

2 Forschungsrahmen

Unabhängig davon, wie die negativen Zahlen im Mathematikunterricht der Grundschule auftauchen – ob als Idee einzelner Lernender im Kontext von (offenen) Aufgaben oder als eigener Lehrgang – und in welcher Tiefe ihre unterrichtliche Thematisierung in diesem Zusammenhang erfolgt, begegnen sie immer im Spannungsfeld zwischen Lernendem und Lehrendem, welches das didaktische Dreieck zu beschreiben sucht (vgl. z. B. Diederich 1988; Steinbring 1997). Jank und Meyer (2008) beanstanden das didaktische Dreieck als einem naiven Stoffvermittlungsdenken verhaftet. Das Dreieck wird damit der gegenwärtigen Auffassung von Lernen als einem konstruktiven Akt der Lernenden (vgl. z. B. Gerstenmaier & Mandl 1995; von Glasersfeld 1995; 2005) nicht gerecht. Unberücksichtigt bleibt im didaktischen Dreieck überdies, dass Objekte in der sozialen Interaktion der je individuellen Konstrukte der Lernenden wie Lehrenden als Gegenstände des Unterrichts konstituiert werden, Lernen folglich immer in kollektiver Argumentation als Lösungsprozess interindividueller Koordinationsprobleme gründet (vgl. Miller 1986).

„Nur in der sozialen Gruppe und aufgrund der sozialen Interaktionsprozesse zwischen den Mitgliedern einer Gruppe kann das einzelne Individuum jene Erfahrungen machen, die fundamentale Lernschritte ermöglichen.“ (Miller 1986, S. 20f.)

Gruschka (2002, S. 87 ff.) kritisiert daher zu Recht das didaktische Dreieck als unzureichend und nur die ‚Vorderbühne des didaktischen Geschehens‘ beachtend. Er versucht durch das erweiterte Schema einer Pyramide (vgl. Abb. 2.1) auch den unterrichtlichen ‚Backstage-Bereich‘ auszuleuchten und dabei mit einem differenzierteren Blick auf den Unterrichtsgegenstand und dessen Konstruktion bzw. Konstituierung zu schauen.

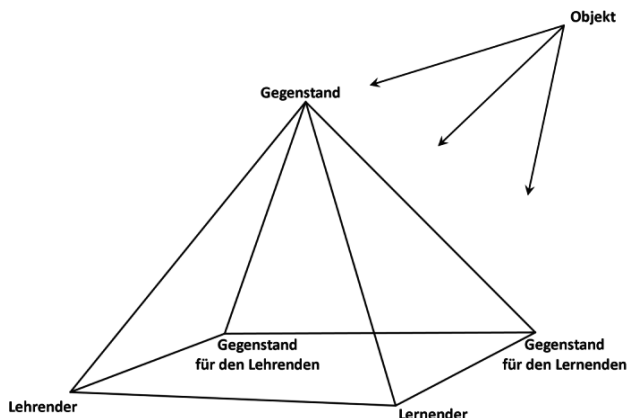


Abbildung 2.1: Didaktische Pyramide (vgl. Gruschka 2002, S. 121)

Zentral ist dabei, dass im Unterricht eben nicht das Objekt selbst, sondern dieses unter spezifischen Sichtweisen und in Abhängigkeit der am Unterricht beteiligten Akteure als diskursiver Unterrichtsgegenstand Thematisierung findet. Bei Gruschka (2002, S. 122) werden folglich die *Voreinstellung des Lernenden* zum unterrichtlichen Gegenstand als wesentliches Element bei der Betrachtung des Lehr-Lern-Prozesses berücksichtigt. Unter der Voreinstellung des Lernenden versteht Gruschka dabei dessen je eigene Sichtweise auf den jeweiligen Unterrichtsgegenstand auf der Grundlage seines Vorwissens:

„Der Schüler interpretiert also den Lerninhalt auch über seine bisherigen Lernerfahrungen, und er bezieht den aktuellen Stoff auf seine bereits vorhandene Kenntnis“ (Gruschka 2002, S. 122).

Die Voreinstellungen der Lernenden können somit auch als *Lernerperspektiven* (Kattmann et al. 1997) auf den Unterrichtsgegenstand verstanden werden. Die Berücksichtigung derselben kann nach Ausubel (1968) als erstes, grundlegendes Prinzip der Lehr-Lern-Psychologie angesehen werden:

„If I had to reduce all of educational psychology to just one principle, I would say this: The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly“ (Ausubel 1968, S. vi).

Entsprechend sieht Wittmann (1975) im Hinblick auf den Mathematikunterricht die Feststellung der *Lernvoraussetzungen* als zentrale Planungsaufgabe für den Unterricht.⁷ Darin teilt er die Ansicht der meisten didaktischen Theorien, die ebenfalls fordern, die auf den speziellen Lerngegenstand bezogenen kognitiven Lernvoraussetzungen als Teil der „Psychostruktur“ (Frank 1967, S. 171) bzw. der anthropologisch-psychologischen Ausgangslage im Implikationszusammenhang der Strukturmomente des Unterrichts (vgl. Schulz 1965; 1981) neben weiteren, *allgemeinen Lernvoraussetzungen*⁸ im Rahmen einer Bedingungsanalyse (vgl. Klafki 2006) oder dgl. bei der Unterrichtsplanung zu berücksichtigen. Die Forderung der Berücksichtigung der Voreinstellungen der Lernenden bei Gruschka (2002) ist damit nicht neu. Hintergrund der den Lernerperspektiven im Lehr-Lern-Prozess zugemessenen Bedeutung ist je

⁷ Wittmann (1975) bezieht sich dabei auf ein bei De Cecco (1968) vorgestelltes, behavioristisch geprägtes Unterrichtsmodell. Lernen wird darin als eine durch geeignete Lehrstrategien zu erreichende Verhaltensänderung verstanden. In diesem Zusammenhang spielt die Erfassung des Lernausgangsverhaltens und die Festlegung des im Lehr-Lernprozess angezielten Verhaltens eine zentrale Rolle bei Auswahl der Lehrstrategien ebenso wie bei Überprüfung des Lernerfolgs. Dabei werden *entering* und *terminal behavior* von De Cecco (1968, S. 59) wie folgt definiert: „*entering behavior* describes the present status of the student's knowledge and skill in reference to a future status the teacher wants him to attain. *Entering behavior*, therefore, is where the instruction must always begin. *Terminal behavior* is where the instruction concludes.“ Das Lernausgangsverhalten umfasst nach dieser Definition knowledge wie skills, d. h. sowohl das deklarative als auch das prozedurale (Vor-)Wissen.

⁸ Meyer (2009, S. 141) definiert Lernvoraussetzungen umfassend als „körperliche und geistige Personenmerkmale sowie materielle Faktoren, durch die Lernfähigkeit und -bereitschaft der Schülerinnen und Schüler hergestellt und gesichert wird“. Neben sozio-kulturellen Voraussetzungen (z. B. Migrationshintergrund oder Sprachvermögen), Arbeits- und Sozialverhalten, Interesse, lern- und entwicklungspsychologischen Voraussetzungen, Lernkompetenz, Leistungsstand und materiellen Lernvoraussetzungen, sieht Meyer auch inhaltliche Vorkenntnisse und themenbezogene Erfahrungen als eine Dimension der Lernvoraussetzungen.

nach grundsätzlicher Ausrichtung der didaktischen Theorie einerseits die Lernkontrolle auf der Grundlage des Vergleichs von Lernausgangslage als Ist-Wert und erwünschtem Endverhalten als Soll-Wert (vgl. von Cube 2006; Möller 2006) und andererseits die von Piaget und Wygotski bis zur modernen Kognitionswissenschaft vertretene Auffassung, dass neues Wissen auf altem aufgebaut wird (vgl. z. B. Sfard 2008).

„Vorstellungen bestimmen das Lernen, weil man das Neue nur durch die Brille des bereits Bekannten ‚sehen‘ kann“ (Duit 2008, S. 3).

Die konstruktivistische Auffassung des Lehrens und Lernens teilt die Auffassung der Kognitionswissenschaft und versteht die Voreinstellungen als Grundlage neuer Wissenskonstruktion. Im Sinne eines autopoietischen, selbstreferenziellen Systems bedingt Verstehen vorauslaufendes Verstehen bzw. entsprechende Voreinstellungen, die für den Prozess des Verstehens verwendet werden können (vgl. Girg 2005). Von Glasersfeld (2005) hält daher Vermutungen über die Lernerperspektiven auf Seiten des Lehrenden zur Förderung des Lernprozesses als geboten.

„Viele Wörter, die im Rahmen des Lehrstoffes für Lehrer/innen seine selbstverständliche Bedeutung haben, sind für Schüler/innen mit anderen Vorstellungen verknüpft. Ein Verstehen der gewünschten Zusammenhänge (besonders in wissenschaftlichen Gebieten) wird erst möglich, wenn ‚naive‘ Begriffe bewusst umgebaut werden. Um diesen Umbau und das Entstehen neuer Begriffsverbindungen fördern zu können, müssen Lehrer/innen zumindest Vermutungen über die gegenwärtigen Ideen und Theorien der Schüler/innen haben“ (von Glasersfeld 2005, S. 222).

Das alte Wissen bildet allerdings nicht zwangsläufig einen Nährboden für neue Wissenskonstruktionen. Es kann auch ein Lernhindernis darstellen und abwegige Konstruktionen befördern. Um daher auf mögliche Lernschwierigkeiten im Unterricht in angemessener Weise reagieren zu können, scheint es nach Shulman (1986) für den Lehrenden notwendig, die Lernerperspektiven zu kennen:

„Pedagogical content knowledge also includes an understanding of what makes the learning of specific topics easy or difficult: the conceptions and preconceptions that students of different ages and backgrounds bring with them to the learning of those most frequently taught topics and lessons“ (Shulman 1986, S. 9).

Zur Professionalität der Lehrenden muss damit das Wissen um die Bedeutsamkeit der Lernerperspektive ebenso gehören wie eine hohe diagnostische Kompetenz, um die individuellen kognitiven Lernvoraussetzungen überhaupt erkennen und bei Planung und Durchführung von Unterricht berücksichtigen zu können (vgl. Helmke 2009). Darum weiß auch die Mathematikdidaktik seit Längerem:

„Der Lehrer sollte am Lernprozess der Schüler teilnehmen und ihn nicht einfach nur beobachten. Dies setzt voraus, dass er den augenblicklichen Zustand des Schülers rekonstruieren und diagnostizieren kann“ (Wittmann 1975, S. 13).

Grundlage einer entsprechenden Kompetenz sind allgemeine Orientierungen zu Lernerperspektiven auf bestimmte Inhalte, wie sie etwa durch empirische Untersuchungen gegeben werden.⁹ Mit der Didaktischen Rekonstruktion stellen Kattmann et al. (1997) ein fachdidaktisch akzentuiertes Modell (vgl. Jank & Meyer 2008) als Forschungsrahmen vor. In diesem Modell erfahren Voreinstellungen als „mentale Strukturen, über die die Lernenden bereits verfügen“ (Gropengießer 2008, S. 172) bei der didaktischen Strukturierung des Unterrichtsgegenstandes zur Etablierung fachlicher Sichtweisen besondere Berücksichtigung.

„Mit dem Modell der Didaktischen Rekonstruktion werden fachliche Vorstellungen, wie sie in Lehrbüchern und anderen wissenschaftlichen Quellen Ausdruck finden, mit Schülerperspektiven so in Beziehung gesetzt, dass daraus ein Unterrichtsgegenstand entwickelt werden kann“ (Kattmann et al. 1997, S. 3).

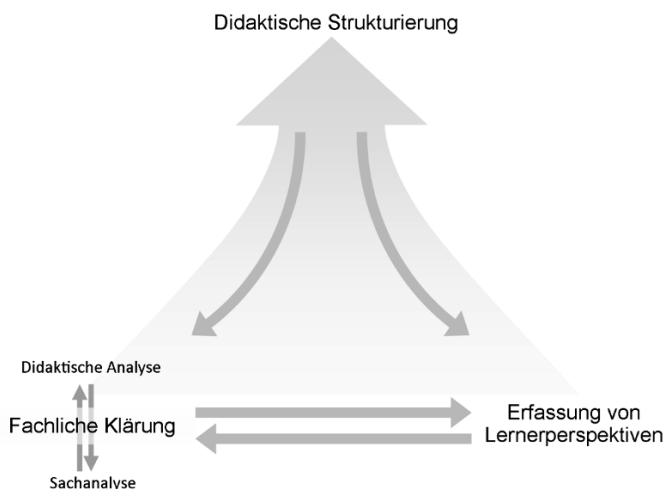


Abbildung 2.2: Didaktisches Triplett (vgl. Kattmann et al. 1997, S. 4)

Die Didaktische Rekonstruktion weist damit drei Arbeitsbereiche für die fachdidaktische Forschung aus: (a) die fachliche Klärung, (b) die Erfassung der Lernerperspektiven und (c) die didaktische Strukturierung (vgl. Abb. 2.2). Wie Kattmann et al. (1997) betonen, stehen die drei Untersuchungsaufgaben des didaktischen Triplett in Wechselwirkung zueinander und

⁹ Solche allgemeinen Orientierungen liefern z. B. zu Lernerperspektiven im arithmetischen Anfangsunterricht der Grundschule unter verschiedenen Forschungsperspektiven und in unterschiedlicher Tiefe u. a. Spiegel (1979a; 1979b; 1992), van den Heuvel-Panhuizen und Gravemeijer (1990), Maier (1995), Selter (1995) und Rinkens (2004). Außerdem findet sich bei Sundermann und Selter (2004) eine umfassendere Liste mit entsprechenden Untersuchungen im In- und Ausland. Da negative Zahlen selten bereits im Grundschulunterricht thematisiert werden, finden sich allgemeine Orientierungen zu entsprechenden Voreinstellungen von Grundschulkindern lediglich bei den in Kap. 1 vorgestellten empirischen Untersuchungen sowie teilweise im Zusammenhang mit den dort beschriebenen Lehrgängen.

sind jeweils von den Ergebnissen der anderen Untersuchungsaufgaben abhängig, sodass sich für den Untersuchungsablauf eine iterative Abfolge der Forschungsschritte ergibt. Die drei Arbeitsbereiche ergänzen sich also komplementär. Prediger (2005) setzt die drei Untersuchungsaufgaben der Didaktischen Rekonstruktion in Beziehung zu den bei Hefendehl-Hebeker (2004) genannten drei zentralen Arbeitsbereichen mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit: der Restrukturierung des Faches unter wissensgenetischen Aspekten, der erkenntnistheoretischen und lernpsychologischen Grundlagenforschung und der praxisorientierten Entwicklungsforschung. Die Didaktische Rekonstruktion kann somit als fachdidaktischer Forschungsansatz verstanden werden, „der sich für das Themenfeld der nachhaltigen Entwicklung von fachlichen Vorstellungen auf die konsequente Integration der genannten drei Arbeitsbereiche im Forschungsansatz konzentriert“ (Prediger 2005, S. 24).

Bevor die Untersuchungsaufgaben des didaktischen Triplets im Einzelnen näher beleuchtet und im Hinblick auf das Forschungsvorhaben konturiert werden, ist der lerntheoretische Hintergrund im hier zugrundegelegten Verständnis der Didaktischen Rekonstruktion zu klären sowie eine entsprechende Auffassung des Lehren und Lernens in diesem Forschungsrahmen aus mathematikdidaktischer Sicht weiter auszudifferenzieren.

2.1 Lerntheoretischer Hintergrund

Lerntheoretischer Hintergrund der Didaktischen Rekonstruktion ist die konstruktivistische Auffassung des Lernens, wonach – wie oben erwähnt – Lernen als individuelle, aktive Konstruktion mentaler Strukturen auf der Grundlage bereits vorhandener Strukturen verstanden wird. Vor diesem Hintergrund interessiert die Didaktische Rekonstruktion den Aufbau adäquater fachlicher Vorstellungen, wobei der Vorstellungsbegriff weitgefasst alle kognitiven Konstrukte zur Deutung der Erfahrung unterschiedlichster Komplexitätsebenen umfasst (vgl. Kattmann & Gropengießer 1996; Gropengießer 2001; 2006). Der Aufbau solcher Vorstellungen im Wechselspiel mit den bereits vorhandenen, vorunterrichtlichen Vorstellungen bestimmt den Lernprozess, sodass Lernen ganz allgemein ‚Vorstellungsänderung‘ bedeutet (vgl. Kattmann et al. 1997). Damit können die Ziele der Didaktischen Rekonstruktion als in Übereinstimmung mit dem Ansatz des Conceptual Change verstanden werden.

2.1.1 Conceptual Change

Posner et al. (1982) verstehen Kuhn’schen Paradigmenwechsel als ‚conceptual change in science‘ (S. 212). Diesen sehen sie als eine Analogie zum ‚conceptual change in learning‘ (ebd.). So wie die Paradigmen der ‚normalen Wissenschaft‘ im Zusammenhang mit einer wissenschaftlichen Revolution modifiziert oder durch neue ersetzt werden (vgl. Kuhn 1967), so muss auch der Lernende seine Vorstellungen (engl.: concepts bzw. conceptions) reorganisieren oder durch neue ersetzen, wenn sie im Umgang mit neuen Phänomenen unbrauchbar geworden sind. Vosniadou und Verschaffel (2004), die den zunächst im Rahmen der Naturwis-

senschaftsdidaktik entwickelten Ansatz von Posner et al. (1982) auch als fruchtbare Komponente mathematikdidaktischer Theoriebildung ansehen, definieren Conceptual Change¹⁰ wie folgt:

„The term ‚conceptual change‘ is used to characterize the kind of learning required when the new information to be learned comes in conflict with the learners‘ prior knowledge usually acquired on the basis of everyday experiences.“ (Vosniadou & Verschaffel 2004, S. 445)

In Zusammenhang mit ihrer Theorie greifen Posner et al. (1982) auf die Piaget’schen Begriffe von Assimilation und Akkommodation zurück, wobei diese als aufeinanderfolgende Phasen im Lernprozess betrachtet werden. In der Assimilationsphase versucht der Lernende, mit einem neuen Phänomen mittels seiner vorhandenen Vorstellungen umzugehen. Gelingt dies nicht, muss er seine Vorstellungen in Bezug auf das neue Phänomen durch Reorganisation oder Neukonstruktion akkommodieren.¹¹ Ziel dieses Akkommodationsprozesses ist die Überwindung (overcoming) einer ursprünglichen Lernervorstellung zugunsten einer entsprechenden fachlichen Vorstellung (vgl. Brown & Clement 1989). Diese Substitutionsperspektive auf den Conceptual Change bewertet allerdings die in Alltagserfahrungen gründenden Vorstellungen der Lerner als defizitär und berücksichtigt unzureichend, dass diese Vorstellungen – weil situationsgebunden erworben – in den entsprechenden Situationen weiterhin Situationsangemessenheit besitzen können.¹² Ähnlich defizitorientiert ist bspw. die Sichtweise von Vosniadou (1994), wonach Conceptual Change als graduelle Modifikation bestehender Vorstellungen durch Anreicherung (enrichment) derselben bzw. deren Umbau (revision) verstanden wird. Auch diese Modifikationsperspektive ist letztlich ein Conceptual Change unter Substitutionsperspektive, da eine neue, mehr fachlich orientierte Vorstellung aus der Modifikation einer individuellen Vorstellung resultiert und diese ersetzt.

Gegenüber diesen defizitorientierten Sichtweisen verfolgen Smith et al. (1993) eine der konstruktivistischen Lerntheorie angemessenere ressourcenorientierte Argumentation, die die

¹⁰ Im Folgenden wird an der englischen Terminologie festgehalten, da sich keine geeignete Übersetzung finden lässt. Möller (2007) merkt an, dass eine Übersetzung von Conceptual Change mit ‚Konzeptwechsel‘ irreführend sei, da es nicht primär um einen Wechsel von einer nicht belastbaren Vorstellung zu einer adäquateren Vorstellung, sondern allgemein um die Veränderung vorhandener Vorstellungen ginge. Sie schlägt als passendere Übersetzungen ‚konzeptuelle Entwicklung‘ oder ‚Konzeptveränderung‘ vor. Diese Übersetzungen fokussieren aber eher auf die Conceptual-Change-Perspektive, die hier als vertikal charakterisiert wird. Die Bezeichnung ‚Konzeptwechsel‘ – wie sie u. a. auch von Reuter (2011) gebraucht wird – scheint in dieser Beziehung schon passender. Jedoch ist Möller (2007) insofern zuzustimmen, als Conceptual Change nicht weniger einen Wechsel als eine Reorganisation des konzeptuellen Systems meint.

¹¹ Dieser Akkommodationsprozess ist an vier Bedingungen geknüpft: (1) Die vorhandene Vorstellung muss einen Umgang mit dem neuen Phänomen nicht zufriedenstellend ermöglichen. (2) Die zum Umgang mit dem neuen Phänomen angebotene Vorstellung muss verständlich sein. (3) Zudem muss diese Vorstellung als einleuchtend erscheinen und (3) die Möglichkeit zur erfolgreichen Bearbeitung weiterer Probleme aufscheinen lassen (vgl. Posner et al. 1982; Strike & Posner 1992).

¹² Weitere Kritikpunkte am Ansatz von Posner et al. (1982) führen Vosniadou und Verschaffel (2004, S. 446) an, welche im Übrigen auch für dessen modifizierter Revision (Strike & Posner 1992) weitestgehend ebenfalls gültig sind.

bleibende Viabilität¹³ von bestimmten Lernervorstellungen in entsprechenden Situationen anerkennt. Die Vertreter solch einer situierten Perspektive auf den Conceptual Change erkennen keine Notwendigkeit für eine Substitution oder Modifikation vermeintlicher Fehlvorstellungen, noch deren grundsätzliche Möglichkeit (vgl. Stark 2003). Conceptual Change bedeutet in diesem Zusammenhang den Wechsel zwischen konkurrierenden Vorstellungen, bestimmt durch ihre jeweilige Viabilität.

Prediger (2008, S. 132 ff.) bezeichnet im mathematikdidaktischen Zusammenhang dieses situierte Verständnis als horizontale Sichtweise, wohingegen die anderen vorgestellten Auffassungen des Conceptual Change von ihr als vertikale Sichtweisen etikettiert werden.

„Vertical views are characterized by the aim of overcoming individual (mis-)conceptions and carefully substituting them by regular conceptions” (Prediger 2008, S. 132).

„[T]he focus for the horizontal view is on the idea that learning process should be conceptualized on the basis of persisting co-existence of prior and mathematical conceptions” (ebd., S. 134).

Die klassische vertikale Sichtweise geht von einem vertikalen Nacheinander von Vorstellungen im Rahmen einer Vorstellungshierarchie aus, wobei die lediglich auf individuellen Einzelerfahrungen beruhenden Vorstellungen im Rahmen des Conceptual-Change-Prozesses in mehr und mehr sozialgeteilte fachliche Vorstellungen überführt und durch diese ersetzt werden.

Demgegenüber erkennt die horizontale Sichtweise die Viabilität auch nicht-wissenschaftlicher Vorstellungen an und fokussiert auf die situationsgebundene Aktivierung von Vorstellungen.

„Conceptual change does not imply that initial conceptions are ‚extinguished‘. Initial conceptions, especially those that hold explanatory power in nonscientific contexts, may be held concurrently with new conceptions. Successful students learn to utilize different conceptions in appropriate contexts” (Tyson et al. 1997, S. 402).

Lernen zielt damit erstens auf den Auf- und Ausbau durchaus unterschiedlicher Vorstellungen zu ein und demselben Gegenstand (vgl. Kap. 2.1.3) sowie zweitens auf den viabilitätsbestimmten Wechsel zwischen diesen Vorstellungen.

2.1.2 Subjektive Erfahrungsbereiche

Neben der Theorie des Conceptual Change mit einer zunächst vertikalen Sichtweise ist Anfang der 1980er Jahre in der Mathematikdidaktik von Bauersfeld eine ähnliche Theorie unter

¹³ Wenn Smith et al. (1993) von ‚functionality‘ sprechen, meinen sie damit das, was Glasersfeld (1995) mit ‚viability‘ bezeichnet, nämlich den zur Wirklichkeitsbewältigung erfolgreichen Gebrauch einer Vorstellung in einem bestimmten Erfahrungszusammenhang. Dabei bedeutet Viabilität nach von Glasersfeld (1995) nicht nur die Bewährung einer individuellen Vorstellung in der Praxis, sondern auch deren widerspruchsfreie Passung in das System weiterer Vorstellungen: „The viability of concepts on this higher, more comprehensive level of abstraction is not measured by their practical value, but by their non-contradictory fit into the largest possible conceptual network“ (von Glasersfeld 1995, S. 68).

Rückgriff vor allem auf die Theorie der Bereichsspezifität des Denkens von Seiler (1973) und der Mikrowelten von Lawler (1981) entwickelt worden, die bereits eine horizontale Sichtweise einer ressourcenorientierten Conceptual-Change-Theorie und die aus einer solchen resultierende Auffassung des Lernens einnimmt, indem sie „von einer nicht-hierarchischen, kumulativen Speicherung der Erfahrung beim Individuum, und zwar entsprechend der situativen Bindung in deutlich getrennten ‚Subjektiven Erfahrungsbereichen‘ (im Weiteren kurz ‚SEB‘)“, ausgeht (Bauersfeld 1983, S. 2). Nach Reuter (2011) beschreiben daher die Modelle des Conceptual Change und SEBe ähnliche Strukturen, so dass das Bauersfeld’sche Modell durch die Betonung der situativen Verankerung von als SEBe verstandenen Konzepten als spezielle Variante des Conceptual Change gesehen werden kann. Dabei misst Bauersfeld der Sprache und Interaktion beim Erwerb neuer SEBe und dem Wechsel zwischen bestehenden SEBen deutlich mehr Bedeutung zu als die Theorie des Conceptual Change. Er nimmt an, dass „zu jedem SEB ein spezifischer Sprachgebrauch“ gehört, so dass „das gleiche Wort in unverbundenen SEB’en in spezifisch verschiedenen Beziehungsnetzen benutzt wird und daher vom Sprecher nicht als ‚dasselbe‘ – d. h. mit einer einheitlichen SEB-übergreifenden Bedeutung versehen – wahrgenommen wird“ (Bauersfeld 1983, S. 32). Die Wortbedeutungen werden somit als situations- und bereichsspezifisch gesehen. Da Sprache – gemäß dem „linguistic relativity principle“ (Whorf 1978, S. 214)¹⁴ – nicht nur Ausdruck des menschlichen Denkens ist, sondern durch ihre Struktur dasselbe prägt und determiniert, ist es nicht verwunderlich, dass bei aller Verschiedenheit von bei Individuen rekonstruierbaren SEBen zwischen ihnen durchaus auch Ähnlichkeiten und Übereinstimmungen festgestellt werden können (vgl. Bauersfeld 1983). Diese „interindividuelle[n] Kongruenzen der subjektiven Erfahrungsbereiche“ bezeichnet Bauersfeld als „intersubjektiv geteilte Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld 1983, S. 33). Diesen können – mit den Worten der Conceptual-Change-Theorie – die fachlichen Vorstellungen zugeordnet werden. Damit kann der Lernprozess nicht abgekoppelt von seiner sozialen Einbettung gesehen werden.

Während das Modell der SEBe in individualistischer Perspektive seinen Blick auf die beim einzelnen Individuum im Lehr-Lern-Prozess verfügbaren SEBe richtet, versucht das Modell der Rahmung (vgl. Goffman 1980; Krummheuer 1984) die Modulation von Vorstellungen in der sozialen Interaktion von als Primärrahmen zu bezeichnenden individuellen Vorstellungen zu sozial geteilten Vorstellungen im Arbeitsinterim zu betrachten. Das Rahmungsmodell beschreibt damit einen vertikalen Conceptual Change auf der sozialen Ebene, während das SEB-Modell einen horizontalen Conceptual Change auf der individuellen Ebene beschreibt. Beide Modelle werden daher von Bauersfeld (1983) als komplementär betrachtet, da sich beide Pro-

¹⁴ Das 1940 durch Whorf postulierte linguistische Relativitätsprinzip hat in Humboldt (1836) einen deutschsprachigen Wegbereiter, wenn dieser die Sprachen nicht nur als Ausdruck des Denkens, sondern als „das bildende Organ des Gedankens“ (S. 50) und im „Sprechen eine notwendige Bedingung des Denkens“ (S. 53) sieht.

zesse wechselseitig beeinflussen. Lernen erfordert somit beim Individuum den Aufbau neuer Vorstellungen und deren situationsangemessene Aktivierung sowie auf sozialer Ebene die interaktive Modulation der Vorstellungen.

Auf manche zunächst vorhandenen Vorstellungen greift das Individuum nach dem Erwerb neuer Vorstellungen nur noch selten oder gar nicht mehr zurück. Bauersfeld (1983) macht in diesem Zusammenhang auf das Phänomen der Regression aufmerksam. Er nimmt an, dass ein SEB nicht absichtlich zerstört, aber bei fehlender Aktivierung langsam dahinschwinden kann bzw. Interferenzen diesen diffuser erscheinen lassen, bis der SEB schließlich vergessen wird. Die beim Lernen feststellbaren individuellen Unterschiede betreffen nach Bauersfeld die vier folgenden, aus der Intelligenztheorie von Meili (zitiert nach Jäger 1973) abgeleiteten Dimensionen:

- (a) Anzahl und Differenziertheit der SEBe,
- (b) Leichtigkeit der Bildung neuer SEBe,
- (c) Leichtigkeit der Erweiterung bzw. Überschreitung bestehender SEBe und
- (d) Leichtigkeit des Wechsels zwischen unterschiedlichen SEBen.

Diese Dimensionen lassen sich in die Conceptual-Change-Theorie als Kriterien für erfolgreichen Conceptual Change sowie als Erklärungsansätze für Schwierigkeiten beim Conceptual Change integrieren.

2.1.3 Kognitive Schichtenstruktur

Auch im Bauersfeld'schen Ansatz wird die Bedeutung des Aufbaus oder Ausbaus unterschiedlicher Vorstellungen zu einem Gegenstand bzw. Sachverhalt wie in der Conceptual-Change-Theorie herausgestellt.

Petri und Niedderer (2001) legen zu diesem Punkt im Zusammenhang mit einer empirischen Untersuchung zu einer Unterrichtseinheit zur Atomphysik in der Sekundarstufe II die Theorie der kognitiven Schichtenstrukturen vor. Nach dieser Theorie kann eine Problemstellung signifikant unterschiedliche ‚rivalisierende‘ Erklärungsmuster bzw. Vorstellungen bei einer Person aktivieren, ohne dass dafür eine wesentliche Variation des Kontextes bzw. der Situation erfolgt ist (vgl. ebd.). Zu einem Gegenstand oder Sachverhalt scheinen somit in einem Individuum mitunter unterschiedliche Vorstellungen vorhanden zu sein, auf die es im günstigsten Fall flexibel und kontextangemessen zugreifen kann. Petri und Niedderer (2001) nehmen aufgrund ihrer Beobachtungen an, dass die Vorstellungen in etwa im Sinne einer „specific theory“ (Vosniadou 1994), verstanden als konzeptueller Bereich in kognitiven Schichten organisiert sind. Diese Schichtenstruktur lässt sich als Endzustand vieler auf einen Gegenstand oder Sachverhalt bezogener Lernprozesse betrachten (vgl. Niedderer & Goldberg 1995), innerhalb derer eine neue Schicht aufgebaut bzw. eine bestehende erweitert wurde. Dabei kann eine

Schicht aus einer anderen hervorgehen und diese als Voraussetzung haben. Doch ähnlich wie Bauersfeld (1983), der sich im Zusammenhang mit den SEB'en Lawlers Vorfahren-Nachfahren-Ordnung der Mikrowelten nicht anschließt, gehen auch Petri und Niedderer (2001) nicht von einer notwendigen Abhängigkeit der Schichten aus, schließen aber die Möglichkeit ausdrücklich mit ein.

„Der Begriff der (kognitiven) Schichtenstruktur impliziert, dass die einzelnen Schichten konstituierenden Vorstellungen ontogenetisch in einer bestimmten zeitlichen Abfolge entstehen können (nicht müssen) und u. U. [...] auch inhaltlich und strukturell aufeinander aufbauen“ (Petri & Niedderer 2001, S. 53f.).

Die Theorie von der kognitiven Schichtenstruktur verbindet sich mit dem Ansatz von Bauersfeld (1983) zu den SEB'en und der Conceptual-Change-Theorie insofern, dass eine ausgeprägte Schichtenstruktur im Sinn von Anzahl und Differenziertheit der SEBe einen situationsangemessenen Wechsel zwischen den entsprechenden Vorstellungen befördert. Dabei wird dieser Wechsel i. d. R. eher unbewusst erfolgen. Soll aber ein bewusster Wechsel zwischen Vorstellungen erfolgen, bedarf es eines metakonzeptuellen Bewusstseins über die Schichtenstruktur (vgl. Petri & Niedderer 2001). Ein solches Bewusstsein ermöglicht einen reflektierten Umgang mit den eigenen Vorstellungen im Hinblick auf deren Verwendungssituationen. Im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion kann ein entsprechendes metakonzeptuelles Bewusstsein nicht nur als allgemeines Unterrichtsziel, sondern vor allem als Dimension der didaktischen Kompetenz des Lehrenden betrachtet werden.

Die Didaktische Rekonstruktion kann zusammenfassend vor dem Hintergrund einer konstruktivistischen Auffassung des Lehrens und Lernens und im Zusammenhang mit einer mit dem Bauersfeld'schen SEB-Modell und der Theorie der kognitiven Schichtenstrukturen verknüpften Conceptual-Change-Theorie als Forschungsrahmen betrachtet werden, in dem im Hinblick auf die Konstituierung von Unterrichtsgegenständen neben den fachwissenschaftlichen Sichtweisen die individuellen Konstrukte der Lernenden zu diesen zur Geltung gebracht werden, um den Aufbau einer ausgeprägten kognitiven Schichtenstruktur sowie einen in dieser gründenden viabilitätsbestimmten Wechsel zu ermöglichen. Dieser Anspruch konkretisiert sich im didaktischen Triplet, den drei Untersuchungsaufgaben der Didaktischen Rekonstruktion, die im Folgenden ausdifferenziert werden.

2.2 Untersuchungsaufgaben der didaktischen Rekonstruktion

Wie bereits die vorausgegangene Darstellung des lerntheoretischen Hintergrunds der Didaktischen Rekonstruktion beschränkt sich die folgende Ausdifferenzierung des didaktischen Triplets nicht auf eine bloße Darstellung derselben im Sinne des Ansatzes von Kattmann et al. (1997), sondern versucht die hier zugrundegelegte Sichtweise auf die entsprechenden Un-

tersuchungsaufgaben mit Bezugnahme auf andere (mathematikdidaktischen) Theorien auszu-differenzieren.

2.2.1 Fachliche Klärung

Bei der interaktiven Konstituierung eines Unterrichtsgegenstandes sind die in der entsprechenden Fachwissenschaft geteilten Vorstellungen zu diesem Gegenstand im Prozess der didaktischen Strukturierung zu berücksichtigen. Grundlagen für diese Aufgabe liefert im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion die fachliche Klärung als „Untersuchung fachwissenschaftlicher Theorien unter Vermittlungsabsicht“ (Gropengießer 2008, S. 173)¹⁵. Teilaufgaben dieser Sachstrukturanalyse sind Sach- und didaktische Analyse (vgl. Kattmann et al. 1997). Demnach ist die fachliche Klärung in mathematikdidaktischer Terminologie nichts anderes als stoffdidaktische Arbeit im weiteren Sinne (vgl. Prediger 2005).

Die im Rahmen der *Sachanalyse* zu betrachtenden Theorien sind ursprünglich persönliche Vorstellungen von Wissenschaftlerinnen oder Wissenschaftlern, „die in einem längeren Formalisierungsprozess entwickelt, kritisiert, modifiziert und publiziert werden“ (Gropengießer 2001, S. 17) und schließlich als sozial geteilte Vorstellungen bzw. „intersubjektiv geteilte Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld 1983, S. 33) der Fachwissenschaft zu betrachten sind. Als solche scheinen sie als subjektunabhängige Objekte, denen eine Existenz unabhängig vom menschlichen Geist in einem objektiven Raum zugeschrieben wird (vgl. ebd.). Nach der Terminologie von Tall und Vinner (1981) ließen sich diese objektivierten Vorstellungen als ‚formal concept definition‘ bezeichnen (vgl. Kap. 3.4.). Eine solche Definition lässt sich allerdings letztlich nur aus sprachlichen Äußerungen der Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, also – in der Terminologie von Tall und Vinner – aus deren ‚personal concept definition‘ rekonstruieren. Somit ist die Sachanalyse die Rekonstruktion der in der Fachwissenschaft geteilten Vorstellung zu einem Gegenstand und Sachverhalt, um diese als normative Sichtweise in der unterrichtlichen Interaktion aktualisieren zu können. Diese Rekonstruktion erfolgt als hermeneutische Analyse von Dokumenten mit fachlich reflektierten Äußerungen von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, wobei neben aktuellen Zeugnissen auch historische Quellen fachwissenschaftlicher Theoriebildung und Praxis zur Analyse herangezogen werden (vgl. Kattmann 2007).

„Gegenstand der fachlichen Klärung sind sowohl der gegenwärtige Stand der Theoriebildung zu einem Thema als auch überholte und historische Theorien, wenn sie einen Beitrag zur Präzisierung oder Ab-

¹⁵ Die von Gropengießer und Kattmann verwendete, traditionelle Vermittlungsmetapher zur Beschreibung des Lehr-Lern-Prozesses scheint vor der konstruktivistischen Ausrichtung der Didaktischen Rekonstruktion eher unpassend. Die Vermittlungsmetapher fokussiert auf die Methodik, der sie die zentrale Bedeutung in der Organisation des Lehr-Lern-Prozesses zuweist. Die Wahl der geeigneten Methoden garantiert demnach die angezielte Vermittlung von Wissen. Zentrale Punkte einer konstruktivistisch-orientierten Didaktik sind dagegen Erfahrung, Erlebnis, Reflexion und Kommunikation (vgl. z. B. Voß 2005).

grenzung aktueller Theorien und Termini liefern bzw. zum Verständnis von Schülervorstellungen beitragen“ (Kattmann et al. 1997, S. 11).

Die Sachanalyse kann aber unmöglich alle gegenwärtigen wie historischen Quellen berücksichtigen. Von Kattmann et al. (1997) wird allerdings gefordert, dass bedeutsame historische wie gegenwärtig herrschende Anschauungen jeweils durch herausragende Texte vertreten sein sollten, wobei offen bleibt, was eine Theorie als bedeutsam und einen Text als herausragend qualifiziert. Die Sachanalyse kann daher nur ausschnitthaft erfolgen und bleibt immer vorläufige Rekonstruktion der geteilten Vorstellungen der jeweiligen Wissenschaftsgemeinschaft.

Da es ‚fachdidaktisches Allgemeinwissen‘ ist, dass die Sachstrukturen der Wissenschaft nicht unmittelbar als Sachstrukturen für den Unterricht übernommen werden können (vgl. Kattmann et al. 1997, S. 9), muss die fachliche Klärung neben der Sachanalyse auch die *didaktische Analyse* umfassen. Duit (2010) weist darauf hin, dass die Sachstruktur für den Unterricht einerseits in aller Regel ‚einfacher‘ als die Sachstruktur der Fachwissenschaft, andererseits aber ‚reicher‘ bzw. ‚vielfältiger‘ ist, weil die ‚elementaren‘ Grundideen der zur Rede stehenden Sache in Kontexte eingebettet werden müssen, damit sie von den Lernenden erlernt werden können und ihnen zugleich als lernenswert erscheinen. Die entsprechenden elementaren Grundideen sind in den fachwissenschaftlichen Vorstellungen zu identifizieren und entsprechen dem, was in der Mathematikdidaktik nach Bruner (1960) auch als ‚fundamentale Ideen‘ (vgl. Wittmann 1975) bezeichnet wird. Diese werden dem Bruner’schen Spiralprinzip entsprechend über die Schuljahre konsequent entwickelt (vgl. Wittmann 1995). Nach Schweiger (1992) erweist sich aufgrund der Vagheit des Grundideen-Begriffs die Identifikation von fundamentalen Ideen jedoch als schwierig.¹⁶ Als Beispiel für eine fundamentale Idee in der Mathematik nennt u. a. Hischer (1998) die ‚Idee der Zahl‘. Diese Idee wird über die gesamte Schulzeit entfaltet, beginnend mit den natürlichen Zahlen über die ganzen und rationalen Zahlen bis hin zu den reellen oder sogar komplexen Zahlen (vgl. Kap. 6.3.1). Für den Bereich der Grundschule findet sich bei Wittmann (1995) eine Liste von Grundideen der Arithmetik, die z. T. als Ausdifferenzierung der fundamentalen Idee ‚Zahl‘ interpretiert werden kann. Auch Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) sehen im Hinblick auf die Zahlbereichserweiterung vier wesentliche Aspekte, nach denen Zahlen charakterisiert werden: Verwendungszweck (Zahlaspekte), Zahldarstellung, Ordnungsgefüge und Rechenoperationen. Diese lassen sich

¹⁶ Schweiger (1992; 2006) versucht, Kriterien zur Identifikation von Grundideen aus der Literatur zu diesem Thema zu extrahieren. Dabei unterscheidet er zwischen deskriptiven und normativen Kriterien. Nach den deskriptiven Kriterien spielen fundamentale Ideen in der historischen Entwicklung der Mathematik eine Rolle (Zeitdimension), sind in verschiedenen Teilgebieten (horizontale Dimension) und auf verschiedenen Ebenen (vertikale Dimension) der Mathematik bedeutsam und in Alltagsaktivitäten verankert (menschliche Dimension) (vgl. Schweiger 2006; Rezat 2013). Fundamentale Ideen sollte zudem im Sinne der deskriptiven Kriterien hilfreich bei der Curriculumskonstruktion sein, die mathematische Praxis und das Wesen der Mathematik erhellen, ein semantisches Netzwerk zwischen den unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik aufbauen und eine bessere Erinnerung ermöglichen (vgl. Schweiger 2006).

durchaus als fundamentale Ideen des Zahlbegriffs verstehen. Somit können fundamentale Ideen für die unterschiedlichen Ebenen der Unterrichtsplanung nach Schulz (1981; 2006) angegeben werden. Im Zusammenhang mit der Perspektivplanung wird nach fundamentalen Ideen der Mathematik bzw. ihrer Teildisziplinen gefragt (z. B. Zahlbegriff). Die Umrissplanung sucht in diesen Grundideen wiederum nach den fundamentalen Ideen (z. B. Zahlaspekte), die in der Prozessplanung weiter differenziert und in Rahmen der Planungskorrektur im Unterrichtsprozess verhandelt und interaktiv von Lehrendem und Lernenden konstituiert werden.

Dabei lässt sich die Identifikation fundamentaler Ideen zu einem bestimmten Inhaltsbereich mit Kattmann et al. (1997) als Elementarisierung begreifen. Elementarisierung bedeutet Vereinfachung der fachwissenschaftlichen Sichtweise im Sinne einer didaktischen Reduktion, die allerdings nicht als schlichte Simplifizierung zu verstehen ist, soll der Forderung Bruners (1960) folgend, ein Lernen in intellektuell redlicher Form entsprechend der Entwicklungsstufe gewährleistet werden. Im Kontext der Prozessplanung und Planungskorrektur ist diese Elementarisierung mit Kattmann et al. (1997) aber auch als Zerlegung in Unterrichtselemente im Hinblick auf die Abfolge ihrer unterrichtlichen Thematisierung zu verstehen.

Zwischen Sachanalyse und didaktischer Analyse als Teilen der fachlichen Klärung besteht Interpendenz, so dass beide Untersuchungsaufgaben wechselseitig zu bearbeiten sind. Die Sachanalyse liefert nämlich mit der Rekonstruktion der geteilten Vorstellungen der Wissenschaftsgemeinschaft das Ausgangsmaterial für die Identifikation fundamentaler Ideen. Die didaktische Analyse wiederum lenkt die Auswahl der Dokumente für eine entsprechende Rekonstruktion.

Die Didaktische Rekonstruktion sieht auch zwischen fachlicher Klärung und Erfassung der Lernerperspektive eine Wechselwirkung. Dabei ermöglicht die fachliche Klärung nicht nur einseitig ein besseres Verstehen der Lernerperspektiven, sondern hilft auch die z. T. in den wissenschaftlichen Aussagen verborgenen Alltagsvorstellungen zu entdecken (vgl. Gropengießer 2001).

2.2.2 *Erfassung der Lernerperspektive*

Die Lernerperspektiven sind nach Wittmann (1992) das ungeheure Potenzial, das Lernende in den Unterricht mitbringen, und als solches eine Ressource, die im Lernprozess genutzt werden muss (vgl. auch Prediger 2005). Daher spielen diese – wie oben erörtert – neben den scheinbar objektivierten fachlichen Vorstellungen eine bedeutende Rolle im Lehr-Lern-Prozess. Sie stellen als individuelle vorunterrichtliche Vorstellungen neben der sozialen, situativen, motivationalen und emotionalen die kognitive Dimension der individuellen, für ein bestimmtes Thema relevanten Lernbedingungen, dar (vgl. Gropengießer 2001; 2008).

Als vorunterrichtlich werden solche Vorstellungen qualifiziert, denen keine explizite unterrichtliche Auseinandersetzung zugrunde liegt. Duit (2008) sieht als Ursprungsort solcher Vorstellungen den Alltag, aber vor allem auch die Alltagssprache. Duit hält es daher durch aus für angebracht, nicht nur von Lernerperspektiven, vorunterrichtlichen Vorstellungen, sondern auch von *Alltagsvorstellungen* zu sprechen. Dabei werden unter Vorstellung kognitive Konstrukte verschiedener Komplexitätsebenen (vgl. Kattmann et al. 1997) vom Begriff über das Konzept und die Denkfigur bis hin zur Theorie (vgl. Gropengießer 2006) verstanden. Dieser wenig konturierte Vorstellungsbegriff lässt sich mit unterschiedlichen Theorietraditionen der Psychologie wie Mathematikdidaktik verbinden und an diesen im Hinblick auf die Erfassung der Lernerperspektive ausschärfen (vgl. Kap. 3). Diese Erfassung der Lernerperspektive wird als empirische Untersuchungsaufgabe verstanden, wobei die individuellen Vorstellungen der Lernenden als ‚mentale Werkzeuge‘ bzw. ‚gedankliche Konstrukte‘ (vgl. Kattmann 2007) nicht unmittelbar zugänglich sind und sich lediglich aus empirischen Daten rekonstruieren lassen.

„Vorstellungen, seien es nun Begriffe, Konzepte, Denkfiguren oder Theorien, lassen sich nicht an die Tafel oder auf ein Blatt Papier schreiben. Vorstellungen gehören in den gedanklichen Bereich und können lediglich bezeichnet werden“ (Gropengießer 2008, S. 174f.).

Rekonstruktive Aufgabe ist es „von Zeichen auf fremde Vorstellungen zu schließen“ (Gropengießer 2008, S. 175). Dabei können diese Zeichen schriftlich oder mündlich vermittelt vorliegen.

Eine entsprechende Rekonstruktion bleibt jedoch ebenso wie die fachliche Klärung immer vorläufiger Natur. Sie ist im Hinblick auf die Qualität der aus ihr folgenden Aussagen Kriterien geleitet. Da es sich bei der Erfassung der Lernerperspektive um eine qualitative Untersuchungsaufgabe handelt, lassen sich hierbei Gütekriterien qualitativer Sozialforschung als Orientierung nutzen. Mit Steinke (2008) können wenigstens intersubjektive Nachvollziehbarkeit, Limitation und reflektierte Subjektivität als entsprechende Kriterien genannt werden. Die intersubjektive Nachvollziehbarkeit kann dabei vor allem durch eine möglichst lückenlose Dokumentation des Erfassungsprozesses gewährleistet werden. Zusätzlich hilft auch die von Mayring (2002, S. 145f.) vorgeschlagene Regelgeleitetheit, d. h. eine Analyse nach klar definierten Ablaufmodellen, die Rekonstruktionsergebnisse für andere nachvollziehbarer werden lassen. Außerdem sollten die Daten in argumentativer Weise interpretiert werden (vgl. ebd., S. 145). Durch den kontrastierenden Vergleich von Einzelfällen sowie die Suche nach auffälligen Phänomenen werden die Grenzen der Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse, also die Limitation bei der Erfassung, im Blick behalten. Im Rahmen des gesamten Erfassungsprozesses muss der Erfassende sich der Lenkung der Erfassung durch seine eigenen Perspektiven auf den Gegenstand oder Sachverhalt bewusst sein und diese explizit machen. Durch die Nutzung unterschiedlicher Erhebungs- und vor allem Auswertungsverfahren, einer sog. Methoden-

Triangulation, lässt sich zudem eine methodisch bedingte Einseitigkeit bei der Erhebung und Interpretation der Daten zur Erfassung der Lernerperspektive vermeiden (vgl. ebd., S. 147f.). Schließlich muss – kommunikativer Validierung entsprechend (vgl. ebd., S. 147) – die Validität der Rekonstruktionen in der unterrichtlichen Kommunikation im Rahmen der didaktischen Strukturierung geprüft werden, so dass die Explikation der rekonstruierten Schülervorstellungen im Rahmen der konstruktiven Untersuchungsaufgabe in der Interaktion mit den Lernenden die Erfassung der Lernerperspektiven komplettiert. Hierin zeigt sich die bereits angesprochene Interdependenz der Untersuchungsaufgaben der Didaktischen Rekonstruktion.

Lernende habe i. d. R. vielfältige und z. T. auch von den wissenschaftlichen Sichtweisen abweichende Perspektiven auf einen unterrichtlich zu thematisierenden Gegenstand oder Sachverhalt. Die Erfassung der Lernerperspektive umfasst „alle von Schülern verwendeten Vorstellungen zu einem Thema und nicht etwa nur das Wissen der Schülerinnen und Schüler im Sinne fachlicher Kenntnisse“ (Kattmann et al. 1997, S. 11). Ausgangspunkt für das Lernen ist schließlich nicht nur das, was der Lernende über den unterrichtlichen Gegenstand bereits weiß, sondern auch das, was er zu wissen glaubt. Für die Erfassung der Lernerperspektive spielt daher der Wahrheitswert der entsprechenden Perspektiven keine Rolle. Folglich werden im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion die vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden als individuelle Aspekte gleichwertig neben den fachlichen Aspekten für die Rekonstruktion von Unterrichtsinhalten genutzt (vgl. Kattmann et al. 1997).

Stark (2003) weist darauf hin, dass Smith et al. (1993) als Bewertungskriterium von Konzepten nicht deren Veridikalität, sondern deren Funktionalität verwenden. Aus konstruktivistischer Sichtweise ist eine als Viabilität verstandene Funktionalität beim Lernen von zentraler Bedeutung. Lernen wird konstruktivistisch nämlich verstanden als Prozess, in dem Vorstellungen aufgebaut werden, die sich für eine erfolgreiche Lebensbewältigung als hilfreich erweisen. In diesem Zusammenhang impliziert die Funktionalität einer Vorstellung, dass diese sich in einer Situation als erfolgreich, viabel gezeigt hat (vgl. Smith 1993, S. 147f.). Diese Viabilität der Lernerperspektiven wird auch in der Didaktischen Rekonstruktion berücksichtigt.

„In aller Regel sind eben viele der vorunterrichtlichen Vorstellungen nicht schlicht falsch, sondern haben sich in Alltagskontexten bestens bewährt – und bewähren sich in diesen Kontexten auch dann noch, wenn man die wissenschaftliche Sicht erlernt hat“ (Kattmann et al. 1997, S. 6).

Aufgrund ihrer Viabilität besitzen Lernerperspektiven daher einen Eigenwert (vgl. Kattmann 2007) und fordern entsprechend einen wertschätzenden Umgang, auch wenn diese aus fachlicher Sicht als unzureichend oder fehlerhaft erscheinen. Zwischen den als Unterrichtsnorm gesetzten (z. T. didaktisch reduzierten) fachwissenschaftlichen und den individuellen Vorstellungen besteht nämlich eine Inkommensurabilität, d. h. dass die eine nicht als Maßstab der anderen angesehen werden kann, da jede in ihren Zusammenhängen Viabilität besitzt.

„Die [von den Lernenden] geäußerten lebensweltlichen Vorstellungen und Alltagstheorien sind keine fachwissenschaftlichen Aussagen. Sie können daher nicht angemessen erfasst werden, wenn sie anhand eines fachlichen Rasters beurteilt werden, das kontextfremd an sie angelegt wird“ (Gropengießer 2001, S. 17).

Folglich sind gebräuchliche Bezeichnungen wie ‚Fehlvorstellungen‘, ‚naive Vorstellungen‘ und ‚lernhinderliches Vorwissen‘ irreführend. Sie weisen Lernerperspektiven als defizitär aus, obwohl sich diese in bestimmten Kontexten als überaus erfolgreich und z. T. effizienter als die wissenschaftlichen Vorstellungen erweisen mögen. Zudem liegen den Vorstellungen der Lernenden Konstruktionsprozesse zugrunde, die es als solche bereits zu würdigen gilt. Von Glasersfeld (2005) weist daher zu Recht darauf hin, dass eine Bewertung von Lernerperspektiven als ‚falsch‘ oder ‚richtig‘ unangemessen ist.

Im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion werden unterrichtlich normative und individuelle Vorstellungen trotz ihrer Inkommensurabilität in Beziehung gesetzt, um innerhalb der didaktischen Strukturierung die individuelle Differenzierung der kognitiven Schichtenstruktur zu fördern. Es scheint in diesem Zusammenhang daher angemessen, die individuellen Vorstellungen als *normentsprechend* und *normverschieden* zu qualifizieren. Normentsprechend sind jene Vorstellungen, die Gemeinsamkeiten zu den entsprechenden normativen Vorstellungen aufweisen. Im Gegensatz dazu sind normverschiedene Vorstellungen solche, die entsprechende Gemeinsamkeiten nicht aufweisen. Z. T. besitzen sie aber Gemeinsamkeiten mit in der Geschichte der Disziplin vertretenen und z. T. auch intersubjektiv geteilten, also historisch normativen Vorstellungen.

„Offenbar gibt es Parallelen zwischen Schülervorstellungen und dem Verlauf historischer Erkenntnisprozesse in der Fachwissenschaft. Es macht also Sinn, die Entwicklung historischer Theorien, die im Laufe der Jahrhunderte tiefgreifende Veränderungen erfahren haben, zu studieren und zu untersuchen, welche Parallelen im Denken der Schüler vorliegen“ (Barke & Harsch 2011, S. 10).

So wird u. a. ein Parallelismus zwischen der historischen und individuellen Konzeptentwicklung in dem Sinne vermutet, dass jeder Lernende im Lernprozess natürlicherweise historische Perspektiven auf den Gegenstand oder Sachverhalt einnehmen würde, um schließlich die aktuell-normativen Vorstellungen aufzubauen (vgl. Kap. 7.1.2). Unabhängig vom Wahrheitswert dieser Hypothese fordert die Erfassung der Lernerperspektive im Rahmen der Didaktischen Rekonstruktion eine kriteriengeleitete und umfassende empirisch-qualitative Untersuchung der vorunterrichtlichen Vorstellungen der Lernenden, wobei lediglich eine Qualifizierung der Vorstellungen nach normentsprechend und -verschieden im oben beschriebenen Sinn als hilfreich und angemessen erscheint.

2.2.3 Didaktische Strukturierung

Die vorläufigen Erkenntnisse aus fachlicher Klärung und Erfassung der Lernerperspektive werden in der konstruktiven Untersuchungsaufgabe der didaktischen Strukturierung zusammengeführt. Unter der didaktischen Strukturierung wird dabei die Unterrichtsplanung im Hinblick auf die grundsätzlichen Entscheidungen über Ziel, Inhalt und Methoden verstanden (vgl. Kattmann 2007).

Als allgemeines *Ziel* des Unterrichts kann entsprechend der bisherigen Darstellung der Aufbau und Ausbau einer kognitiven Schichtenstruktur beim einzelnen Lernenden zum jeweiligen Unterrichtsgegenstand sowie die Entwicklung eines metakonzeptionellen Bewusstseins über die entsprechende Schichtenstruktur angesehen werden. Dieses allgemeine Ziel erfordert im je konkreten Implikationszusammenhang von Ziel, Inhalt und Methode allerdings eine Spezifikation, um Lernzielräume im Sinne von Voß (2005) für einzelne Unterrichtseinheiten zu konturieren.

Mit Jank und Meyer (2008) ist zwischen Thema und Inhalt des Unterrichts zu differenzieren. Dabei wird das *Thema* von Richtlinien, Schulbuch, Lehrenden und/oder Lernenden vorgegeben, benennt den Unterrichtsgegenstand (vgl. Meyer 2009) und bestimmt damit sowohl die fachliche Klärung als auch die Erfassung der Lernerperspektive.

Der *Inhalt* dagegen ist die interaktive Konstituierung eines Unterrichtsgegenstandes im Unterrichtsprozess, die sich in diesem anzielen, aber nicht für diesen festlegen lässt. Der Unterrichtsgegenstand entsteht schließlich nicht allein auf Grundlage einer einfachen Reduktion oder Transformation des fachwissenschaftlichen Gegenstandes unter didaktischer Perspektive als ausschließlich stoffdidaktische Aufgabe, sondern als interaktive Rekonstruktion desselben durch Lehrenden und Lernende.

Die auf Inhalt und Ziel bezogene *methodische Entscheidung* umfasst die Entscheidung über die Sozial- und Organisationsform¹⁷ unterrichtlicher Interaktion sowie die Auswahl dessen, was als Medium im Interaktionsprozess anzusehen ist (z. B. Arbeitsmittel und Veranschaulichungen sowie Kontexte und Modelle, aber auch Lehrbücher, Arbeitsblätter und dgl.). Was im Entscheidungsbereich der Medien bezogen auf Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bei der Unterrichtsplanung im Bewusstsein der Mathematikdidaktik ist, nämlich dass diese immer zunächst einen Lernstoff darstellen, bevor sie als Interaktionsmedien Verwendung finden können (vgl. z. B. Lorenz 1998, S. 183 ff.; Krauthausen & Scherer 2007, S. 240 ff.; Schipper

¹⁷ Das hier ‚Organisationsform‘ Genannte entspricht dem, was Peterßen (2000) mit dem eher unglücklichen Begriff ‚Lehr- und Lernverfahren‘ bezeichnet. Unglücklich erscheint der Begriff deshalb, weil damit die Vorstellung verbunden werden kann und z. T. auch verbunden wird, dass angestrebte Lernziele mittels entsprechender Lehr- und Lernverfahren mit großer Wahrscheinlichkeit oder gar Sicherheit erreicht werden können. Eine entsprechende Sicherheit des Lernerfolgs kann aber aus konstruktivistischer Sicht letztlich keine unterrichtliche Organisationsform bieten.

2009, S. 297), gilt durchaus für alle Aspekte der methodischen Entscheidung. Auch die Sozialformen wie Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit sowie die verschiedenen Organisationsformen unterrichtlicher Interaktion wie z. B. Gruppenpuzzle, Postersession oder Portfolio-Arbeit müssen von den Lernenden zunächst erarbeitet werden. Erst nach einer entsprechenden Erarbeitung können diese Methoden ihre von Voß (2005) beschriebene Funktion der Lernbegleitung und Optimierung des Lernens erfüllen.

Ziel, Inhalt und Methode bilden in diesem Sinne die Entscheidungsperspektiven der didaktischen Strukturierung, wohingegen die fachliche Klärung und die Erfassung der Lernerperspektiven die Entscheidungsgrundlagen darstellen. Dabei werden die in die didaktische Strukturierung eingebrachten Lernerperspektiven als gleichwichtige und gleichwertige Quelle zur Konstruktion von Unterricht neben den in der fachlichen Klärung rekonstruierten und für den Unterricht normativen Vorstellungen angesehen (vgl. Gropengießer 2001; 2008). Beide Entscheidungsgrundlagen werden so verknüpft, dass zum einen die Charakteristika beider Perspektiven, zum anderen die lernförderlichen Korrespondenzen und voraussehbaren Lernschwierigkeiten deutlich werden (vgl. Kattmann et al. 1997). Diese Verknüpfung erfolgt als wechselseitiges Vergleichen beider Perspektiven, bei dem sowohl Eigenheiten, Gemeinsamkeiten wie Verschiedenheiten als auch Begrenztheiten der jeweiligen Vorstellung erkennbar werden.

Als Ergebnis dieses Vergleiches unter den entsprechenden Entscheidungsperspektiven sieht Prediger (2005) Lernarrangements, die für spezifische Themengebiete Lernwege von den Lernerperspektiven hin zu fachlich erwünschten Vorstellungen aufzeigen.¹⁸ Nach Kattmann (2007) liefert die didaktische Strukturierung jedoch nicht nur ganze Lernarrangements, sondern Material für die Unterrichtsdurchführung unterschiedlicher Konturierung im Spektrum von Leitideen bis hin zu Lernumgebungen für die unterrichtliche Thematisierung bestimmter Gegenstände oder Sachverhalte.

Unabhängig vom Konturierungsgrad des Strukturierungsergebnisses fordert die Vorläufigkeit der Erkenntnisse aus fachlicher Klärung und Erfassung der Lernerperspektiven Offenheit mindestens im Sinne weiterer Elementarisierung und kommunikativer Validierung. Erst in der unterrichtlichen Interaktion werden die jeweiligen Perspektiven aktualisiert. Daher sollte der Unterrichtsplan nicht als Handlungsprogramm für den Unterricht und die daran Beteiligten, sondern als Handlungsentwurf für mögliches Handeln begriffen werden (vgl. Peterßen 2000). Die didaktische Strukturierung kann somit nicht als eine ausschließlich dem Unterricht vorgegreifende Aufgabe des Lernarrangements entwickelnden Forschers oder der planenden Lehrkraft betrachtet werden. Sie verändert und aktualisiert sich im Interaktionssystem des Unter-

¹⁸ Die Sichtweise von Prediger (2005) ist nicht unproblematisch, zumindest aber missverständlich. Sie legt zum einen ein eher vertikales Verständnis des Conceptual Change zugrunde. Zum anderen wird der Anschein erweckt, als garantierten die in den entsprechenden Lernarrangements aufgezeigten Lernwege den Lernerfolg.

richts unter Beteiligung von Lehrendem wie Lernenden, so dass die didaktische Strukturierung letztlich erst im Unterrichtsprozess zum Abschluss gebracht wird (vgl. auch Meyer 2009).

Folglich liegen Planung und Durchführung von Unterricht sowohl in den Händen der Lehrenden als auch der Lernenden. Da nämlich zur Sichtweise des Lehrenden bereits gehört, „was sich der Lehrer über den Schüler und die zu lernende Sache gedacht hat...“ (Gruschka 2002, S. 123), bliebe ohne hinreichende Beteiligung der Lernenden bei der didaktischen Strukturierung die Hinterbühne des didaktischen Geschehens nur teilweise ausgeleuchtet. Die Sichtweisen der Lernenden blieben zumindest insofern im Dunkel, als diese lediglich als Rekonstruktion des Lehrenden im Strukturierungsprozess präsent wären. Den Lernenden käme lediglich eine Objektposition in Bezug auf Planung und Durchführung des Unterrichts zu. Dies aber widerspräche der konstruktivistischen Auffassung von Lernen, wonach die Lernenden ihren Lernprozess aktiv gestalten. Sollen aber Lehrende und Lernende als kollektives Subjekt des Unterrichts begriffen und der aus dieser Subjektposition auch den Lernenden zukommenden didaktischen Kompetenz¹⁹ (vgl. Klingberg 1990) Rechnung getragen werden, müssen u. a. die Schülervorstellungen zur Konstituierung des Unterrichtsgegenstandes im gesamten Unterrichtsprozess explizit werden. Die notwendige Offenheit des Unterrichts zielt folglich wesentlich auf diese Explikation der Lernerperspektiven durch die Lernenden selbst und trägt dadurch deren Zuständigkeit für den unterrichtlichen Kommunikationsprozess Rechnung. Nur in Anerkennung dieser Zuständigkeit kann letztlich eine interaktive Wissenskonstruktion auf der Grundlage kollektiver Argumentation (vgl. Miller 1986) gelingen. Darüber hinaus fordert letztlich auch die je spezifische Heterogenität der konkreten Lerngruppe die Explikation der Lernerperspektiven während des Unterrichtsprozesses, um individualisiertes, besser personalisiertes Lernen²⁰ zu ermöglichen.

¹⁹ Der Klingberg'sche Kompetenzbegriff ist vom verbreiteten Kompetenzbegriff Weinerts (2001) insofern zu unterscheiden, als Klingberg (1990) neben Fähigkeiten und Fertigkeiten sowie der Bereitschaft und Fähigkeit, diese zu nutzen auch die entsprechende Zuständigkeit betont. Demnach versteht Coriand – die Klingberg'sche Position präzisierend – unter der didaktischen Kompetenz der Lernenden „ihre objektiv gegebene Zuständigkeit für unterrichtliche Kommunikationsprozesse [sowie] ihre Urteils- und Handlungsfähigkeit, die sich auf aktive Teilhabe an der Planung, Gestaltung und Auswertung unterrichtlicher Kommunikationsprozesse bezieht. Didaktische Kompetenz schließt sowohl Verantwortung für den eigenen Lernprozess ein als auch Mitverantwortung für das Lernen anderer“ (Coriand 2004, S. 201).

²⁰ Der im deutschen Sprachraum als Synonym für individualisiertes Lernen im englischen Sprachraum verbreitere und auf den philosophischen Personalismus bezogene Begriff des personalisierten Lernens (engl. 'personalized learning') scheint bei Bezug auf einen relationstheoretischen Begriff der Person im Zusammenhang mit den gemeinten Lernprozessen geeigneter, da er eher die sich in der Interaktion ereignende interindividuelle Komponente des Lernens integriert.

2.3 Forschungsaspekte

Die Didaktische Rekonstruktion stellt einen geeigneten Forschungsrahmen dar, in dem die unter rekonstruktiver wie konstruktiver Forschungsperspektive aufgeworfenen Fragen Antworten finden können. Dabei lassen sich folgende Forschungsaspekte ableiten:

- Zunächst ist der Begriff der Lernerperspektive unter Rückgriff auf psychologische wie mathematikdidaktische Theorien und im Hinblick auf die Entwicklung einer empirischen Forschungsmethode zur Rekonstruktion der Lernerperspektive zu klären (Kap. 3-6).
- Anschließend erfolgt die didaktische Rekonstruktion mit Aspekten zur fachlichen Klärung, empirischer Erfassung der Lernerperspektive und Entwicklung von Prinzipien für den Umgang mit negativen Zahlen in der Grundschule (Kap. 7-10).

Abschließend sei bemerkt, dass wenn auch Kattmann et al. (1997) die Didaktische Rekonstruktion zunächst vornehmlich als Forschungsrahmen entwerfen, deren Potenzial auch im Hinblick auf die konkrete Unterrichtsplanung erkennbar ist (vgl. auch Jank & Meyer 1991, S. 340). Insofern ließe sie sich auch als allgemeines Unterrichtsprinzip begreifen. Dabei zeigt sie eine gewisse Nähe zu dem, was in der Mathematikdidaktik als fortschreitende Schematisierung (Treffers 1983) bzw. fortschreitende Mathematisierung (engl.: *progressiv mathematization*, vgl. Gravemeijer & Doorman 1999) bezeichnet wird²¹, beschreibt sie doch wie diese den unterrichtlichen Prozess von vorläufigen, informellen Ansätzen zu konventionalisierten Verfahren, Techniken, Begriffen und Vorstellungen (vgl. Krauthausen & Scherer 2007, S. 142). Im Zusammenhang mit der fortschreitenden Mathematisierung ermöglicht ein herausforderndes und motivierendes Problem als Ausgangspunkt den Lernenden, ihre Sichtweise auf dieses Problem bzw. die damit verbundenen Gegenstände und Sachverhalte im Rahmen einer informellen Problembearbeitung zu explizieren. Die so explizierten Lernerperspektiven dienen im Folgenden als Grundlage für den an unterrichtlich normativen Vorstellungen orientierten Konventionalisierungsprozess. Dabei erfolgt im Unterrichtsgang ständig ein wechselseitiges Aushandeln der Perspektiven mit Bezug auf die Problembearbeitung. Auf diese Weise gestalten und verantworten Lernende den Unterricht mit. Ein solcher Schematisierungsprozess erweist sich als Prozess zunehmender Verallgemeinerung, Verkürzung, Optimierung und Annäherung an Konventionen, kurz als Prozess vom Singulären zum Regulären (vgl. Krauthausen & Scherer 2007).

Hefendehl-Hebeker (1989b) zeigt eindrucksvoll, wie ein Unterricht zu negativen Zahlen unter einer entsprechenden Perspektive für Lernende in der Sekundarstufe entworfen werden könn-

²¹ Fortschreitende Mathematisierung besitzt dabei die Komponenten horizontaler und vertikaler Mathematisierung. Mit *horizontaler Mathematisierung* wird Prozess von Sachsituationen zu den entsprechenden mathematischen Modellen bezeichnet, wobei mit *vertikaler Mathematisierung* der Prozess von individuellen zu konventionalisierten Lösungsansätzen und Sichtweisen gemeint ist (vgl. Gravemeijer & Doorman 1999).

te. Die didaktische Kompetenz der Lernenden zur Geltung bringend schafft sie Räume, in denen die Lernenden ihre Vorstellungen explizieren und in den unterrichtlichen Kommunikationsprozess zur Konstituierung des entsprechenden Gegenstandes einbringen können. Für die Thematisierung negativer Zahlen in der Grundschule ließe sich der oben vorgestellte Unterricht von Aze (1989) als gelungenes Beispiel anführen.

Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative
Zahlen

Metaphernanalytisch orientierte Erkundungen im
Rahmen didaktischer Rekonstruktion

Rütten, C.

2016, XVI, 336 S. 57 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-14195-0