einem maximalen Definitionsbereich verläuft analog zum Beispiel II.4.7 in [7] über das Lebesgue-Stieltjessche Maß. Im Folgenden heißt eine Eigenschaft einer auf \mathbb{R}_+ definierten Funktion lokal, falls sie für jedes $t \geq 0$ auf $[0, t]$ besteht.

Satz 2.3. Sei $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine rechtsstetige Funktion, welche lokal von beschränkter Variation sei. Dann wird durch

$$\mu_g([s, t]) := g(t) - g(s) \text{ für } 0 \leq s \leq t \quad \text{und} \quad \mu_g(\{0\}) = 0 \quad (2.4)$$

eindeutig ein signiertes Maß auf $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$ definiert. Weiterhin sei $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine linksstetige lokal beschränkte Funktion. Dann ist f g -Stieltjes-integrierbar von 0 bis t für jedes $t \geq 0$ und es gilt:

$$\int_0^t f dg = \int_{[0, t]} f d\mu_g. \quad (2.5)$$

Beweis. Nach Satz 2.1 und Bemerkung 2.2 ist $g = g_1 - g_2$ die Differenz zweier rechtsstetiger monoton wachsender Funktionen. Diese definieren, wie vor diesem Satz erörtert, eindeutige Maße auf $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$ durch $\mu_{g_i}([s, t]) := g_i(t) - g_i(s)$, für $0 \leq s \leq t$ und $i = 1, 2$, sowie $\mu_{g_i}(\{0\}) = 0$

für $i = 1, 2$. Das signierte Maß, welches durch $\mu_g := \mu_{g_1} - \mu_{g_2}$ definiert ist, erfüllt dann die geforderten Bedingungen in (2.4).

Die Eindeutigkeit eines solchen signierten Maßes ergibt sich nun wie folgt. Sei dazu ν_g ein weiteres signiertes Maß, welches den Anforderungen von (2.4) genügt. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man dann die Einschränkungen μ_g^n und ν_g^n der beteiligten signierten Maße auf den Messraum $([0, n], [0, n] \cap \mathbb{B}(\mathbb{R}_+))$ gegeben durch

$$\mu_g^n: [0, n] \cap \mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mu_g^n(A) := \mu_g(A)$$

und analog für ν_g^n . Damit sind μ_g^n und ν_g^n endliche signierte Maße (Man beachte die Hahn-Jordan-Zerlegung.), die auf dem schnittstabilen Erzeuger

$$\mathcal{E}_n := \{\{0\}\} \cup \{[s, t]: 0 \leq s \leq t \leq n\}$$

übereinstimmen. Folglich sind nach Satz 1.45 diese signierten Maße auf der gesamten σ -Algebra $[0, n] \cap \mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$ gleich. Sei nun $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$ beliebig. Dann setze man $A_1 := [0, 1] \cap A$ und $A_n := [n-1, n] \cap A$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die σ -Additivität der signierten Maße zeigt:

$$\mu_g(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_g^j(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_g^j(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_g(A_j) = \nu_g(A)$$

und damit die Gleichheit beider signierter Maße.

Da μ_g keine Masse auf den Punkt 0 wirft ist (2.5) im Fall $t = 0$ trivial. Sei daher im Folgenden $t > 0$ fixiert. Für eine beliebige Zerlegung $\mathfrak{z} = \{t_0, \dots, t_r\}$ von $[0, t]$ sei

$$f_{\mathfrak{z}} := \sum_{l=1}^r f(t_{l-1}) \mathbf{1}_{[t_{l-1}, t_l]}.$$

Sei außerdem \mathfrak{z}_n eine Folge von Zerlegungen von $[0, t]$ mit $|\mathfrak{z}_n| \rightarrow 0$. Dann konvergiert $f_{\mathfrak{z}_n}(s) \rightarrow f(s)$ für jedes $0 < s \leq t$ wegen der

Linksstetigkeit von f . Aufgrund der lokalen Beschränktheit von f ist diese Konvergenz durch die Konstante $c := \sup_{s \leq t} |f(s)|$ dominiert. Weil aber das Maß μ_g nur endliche Masse auf das Intervall $[0, t]$ wirft, folgt (2.5) aus dem Satz von der dominierten Konvergenz übertragen auf die positive und die negative Variation von μ_g :

$$\sum_{\mathfrak{Z}_n} f dg = \int_{[0, t]} f \mathfrak{Z}_n d\mu_g \rightarrow \int_{[0, t]} f d\mu_g.$$

□

Ist g stetig differenzierbar, so hat μ_g eine Lebesgue-Dichte.

Proposition 2.4. *Ist $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. im Punkt 0 existiert der Differentialquotient von rechts), dann ist g lokal von beschränkter Variation und es gilt für das nach Satz 2.3 eindeutig bestimmte signierte Maß*

$$\mu_g = g' \cdot \lambda \tag{2.6}$$

mit λ dem Lebesgue-Maß auf $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+)$.

Beweis. Ist $t \geq 0$ und $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_r\}$ eine beliebige Zerlegung von $[0, t]$, so gilt wegen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\sum_{\mathfrak{Z}} |dg| = \sum_{k=1}^r |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq t \cdot \sup_{s \in [0, t]} |g'(s)| < \infty.$$

Also ist g lokal von beschränkter Variation. (2.6) folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Tatsache, dass μ_g durch (2.4) eindeutig bestimmt ist. □

In der folgenden Proposition bezeichnet \mathfrak{b} die Menge der linksstetigen lokal beschränkten Funktionen von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R} und \mathfrak{a} die Menge der stetigen Funktionen von \mathbb{R}_+ nach \mathbb{R} , welche lokal von beschränkter Variation sind.

Proposition 2.5.

1. Ist $f \in \mathfrak{b}$ und $g \in \mathfrak{a}$, so ist die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := \int_0^t f dg$ auch ein Element von \mathfrak{a} .
2. Für fixiertes $t \geq 0$ ist der Ausdruck $\int_0^t f dg$ bilinear in $f \in \mathfrak{b}$ und $g \in \mathfrak{a}$.
3. Seien $0 \leq s \leq t$ reelle Zahlen und seien $f \in \mathfrak{b}$, $g \in \mathfrak{a}$ mit $f \equiv 0$ auf $[s, t]$ oder g konstant auf $[s, t]$, so gilt

$$\int_0^v f dg = \int_0^s f dg$$

für alle $v \in [s, t]$.

Beweis.

1. Zunächst ist $g = g_1 - g_2$ Differenz zweier stetiger monoton wachsender Funktionen nach Satz 2.1. Außerdem ist μ_g gebildet durch $\mu_g = \mu_{g_1} - \mu_{g_2}$. Seien dann $u, v \in \mathbb{R}_+$ mit $u < v$, so gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi(v) - \varphi(u)| &= \left| \int_0^u f dg - \int_0^v f dg \right| = \left| \int_{]u,v]} f d\mu_g \right| \\ &\leq \int_{]u,v]} |f| d\mu_{g_1} + \int_{]u,v]} |f| d\mu_{g_2} \\ &\leq \sup_{x \leq v} |f(x)| \cdot (\mu_{g_1}(]u, v]) + \mu_{g_2}(]u, v]) \\ &= \sup_{x \leq v} |f(x)| \cdot [(g_1(v) - g_1(u)) + (g_2(v) - g_2(u))] \end{aligned}$$

Damit folgt die Stetigkeit von φ aus der von g_1 und g_2 . Außerdem sieht man, dass φ lokal von beschränkter Variation ist, denn durch obige Ungleichung lässt sich $\text{Var}_{[0,t]} \varphi$ durch

$$\sup_{x \in [0, t]} |f(x)| \cdot [(g_1(t) + g_2(t)) - (g_1(0) + g_2(0))]$$

nach oben abschätzen.

2. Diese Eigenschaft überträgt sich direkt von den Zerlegungssummen $\sum_{\mathfrak{Z}} f dg$.
3. Dies ergibt sich auch anhand der approximierenden Zerlegungssummen. Denn ist \mathfrak{Z}_n eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[0, v]$ mit $|\mathfrak{Z}_n| \rightarrow 0$, so kann man stets ohne Einschränkung annehmen, dass der Punkt s zu jedem \mathfrak{Z}_n gehört.

□

Aufgrund der nächsten Bemerkung wird sich später zeigen, dass die pfadweise stochastische Integration nicht ausreicht.

Bemerkung 2.6. *Ist $t > 0$ und $g: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ nicht von beschränkter Variation, so ist nicht jede stetige Funktion $f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ g -integrierbar.*

Beweis. Sei $\mathfrak{Z}_n = \{t_0^{(n)} = 0, \dots, t_{r_n}^{(n)} = t\}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[0, t]$ mit $|\mathfrak{Z}_n| \rightarrow 0$ und

$$\sum_{\mathfrak{Z}_n} |dg| \rightarrow V_g(t) = \infty.$$

Dann induziert diese eine Folge T_n von stetigen, linearen Funktionalen auf dem Banachraum $\mathcal{C}([0, t]; \mathbb{R})$ durch:

$$T_n(f) := \sum_{\mathfrak{Z}_n} f dg.$$

Weiterhin können wir für $n \in \mathbb{N}$ zum Beispiel durch lineare Interpolation stetige Funktionen $f_n \in \mathcal{C}([0, t]; \mathbb{R})$ finden, für die gilt:

$$f_n(t_{k-1}^{(n)}) = \begin{cases} \frac{|g(t_k^{(n)}) - g(t_{k-1}^{(n)})|}{g(t_k^{(n)}) - g(t_{k-1}^{(n)})}, & \text{falls } g(t_k^{(n)}) \neq g(t_{k-1}^{(n)}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für jedes $k = 1, \dots, r_n$ und $\|f_n\|_\infty = 1$. Wäre nun jede stetige Funktion g -integrierbar, so gelte für jedes $f \in \mathcal{C}([0, t]; \mathbb{R})$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| < \infty,$$

denn $T_n(f) \rightarrow \int_0^t f dg \in \mathbb{R}$. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (Theorem IV.2.1 in [19]) folgte dann $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, was aber der Tatsache:

$$\|T_n\| \geq T_n(f_n) = \sum_{\mathfrak{Z}_n} f_n dg = \sum_{\mathfrak{Z}_n} |dg| \rightarrow V_g(t) = \infty.$$

widersprüche. □

Zum Schluss des vorliegenden Abschnitts beweisen wir noch die Formel der partiellen Integration für das Stieltjesintegral.

Satz 2.7. *Seien $f, g: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \geq 0$ und sei f stetig, sowie g rechtsstetig und von beschränkter Variation auf $[0, t]$. Dann gilt:*

$$\int_0^t f dg + \int_0^t g df = f(t)g(t) - f(0)g(0). \quad (2.7)$$

Beweis. Sei $\mathfrak{Z} = \{t_0, \dots, t_r\}$ eine beliebige Zerlegung von $[0, t]$. Dann sieht man einerseits mit einem einfachen Indexshift

$$\sum_{\mathfrak{Z}} f dg + \sum_{\mathfrak{Z}} g df + \sum_{\mathfrak{Z}} df dg = f(t)g(t) - f(0)g(0) \quad (2.8)$$

und andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mathfrak{Z}} df dg \right| &= \left| \sum_{k=1}^r (f(t_k) - f(t_{k-1}))(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| \\ &\leq \left(\max_{k \in \{1, \dots, r\}} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right) \sum_{k=1}^r |g(t_k) - g(t_{k-1})| \\ &\leq \left(\max_{k \in \{1, \dots, r\}} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right) (\text{Var}_{[0, t]} g) \end{aligned}$$

Somit gilt $\lim_{|\mathfrak{z}| \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{z}} df dg = 0$ aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von f . Weil $\sum_{\mathfrak{z}} f dg$ mit Satz 2.3 und den gegebenen Voraussetzungen gegen $\int_0^t f dg$ konvergiert, existiert auch der Grenzwert $\lim_{|\mathfrak{z}| \rightarrow 0} \sum_{\mathfrak{z}} g df$. (2.7) folgt daher aus (2.8). \square



<http://www.springer.com/978-3-658-14131-8>

Stochastische Integration

Eine Einführung in die Finanzmathematik

Hoffmann, M.

2016, XIII, 284 S., Softcover

ISBN: 978-3-658-14131-8