

2. Modellierung

Die Einbeziehung von Realitätsbezügen in den Mathematikunterricht wird in der fachdidaktischen Diskussion zwischenzeitlich seit über 100 Jahren gefordert. Spätestens seit der Meraner Konferenz 1905 begleitet die Diskussion über Anwendungen im Mathematikunterricht in ihren verschiedenen Ausprägungen die Forschung zum Mathematikunterricht (Kaiser-Messmer, 1986, S. 31 ff). Dabei ist die Notwendigkeit, Anwendungen mit Realitätsbezügen im Mathematikunterricht zu behandeln, weltweit anerkannt. Dies wird deutlich an der Vielzahl von internationalen Publikationen wie beispielsweise der Übersichtsstudie, der 14th ICMI Study zu Mathematical Modelling and Applications (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007), den Veröffentlichungen der ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) (z.B. Kaiser, Blum, Borromeo Ferri und Stillmann, 2011) oder den Ausführungen der OECD (OECD, 2013):

The PISA 2012 framework is designed to make mathematics relevant to 15-year-old students more clear and explicit, while ensuring that the items developed remain set in meaningful and authentic contexts. The mathematical modelling cycle, used in earlier frameworks (e.g. OECD, 2003) to describe the stages individuals go through in solving contextualized problems, remains a key feature of the PISA 2012 framework. It is used to help define the mathematical processes in which students engage as they solve problems – processes that are being used for the first time in 2012 as a primary reporting dimension. A new optional computer-based assessment of mathematics (CBAM) is also available for countries in 2012.

Unter Modellierung wird dabei (wie auch in dieser Arbeit) der gesamte Prozess, ausgehend von einer Fragestellung aus der Realität, deren Übertragung in die Sprache der Mathematik, der Bearbeitung des so entstandenen mathematischen Problems sowie die Interpretation und Prüfung der Ergebnisse in Hinblick auf die Bedeutung für die Ausgangsfragestellung verstanden.

In der fachdidaktischen Diskussion wurde die Bedeutung von Modellierungsprozessen für den Unterricht ausführlich begründet (z. B. Blum und Niss (1991) hier

dargestellt ab Seite 16). Durch die Beschlüsse der Kultusministerkonferenz, in der *Mathematisch modellieren* neben *Mathematisch argumentieren*, *Probleme mathematisch lösen*, *Mathematische Darstellungen verwenden*, *mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* und *Mathematisch kommunizieren* als eine der sechs im Mathematikunterricht zu erwerbenden Kompetenzen aufgeführt ist, ist die Vermittlung von Modellierungskompetenzen im Unterricht in Deutschland formal in allen Schulformen und Jahrgangsstufen festgeschrieben. Dabei wird über die verschiedenen Schulstufen hinweg von der Primarschule bis zum Abitur das Modellierungskonzept angepasst an die Lernentwicklung der Schülerinnen und Schüler erweitert. Für die Primarstufe werden die folgenden Anforderungen zum Modellieren formuliert (KMK, 2005, S. 8):

- *Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,*
- *Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen,*
- *zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren.*

Für den mittleren Schulabschluss wird das Konzept erweitert, es wird nicht mehr von Sachaufgabe gesprochen, sondern von Situationen und Modellen (KMK, 2004, S. 8):

- *den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen übersetzen,*
- *in dem jeweiligen mathematischen Modell arbeiten,*
- *Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen.*

Für die Sekundarstufe I werden die Anforderungen im Bereich Modellieren präzisiert, indem sie für die unterschiedlichen Anforderungsbereiche gestuft formuliert werden (KMK, 2004, S. 14):

- *Reproduzieren:*
 - *vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen*
 - *einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen*

- *Resultate am Kontext prüfen*
- *Zusammenhänge herstellen*
 - *Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen*
 - *Ergebnisse einer Modellierung interpretieren und an der Ausgangssituation prüfen*
 - *einem mathematischen Modell passende Situationen zuordnen*
- *Verallgemeinern und Reflektieren*
 - *komplexe oder unvertraute Situationen modellieren*
 - *verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichnungen, strukturierte Darstellungen, Ablaufpläne) reflektieren und kritisch beurteilen*

Für die Anforderungen zum Abitur sind die Formulierungen nahezu identisch zu denen der Sekundarstufe I (KMK, 2012, S. 17), die höhere Komplexität für die Schülerinnen und Schüler realisiert sich in der Verwendung anspruchsvollerer Mathematik und in der höheren Komplexität der modellierten Situationen (vergl. z. B. KMK, 2012, S. 44 ff.).

Trotz all dieser Entwicklungen konstatiert Blum (2007, S. 5) jedoch: „Alle Untersuchungen zeigen, dass im Alltagsunterricht in Deutschland (und auch anderswo) Modellieren eher wenig vorkommt. Wenn Realitätsbezüge behandelt werden, dann sind es vorwiegend Textaufgaben zum jeweiligen Stoffgebiet, die für die nächste Klassenarbeit eingeübt werden.“ Seitdem hat sich in der Unterrichtspraxis möglicherweise etwas, aber nur wenig verändert, es kann daher davon ausgegangen werden, dass Modellieren im breiten Sinne im Schulalltag nach wie vor eher selten realisiert wird. Zur Etablierung von Modellierungstätigkeiten in der Schule sind dementsprechend noch weitere Hürden zu überwinden.

Im weiteren Verlauf wird zunächst der Modellierungsbegriff im Allgemeinen und in der Mathematik beleuchtet, gefolgt von Aspekten der fachdidaktischen Diskussion zum Modellieren in der Schule. Es wurde hierbei auf diejenigen Aspekte fokussiert, die bei der Durchführung der hier untersuchten Modellierungsaktivitäten (siehe S. 119 ff.) wesentlich waren und dementsprechend in dem Masterseminar (siehe S. 121 ff.) thematisiert wurden.

2.1. Der allgemeine Modellbegriff

In den Bildungsstandards sind die Aussagen zu den einzelnen Kompetenzen sehr kurz und es wird nur stichwortartig erläutert, was unter Modellierung zu verstehen

ist. Hinter diesen kurzen Passagen steht jedoch ein umfangreiches theoretisches Konzept, auf das die Beschlüsse der Kultusminister implizit hinweisen. Das fachdidaktische Konzept für das mathematische Modellieren lässt sich dabei als Teil eines umfangreichen Modellierungskonzeptes sehen, was deutlich macht, dass die Behandlung mathematischen Modellierens in der Schule als Beitrag zur Bildung über den Mathematikunterricht hinaus Bedeutung hat.

Mahr (2008) stellt eine umfassende Beschreibung des Modellierungsbegriffs vor. Er analysiert dazu die Verwendung des Ausdrucks *Modell* in vielfältigen historischen Kontexten (Mahr, 2008, S.187 -191), in fachwissenschaftlichen Kontexten (Mahr, 2008, S.192 -199) sowie in aktuellen Sprachsituationen und entwickelt daraus ein komplexes Modell des Modellbegriffs selbst. Dabei treten ganz unterschiedliche Facetten des Ausdrucks mit in Erscheinung, wie die Person, die einem Maler oder Fotografen als Modell dient (Mahr, 2008, S. 200), das Modell eines Gegenstandes als Prototyp für den Produktionsprozess (ebenda) oder das maßstäbliche Modell eines Gebäudes zur abbildhaften Darstellung eines Ausschnitts der Realität (Mahr, 2008, S. 191). Mahr geht dabei auch auf informationstheoretische und philosophische Konzeptualisierungen des Modellbegriffs ein (Mahr, 2008, S. 193 f.), unter anderem das Konzept von Stachowiak (1973), auf das im Folgenden fokussiert wird.

Der Begriff Modellierung wurde unter anderem in der Erkenntnistheorie von Stachowiak (1973) sehr grundlegend analysiert. Dabei wird ein sehr allgemeiner Modellbegriff entwickelt, der sich auf sämtliche Aspekte menschlichen Denkens bezieht, womit diese Sichtweise auch die mathematische Modellierung umfasst. Diese Begriffsbildung umfasst dementsprechend auch das mathematische Modellieren, so dass das mathematische Modellieren eingebettet in einen umfassenden Theorierahmen gesehen werden kann.

Nach Stachowiak (1973) sind Modelle durch die folgenden drei Eigenschaften definiert:

1. Abbildungsmerkmal: *Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.*
2. Verkürzungsmerkmal: *Modelle erfassen im Allgemeinen nicht alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und / oder Modellbenutzern relevant erscheinen.*
3. Pragmatisches Merkmal: *Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktion*

- a) für bestimmte - erkennende und / oder handelnde, modellbenutzende - Subjekte,
- b) innerhalb bestimmter Zeitintervalle und
- c) unter Einschränkung auf bestimmte gedankliche oder tatsächliche Operationen.

(Stachowiak, 1973, S. 131 f.)

Über die abbildungsmäßige Originalbezogenheit hinaus ist mithin der allgemeine Modellbegriff dreifach pragmatisch zu relativieren, Modelle sind nicht nur Modelle von etwas. Sie sind auch Modelle für jemanden, einen Menschen oder einen künstlichen Modellbenutzer. Sie erfüllen dabei ihre Funktionen in der Zeit, innerhalb eines Zeitintervalls. Und sie sind schließlich Modelle zu einem bestimmten Zweck. Man könnte diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Eine pragmatisch vollständige Bestimmung des Modellbegriffs hat nicht nur die Frage zu berücksichtigen, wovon etwas Modell ist, sondern auch, für wen, wann und wozu bezüglich seiner je spezifischen Funktionen es Modell ist. (Stachowiak, 1973, S. 131 f.)

Stachowiak (1973) analysiert in seiner erkenntnistheoretischen Arbeit Modelle als grundlegende Art und Weise, sich auf Realität zu beziehen und untersucht dabei die auftretenden semantischen Strukturen, nicht jedoch den Prozess, in dem Modelle erstellt werden. Der Modellierungsbegriff wird dabei aus erkenntnistheoretischer Sicht sehr grundlegend gesehen: Bereits die basale Wahrnehmung der Welt durch einen Betrachter geschieht dadurch, dass die Welt abgebildet wird und der Informationsgehalt spezifisch für den Zweck in der jeweiligen Situation reduziert wird, erfüllt also die Kriterien für den Modellbegriff. Diese Sichtweise der aktiven Konstruktion und Auswahl von Informationen bei der Wahrnehmung durch den Betrachter ist in der neueren Psychologie gut belegt (siehe z. B. Rösler, 2011, S. 54 ff.).

Die Sichtweise von Stachowiak (1973) kann folgendermaßen zusammengefasst werden: Jedes Denken basiert auf Modellen, im Alltag sowie in allen Wissenschaften. Für die Anwendung von Mathematik zur Betrachtung von realen Situationen ist damit eine Beschreibung mit Hilfe von Modellen eine Vorgehensweise, die sich folgerichtig in das erkenntnistheoretische Konstrukt von Stachowiak (1973) einordnen lässt. Modellierung in der Mathematik ist dementsprechend kein von anderen Bereichen abgetrenntes spezielles Vorgehen, sondern exemplarisch für den wissenschaftlichen Bezug auf die Welt insgesamt, und kann damit in

der Schule als paradigmatisches Beispiel für dieses Konzept des Weltbezugs eingesetzt werden.

2.1.1. Ziele und Konzepte des Modellierens im Mathematikunterricht

Die Ziele von Modellierung im Mathematikunterricht und die Argumente für das Modellieren im Mathematikunterricht wurden schon von Blum (1985) und Kaiser-Messmer (1986) umfangreich diskutiert, wobei unterschiedliche Strömungen in der Mathematikdidaktik verschiedene Aspekte des Modellierens besonders betonen und darauf aufbauend unterschiedliche Zielsetzungen und Ausprägungen in Bezug auf die Behandlung von Modellierung im Mathematikunterricht formulieren. Ein Überblick über den aktuellen Stand dieser Diskussion geben Kaiser, Blum, Borromeo Ferri und Greefrath (2014). In der historischen Entwicklung lassen sich zunächst zwei Hauptströmungen realisieren (vergl. Kaiser, 1995). Die eine, so genannte *pragmatische* Richtung orientiert im Kern darauf, dass Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Mathematik zur Lösung realer Probleme zu verwenden. Für diesen Ansatz steht Henry Pollak als wichtigster Vertreter. Die andere Strömung orientiert stärker auf die Mathematik als Wissenschaft und der Rolle des Mathematikunterrichts zur Vermittlung humanistischer Bildungsziele. Diese *wissenschaftlich-humanistische* Richtung bezieht sich als Hauptvertreter auf Hans Freudenthal und nimmt die Entwicklung von Mathematik basierend auf der Beziehung zwischen Mathematik und Realität in den Fokus. In diesen Hauptströmungen entwickelten sich unterschiedliche Zielsetzungen für das Modellieren im Mathematikunterricht.

In ihrem Überblick über die aktuelle Diskussion zum Modellieren im Mathematikunterricht unterscheiden Kaiser et al. (2014, S. 361) unter Bezug auf Blum und Niss (1991, S. 42 f.) fünf Ziele:

- Das *formative* Argument betont die Rolle des Modellierens in seiner Bedeutung für die Entwicklung von allgemeinen Kompetenzen. Hiermit sind beispielsweise die Förderung von Kreativität oder Problemlösefähigkeiten auch unter Verwendung heuristischer Strategien gemeint, als auch die Entwicklung einer positiven Haltung in Form von Offenheit und Selbstbewusstsein in Bezug auf die eigenen Fähigkeiten.
- Die Förderung eines *kritischen Umgangs* mit Mathematik fokussiert auf die Entwicklung der Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler im privaten und öffentlichen Leben kritisch in einer Welt zu agieren, die zunehmend von Mathematik durchdrungen ist. Schülerinnen und Schüler sollen in der

Lage sein, den Stellenwert die Verwendung der Mathematik in der Welt zu erkennen, zu verstehen und zu bewerten.

- Das *utilitaristische* Argument besagt, dass Schülerinnen und Schüler in der Lage sein sollen, Mathematik zu nutzen, um vielfältige Situationen außerhalb der Mathematik zu bewältigen. Dieses Ziel beruht auf der Erfahrung, dass die Fähigkeit zur Anwendung von Mathematik in außermathematischen Zusammenhängen sich nicht allein auf Grundlage der Behandlung innermathematischer Fragestellungen entwickelt, sondern explizit gelehrt werden muss.
- Die Entwicklung eines *angemessenen Bildes* von der Mathematik, das alle Facetten der Mathematik umfasst, ist ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts. Dieses Bild muss auch die Anwendungen von Mathematik, den Prozess der Entwicklung von Lösungen und den Stellenwert der erreichten Lösungen umfassen.
- Die Förderung des *Verstehens und Behaltens* mathematischer Inhalte wird anerkanntermaßen durch die Einbeziehung von Anwendungs- und Modellierungsaspekten in den Mathematikunterricht gefördert und unterstützt, da Modellierungsaspekte motivational wirken und den Schülerinnen und Schülern Beispiele für die Relevanz der Mathematik aufzeigen.

Kaiser et al. (2014, S. 362 f.) unterscheiden sechs wichtige Sichtweisen des Modellierungsprozesses, die jeweils zu bestimmten der oben genannten Zielen in Beziehung stehen:

Im Fokus des *Realistischen oder angewandten Modellierens* steht in erster Linie die Behandlung authentischer realistischer Modellierungsprobleme in der Schule, wobei diese Probleme so wenig wie möglich aufbereitet werden sollen, um sie an die schulischen Zwecke anpassen. Da die Behandlung solcher Modellierungsfragestellungen in der Schule zeitlich umfänglich ist, ist dies am ehesten in Form von Unterrichtsprojekten zu realisieren. Diese Form des Modellierens steht damit in der Tradition der oben genannten pragmatischen Strömung.

Auf der Tradition der wissenschaftlich-humanistischen Strömung basiert das *epistemologische oder theoretische Modellieren*. Hierbei werden Realitätsbezüge genutzt, um innermathematische Sachverhalte zu behandeln, zu begründen und über den Bezug zwischen Mathematik und Realität ein besseres Verständnis für die Mathematik zu entwickeln. Dementsprechend ist die Mathematisierung, also die Übersetzung von Realität in die Mathematik, in dieser Tradition der zentrale Aspekt des Realitätsbezugs, da darauf folgend Theoriebildungsprozesse und das System mathematisch-theoretischer Strukturen im Fokus stehen. Die

Übersetzung von der Mathematik in die Realität hat daher in dieser Tradition eher eine nachrangige Rolle.

Beim *pädagogischen Modellieren* stehen im Lernprozess sowohl Aspekte sozialen Lernens beispielsweise bei Modellierungsaktivitäten in Form von Gruppenarbeit im Fokus als auch die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen (Kompetenz zu argumentieren, zu kommunizieren und zu modellieren), wobei letzteres speziell dem *didaktischen Modellieren* zugeordnet wird, das als Unterform des pädagogischen Modellierens anzusehen ist. Der zweite Aspekt des pädagogischen Modellierens ist das *begriffliche Modellieren*, dem die Förderung der innermathematischen Begriffsentwicklung von metakognitiven Modellierungskompetenzen zugeordnet wird.

Im *Model-Eliciting-Activities* Ansatz werden durch herausfordernde reale Situationen Modellierungsprozesse initiiert. Dabei kommt es einerseits zu mathematischen Aktivitäten, andererseits zu einer intensiven Auseinandersetzung mit dem betroffenen Realitätsfeld, die wiederum zu neuen Modellierungsaktivitäten führen können.

Als *kognitives Modellieren* wird eine Metaperspektive auf das Modellieren bezeichnet, die die Analyse der Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern im Modellierungsprozess in den Fokus nimmt (siehe z. B. Borromeo Ferri, 2011). Das kognitive Modellieren ist damit eher die Bezeichnung für eine Forschungsrichtung und nicht für eine spezielle Realisierung des Modellierungsprozesses.

2.2. Mathematische Modellierung

2.2.1. Der Modellierungsprozess

In Bezug auf das oben Gesagte ist der *mathematische Modellierungsbegriff* ein Spezialfall des allgemeinen Modellierungsbegriffs. Dabei wird die *Realität* nicht mehr im Sinne Stachowiaks (1973) als Modell problematisiert, sondern als gegeben angenommen, was außerhalb eines erkenntnistheoretischen Diskurses sinnvoll ist. Darauf aufbauend können dann mehrere Modellebenen gebildet werden, wobei in letzter Instanz ein Modell entsteht, das vollständig in der Sprache der Mathematik formuliert ist, was die Modellierung zu einer *mathematischen Modellierung* macht. Die nicht in mathematischer Sprache formulierten Modellebenen entsprechen dann dem *Rest der Welt* (Pollak, 1979, S. 234): „The rest of the world includes all other disciplines of human endeavour as well as everyday life.“

Der Modellierungsprozess im Sinne der pragmatischen Richtung, also mit der Betonung der Notwendigkeit sowohl der Übersetzung von der Realität in die Ma-

thematik als auch der Rückübersetzung von der Mathematik in die Realität, wird in der aktuellen Diskussion von fast allen Vertretern dieser Richtung durch einen Modellierungskreislauf beschrieben, wobei unterschiedliche Varianten verwendet werden. Die Kreisläufe unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl und Art der visualisierten Zwischenergebnisse im Modellierungsprozess und der dazwischen auftretenden Übergänge. Im Folgenden werden verschiedene Modellierungskreisläufe dargestellt, wobei bewusst auf die historische Reihenfolge verzichtet wird, sondern mit den Modellierungskreisläufen mit weniger Stationen und Übergängen begonnen wird und dann Modellierungskreisläufe mit zunehmender Anzahl von Aspekten gewählt werden. Diese Anordnung ist nicht eindeutig, da unterschiedliche Kreisläufe jeweils verschiedene Aspekte des Modellierungsprozesses detaillierter entfalten und es z. B. mehrere Modellierungskreisläufe mit vier Stationen gibt. Die Modellierungskreisläufe werden dabei weitgehend in einer einheitlichen grafischen Aufbereitung abgebildet, die von den Originalbildern abweicht. Dadurch werden Strukturunterschiede und Gemeinsamkeiten deutlicher sichtbar, wenn auch die Darstellung dadurch teilweise ungewohnt erscheint.

Die unterschiedlichen Modellierungskreisläufe repräsentieren verschiedene Sichtweisen auf den Modellierungsprozess und betonen dabei jeweils einzelne Aspekte. Durch den Vergleich mehrerer Kreisläufe werden die unterschiedlichen Sichtweisen und Aspekte besonders deutlich.

Mathematik und der Rest der Welt

Pollak (1979, S. 233) verwendet eine Darstellung, in der er nur die Domänen *Mathematik* und *Rest der Welt* unterscheidet (Abbildung 2.1). Die Bedeutung der Pfeile wird von Pollak (1979) nicht erläutert.

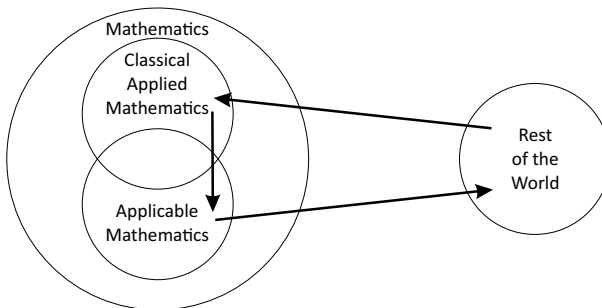


Abbildung 2.1.: Beziehung zwischen Mathematik und dem Rest der Welt nach Pollak (1979, S. 233)

Pollak (1979) führt im Anschluss an die graphische Darstellung eine Analyse des Begriffes *Angewandte Mathematik* durch und gibt dabei vier Bedeutungen an:

1. „Applied mathematics means classical applied mathematics; that is, the classical branches of analysis, including calculus, ordinary and partial differential equations, integral equations [...]“
2. „Applied mathematics means all mathematics that has significant practical application. [...]“
3. „Applied mathematics means beginning with a situation in some other field or in real life, making a mathematical interpretation or model, doing mathematical work within that model, and applying the results to the original situation. Note that the other field is by no means restricted to lie in the physical sciences. In particular, applications in the biological sciences, the social sciences, and the management sciences have become extremely active. Many other areas of applications will also be considered.
4. Applied mathematics means what people who apply mathematics in their livelihood actually do. This is like (3) but usually involves going around the loop between the rest of the world and the mathematics many times.[...] „ (Pollak, 1979, S. 233)

In den beiden ersten Bedeutungen benennt Pollak (1979) *Domänen der Mathematik*, die als angewandte Mathematik bezeichnet werden, wobei sich diese Sichtweise zusammen mit der Entwicklung der Mathematik in den letzten 35 Jahren vermutlich etwas verschoben hat.

In den Bedeutungen (3) und (4) beschreibt Pollak (1979) hingegen den *Prozess der Anwendung von Mathematik*, also die Tätigkeit, die eine Person während des mathematischen Modellierens durchführt (vergl. Greefrath (2010a, S.44)). Die beiden Sichtweisen in (3) und (4) unterscheiden sich im Kern nur durch den Hinweis auf das *mehrfache* Durchlaufen der Modellierungsschritte in (4). In diesen Spiegelpunkten treten vier Stationen auf, die später in Form eines vierstufigen Modellierungskreislaufes rekonstruiert werden (Abbildung 2.5, Seite 23).

Die in Abbildung 2.1 dargestellte Grafik beschreibt die ersten beiden Bedeutungen des Ausdrucks *Applied mathematics*, so dass die Beschreibung des Modellierungsprozesses hier vermutlich nicht intendiert ist. Es kann also geschlossen werden, dass diese Grafik die Wechselwirkung zwischen Themengebieten der Mathematik und deren Anwendung auf *den Rest der Welt* illustrieren soll. Der Pfeil zwischen *Classical Applied Mathematics* und *Applicable Mathematics*

stellt offensichtlich keinen Arbeitsschritt im Modellierungsprozess dar sondern eine Beziehung zwischen Teilbereichen der Mathematik, was diese Interpretation stützt.

Der Modellierungskreislauf nach Lesh

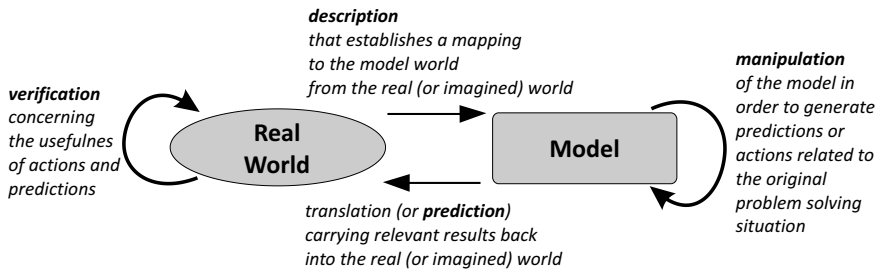


Abbildung 2.2.: Modellierungskreislauf nach Lesh 2003

Die Unterscheidung zwischen den beiden Domänen *Mathematik* und *Rest der Welt* bleibt in allen verwendeten Modellierungskreisläufen erhalten und es finden sich auch Prozessbeschreibungen, die nur diese beiden Domänen verwenden. Lesh und Doerr (2003, S. 17) verwenden einen solchen Modellierungskreislauf (Abbildung 2.2), in zusätzlich zu den beiden Domänen vier Prozesse beschrieben werden. Hier werden die von Lesh und Doerr (2003) im Text gegebenen Erläuterungen in die Grafik integriert. Lesh und Doerr (2003) betonten in ihrer Darstellung, dass dieser Kreislauf in der Regel mehrfach durchlaufen werden muss: „Unfortunately, when problem solvers work to develop productiv interpretations of complex problem solving situations, a single modeling cycle often is not enough“ (Lesh & Doerr, 2003, S. 18).

Der Modellierungskreislauf nach Burkhardt

Burkhardt (1981, S. 3) stellt einen Modellierungskreislauf dar, der dem von Lesh und Doerr (2003) sehr ähnelt, jedoch zwei zusätzliche Elemente aufweist: Einerseits den kreisförmigen Pfeil in der Mitte, der das auch bei Lesh und Doerr (2003) betonte mehrfache Durchlaufen des Modellierungskreislaufs illustriert, sowie zwei Pfeile, die einen Eingang zu Beginn des Modellierens und einen Ausgang nach dem Ende des Modellierens bezeichnen (Abbildung 2.3). Damit führt Burkhardt (1981) implizit eine zusätzliche, aber in der Grafik nicht expliziert dargestellte Ebene ein, die dem *real world problem* vorangestellt ist, aus der das

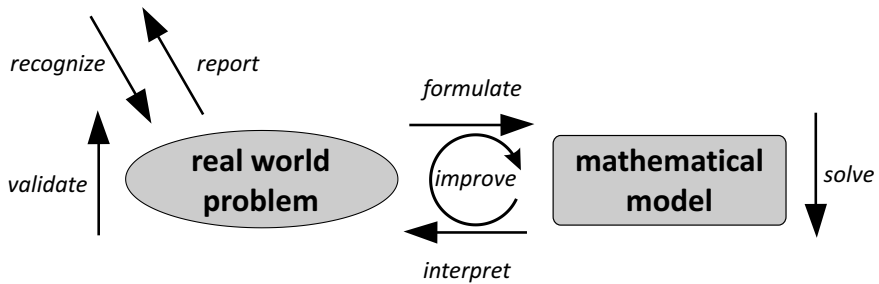


Abbildung 2.3.: Modellierungskreislauf nach Burkhardt (1981)

Problem entsteht und für die Problemlösung erstellt wird. Burkhardt (1981) führt den Modellierungsprozess in Form eines Flussdiagramms weiter aus, was zu einer komplexeren Darstellung führt (Abbildung 2.9).

Der Modellierungskreislauf nach Fischer, Malle und Bürger

Fischer, Malle und Bürger (1989, S. 101) verwenden eine Darstellung (Abbildung 2.4), die deutlich mehr Stationen enthält als die obigen Modellierungskreisläufe. In der Visualisierung von Fischer et al. (1989) werden Situationen wie *Problem* oder *mathematisches Modell* grafisch in gleicher Weise (Text in Rechtecken) dargestellt wie Handlungen (*Datenbeschaffung*, *Situationsanalyse*). Notiert man diese Handlungen als Übergänge zwischen Situationen an die Pfeile, erhält man den dreistufigen Modellierungskreislauf aus Abbildung 2.4.

Ein rekonstruierter Modellierungskreislauf nach Pollak

Pollak (1979, S. 233) gibt, wie oben schon ausgeführt, vier Bedeutungen des Ausdrucks von *Applied mathematics* an, von denen die letzten beiden den Modellierungsprozess beschreiben. Aus diesen Darstellungen lassen sich vier Schritte beim Modellieren rekonstruieren:

- Reale Situation / reales Problem („situation in some other field or in real life“)
- Mathematisches Modell („making a mathematical interpretation or model“)
- Mathematische Lösung (durch „applying the results“ drückt er implizit aus, dass mathematische Lösungen vorliegen müssen)
- Reale Lösung („applying the results to the original situation“)

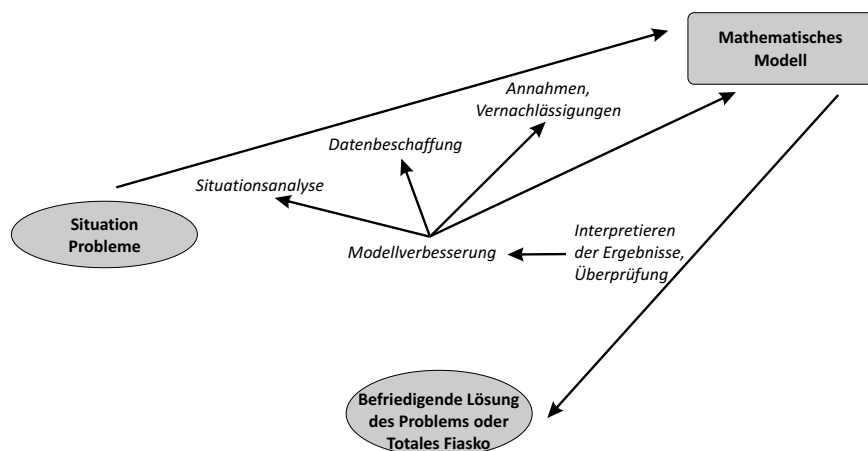


Abbildung 2.4.: Modellierungskreislauf nach Fischer, Malle und Bürger (1989)

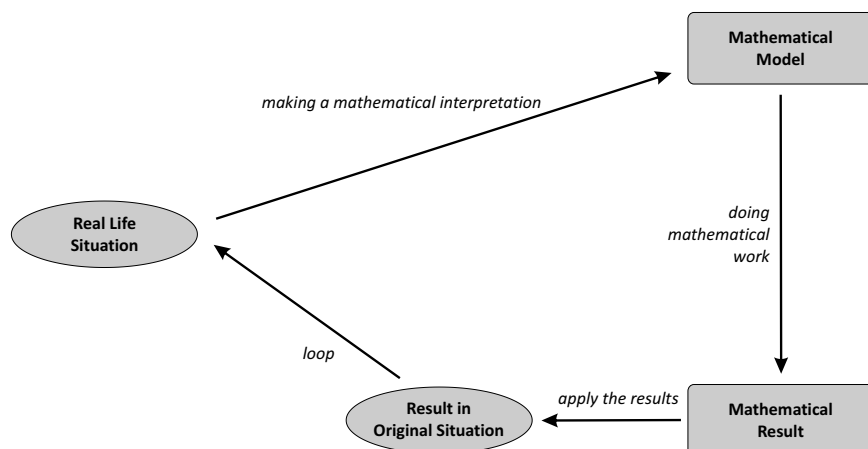


Abbildung 2.5.: Rekonstruierter Modellierungskreislauf nach Pollak (1979)

Visualisiert man dies unter Verwendung der Aussage in (4) auf Seite 20 „going around the loop between the rest of the world and the mathematics many times“, erhält man bereits den Modellierungskreislauf in Abbildung 2.5.

In späteren Schriften betont Pollak noch stärker den Unterschied zwischen *realer Situation* und *realem Problem*: „At least one of the published descriptions

of the modeling cycle [...] begins at what looks like an earlier stage, with a situation in the real world which is in need of insight. The second step then, not the first, will be the more precise formulation of a question or problem in the modeling sequence described in the preceding paragraph.“ (Pollak, 2015, S. 277). Dieser Aspekt wird hier nicht visualisiert, findet sich jedoch in einigen Modellierungskreisläufen teilweise explizit oder implizit als Instanz, die von außen zu dem realen Problem führt, beispielsweise in Abbildung 2.3 oder Abbildung 2.12.

Der Modellierungskreislauf nach Blum und Kaiser

Bei Blum (1985, S. 200) und bei Kaiser-Messmer (1986, S. 143) findet sich ein ähnlicher Kreislauf wie in Abbildung 2.5, der jedoch den Weg von der Realität in die Mathematik mit einem zusätzlichen Zwischenschritt darstellt (Abbildung 2.6).

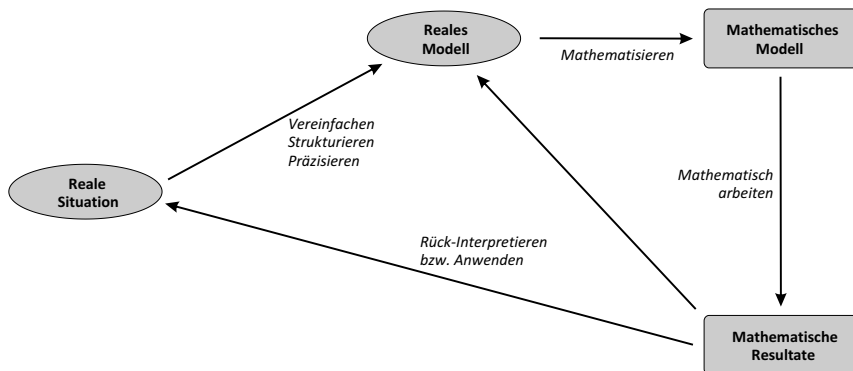


Abbildung 2.6.: Modellierungskreislauf Blum & Kaiser 1985/1986

Blum (1985) stellt ausführlich die einzelnen Modellierungsschritte anhand von komplexeren Beispielen dar. Den ersten Schritt von der realen Situation zum realen Modell beschreibt Blum mit den Ausdrücken *Vergleichen*, *Strukturieren*, *Präzisieren* und erläutert dies wie folgt: „Zuerst muß sich der *Betrachter* (= *Problemlöser*) mit der Situation vertraut machen, Beobachtungen anstellen, sein erkenntnisleitendes Problem formulieren [...] und dann sinnvolle und treffende Fragen dazu formulieren sowie hieraus eine Auswahl treffen, wobei - wie auch im weiteren Verlauf - bei allem auch seine Interessen wesentlich eingehen“ (Blum, 1985, S. 201).

Um die zu untersuchenden Fragen besser in den Griff zu bekommen und um die nachfolgende mathematische Betrachtung vorzubereiten, müssen nun (weitere) Informationen gesammelt und geordnet, müssen Daten erhoben und muß die Ausgangssituation vergrößert, vereinfacht, eingeschränkt, idealisiert, strukturiert werden, d. h. muß u. a. von einigen spezifischen Gegebenheiten der Situation abgesehen bzw. müssen gewisse Aspekte ganz ausgeblendet werden. (Blum, 1985, S. 201)

Der nächste Schritt ist eine Mathematisierung, d. h. eine Übersetzung der Daten, Begriffe, Beziehungen, Gesetze, Forderungen oder Annahmen des realen Modells in die Mathematik; [...] Bei solchen Mathematisierungen werden insbesondere auch umgangssprachlich formulierte Begriffe der Ausgangssituation oder des Realmodells wie etwa „knickfrei“, „gerecht“, „effektiv“ oder „einfach“ mathematisch gefasst. (Blum, 1985, S. 202)

Diese beiden Schritte enthalten deutlich unterscheidbare Tätigkeiten, im ersten Schritt wird innerhalb der Beschreibung der Realität, also des *Restes der Welt*, gearbeitet. Dies geschieht zwar mit Blick auf die spätere Mathematisierung, aber ohne bereits direkt die Sprache der Mathematik zu verwenden. Im zweiten Arbeitsschritt wird Realität in Mathematik *übersetzt*, das heißt, dass das Resultat dieses Schrittes in der Sprache der Mathematik formuliert ist. In dieser Zweischrittigkeit unterscheidet sich die Darstellung von Blum von der Beschreibung, die Pollak (1979) gibt, und von dem in Abbildung 2.7 gezeigten Verständnis.

Den Schritt *Mathematisch arbeiten* erläutert Blum mit einer Aufzählung mathematischer Tätigkeiten „Folgerungen ziehen, Zusammenhänge herausarbeiten, verschiedene Fälle unterscheiden, konkrete Beispiele durchrechnen, Alternativen simulieren, bekannte mathematische Methoden und Resultate anwenden usw.“ (Blum, 1985, S. 204). Er betont: „Dies kann je nach Problem trivial bis beliebig schwierig sein.“ (ebenda).

Zu den beiden Pfeilen, die vom mathematischen Resultat ausgehen, gibt Blum die Erläuterungen „Wesentlich ist nun, daß diese Resultate wieder in die Realität zurückübersetzt, d. h. in der Ausgangssituation interpretiert bzw. auf diese angewandt werden, gegebenenfalls auch zu Vorhersage-Zwecken“ (Blum, 1985, S. 204) und „Ggf. kann die Rück-Interpretation nicht in der Ausgangssituation selbst, sondern nur im realen Modell vorgenommen werden, insbesondere wenn die Ausgangssituation zu komplex ist.“ (ebenda)

Ein Modellierungskreislauf aus der angewandten Mathematik

Ortlieb (2009) gibt für die Verwendung in der angewandten Mathematik einen Modellierungskreislauf an, der den Übergang von der realen Situation in die Mathematik als einen einzelnen Schritt auffasst (Abbildung 2.7): „Ausgangspunkt ist ein reales Problem oder auch erklärungsbedürftiges Phänomen. Um es mit mathematischen Methoden bearbeiten zu können, muss es im ersten Schritt, der eigentlichen Modellbildung oder -entwicklung, in ein mathematisches Problem überführt werden.“ (Ortlieb, 2009, S. 4)

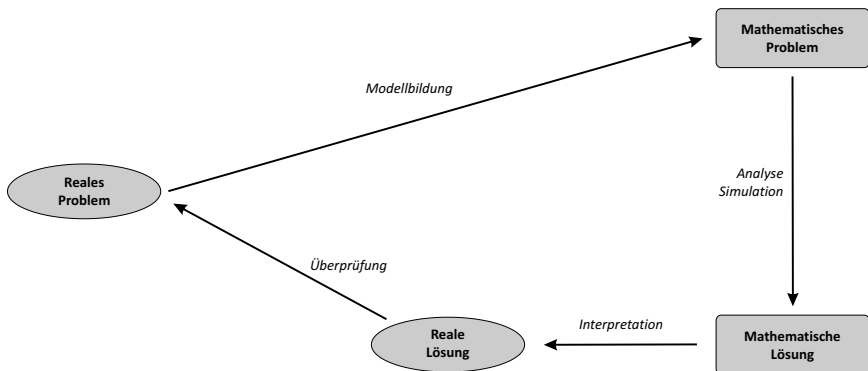


Abbildung 2.7.: Modellierungskreislauf aus der Angewandten Mathematik, hier nach Ortlieb (2009, S. 5)

Ortlieb (2009, S. 5 f.) beschreibt Aspekte dieses ersten Schritts und führt dazu folgende Punkte auf:

- Präzise Bestimmung des realen Problems, Klärung des Wesentlichen und Unwesentlichen, Klärung der Ziele und der notwendigen Genauigkeit.
- Klärung der dem Problem zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten und der möglichen mathematischen Sprache und in Substanzwissenschaften vorhandener Aussagen hierzu.
- Suche nach analogen Problemen, für die bereits (Teil-)Lösungen vorliegen.
- Identifizierung benötigter und überflüssiger Informationen und Prüfen der Verlässlichkeit vorliegender Informationen.
- Identifizierung von geeigneten Modellvariablen und Modellparametern und Klärung der erforderlichen Genauigkeit und geeigneter Einheiten.

- Eindeutige Formulierung des mathematischen Problems.
- Zunächst Wahl eines möglichst einfachen Modells, das gegebenenfalls später komplexer gestaltet wird. Das Modell muss so einfach sein, dass eine mathematische Lösung möglich ist.
- Sicherstellen, dass das eigene Vorgehen bewusst geschieht und Vereinfachungen und deren Gründe dokumentiert werden, um das Modell später verbessern zu können.

Nach Ortlieb (2009, S. 5) ist „nicht jedes dieser Rezepte für jeden Einzelfall von Bedeutung“, es zeigt sich jedoch, dass dieser im Modellierungskreislauf als einzelner Schritt dargestellte Handlungsablauf von hoher Komplexität sein kann, so dass gegebenenfalls nur Personen mit einer hoher Modellierungserfahrung diesen Handlungsschritt als einen Schritt ohne weitere bewusste Untergliederung bei komplexeren Fragestellungen durchführen können.

Eine Variante des vierschrittigen Modellierungskreislaufes

Blum, 1985 beschreibt unter der Überschrift „Anwenden und eingekleidete Aufgaben“ ebenfalls Situationen, in denen nur ein einzelner Schritt von der Realität in die Mathematik zu gehen ist:

Anwendungsbezüge dieser Art sind im Allgemeinen von eher „schlichter“ Natur, sie sind schneller zugänglich und leichter durchschaubar. Insofern sind sie für didaktische Zwecke oft besser geeignet als komplexe Modellierungsprozesse. Solche direkten Anwendungen von Mathematik auf reale Situationen können natürlich auch schon in die Modellbildungsphase beim umfassenden Prozeß nach Abschnitt 2.1 einfließen. Die Gefahr dabei ist, daß die Modellbildung dann schon zu stark vorgeprägt und vorstrukturiert ist. Außer den bisher behandelten Arten der „Anwendung“ von Mathematik gibt es weitere, die für die Schule wichtig sind: „Eingekleidete Aufgaben“, „word problems“ sind mathematische Aufgaben, die nur in der Sprache einer anderen Disziplin bzw. des Alltags abgefaßt sind. [...] Viele der eingekleideten Aufgaben entsprechen nicht dem vorhin geschilderten Anwendungsverständnis, insofern sie durch eine bloße (wenn auch nicht immer einfache) „Entkleidung“ auf ihren mathematischen Ursprung zurückgeführt werden. (Blum, 1985, S. 207)

Diese bloße Entkleidung ist offenbar ein einzelner Übersetzungsschritt, der nicht von einem realen Problem, sondern von einem realen Modell, zum Beispiel von einer didaktisch aufbereiteten Fragestellung ausgeht.

Dies führt zu einer alternativen Darstellung des Modellierungskreislaufs aus Abbildung 2.7. Diese Form findet sich bei Maaß (2005) oder im Lehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe in Hamburg (2009) (Abbildung 2.8).

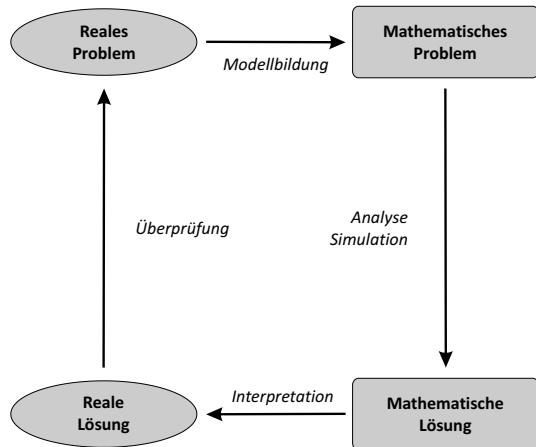


Abbildung 2.8.: Modellierungskreislauf didaktisch aufbereiteter Fragestellungen

Schon Blum betont den für den Mathematikunterricht wichtigen Aspekt, dass sich nach dem Aufstellen des mathematischen Modells die Situation ergeben kann, dass die zur Bearbeitung des so entstandenen mathematischen Problems erforderlichen mathematischen Methoden nicht bekannt sind. Solche Situationen waren in der Geschichte der Naturwissenschaften oft Anlass zur Entwicklung neuer mathematischer Verfahren, im Unterricht können derartige mathematische Probleme *Anlass* zum Erlernen neuer Fachinhalte sein.

Die Rückinterpretation der mathematischen Ergebnisse in die Realität wird bei Pollak (1979), Ortlieb (2009) und Blum (1985) unterschiedlich dargestellt. Im Modellierungskreislauf aus der Angewandten Mathematik wird als Zwischenschritt die Übersetzung der mathematischen Lösung in die reale Lösung beschrieben. Ist die mathematische Lösung eine Zahl, so besteht dieser Schritt zuweilen nur aus dem Hinzufügen einer Einheit oder der Formulierung einer Art Antwortsatz. Entstehen komplexere Objekte in der mathematischen Lösung, wie beispielsweise eine Funktion als Lösung einer Differentialgleichung oder als Wahrscheinlichkeitsverteilung, so ist dieser Interpretationsschritt aufwändiger.

Bei der Rückinterpretation muss geprüft werden, ob und inwieweit die gefundene Lösung das reale Problem beantwortet und ob sie Sinn macht. Die gleiche Frage sollte in Bezug auf ein gegebenenfalls formuliertes reales Modell beantwortet werden. „Es geht hierbei nicht darum, ob die Modellierung ‚richtig oder falsch‘ war, sondern ob sie ‚mehr oder weniger brauchbar‘ war.“ (Blum, 1985, S. 205). Bei komplexeren Modellierungsproblemen stellt sich in dieser Situation oft heraus, dass zwar gegebenenfalls ein wichtiger Teilaspekt erfolgreich bearbeitet wurde, das Modell jedoch noch weiter entwickelt werden muss. In einigen Fällen kann man aus den ersten Modellierungsversuchen jetzt Konsequenzen für ein adäquateres reales oder mathematisches Modell ziehen. Ein Beispiel für einen entsprechenden Modellierungsprozess findet sich ab Seite 132.

Die Darstellung der Lösungen von Modellierungsproblemen geschieht häufig in einer Weise, bei der bereits die erste reale Lösung befriedigend ist, z. B. bei Kaiser und Stender (2013, S. 281) oder bei Blum und Leiss (2005, S. 19). Dies kommt zum Einen dadurch zustande, dass bei der gewählten Fragestellungen zwar für Schülerinnen und Schüler mehrere Durchläufe durch den Modellierungskreislauf erforderlich sind, mathematisch erfahrene Personen, an die sich diese Darstellungen in der Regel wenden, jedoch oft direkt zu einer sinnvollen Lösung kommen können. Eine zweite mögliche Erklärung ist, dass analog zum Vorgehen beim Darlegen eines mathematischen Beweises nach Abschluss des Modellierungsprozesses eine besonders elegante und sparsame Darstellung gewählt wird, so dass der *loop*, wie er in der Beschreibung von Pollak (1979) betont wird, nicht auftritt. Verfügt man nicht über entsprechende Modellierungserfahrungen, kann man an den Ergebnisdarstellungen nicht mehr erkennen, dass dieses Ergebnis durch das mehrfache Durchlaufen eines Modellierungskreislaufes zustande gekommen ist. Dies führt gegebenenfalls zu einem unangemessenen Bild des Modellierungsprozesses.

Ein Flussdiagramm als Modellierungskreislauf

Burkhardt (1981, S. 10) hat neben dem oben dargestellten Modellierungskreislauf mit den Stationen *Reale Welt* und *Modell* den Modellierungsprozess mit Hilfe eines Flussdiagramms dargestellt, der fünf Stationen unterscheidet und an drei Stellen Fragen enthält, deren Beantwortung über das weitere Vorgehen entscheidet. Dieses Flussdiagramm kann wie hier dargestellt in das Schema des Modellierungskreislaufs überführt werden, wobei die Fragen an den entsprechenden Pfeilen eingetragen sind (Abbildung 2.9).

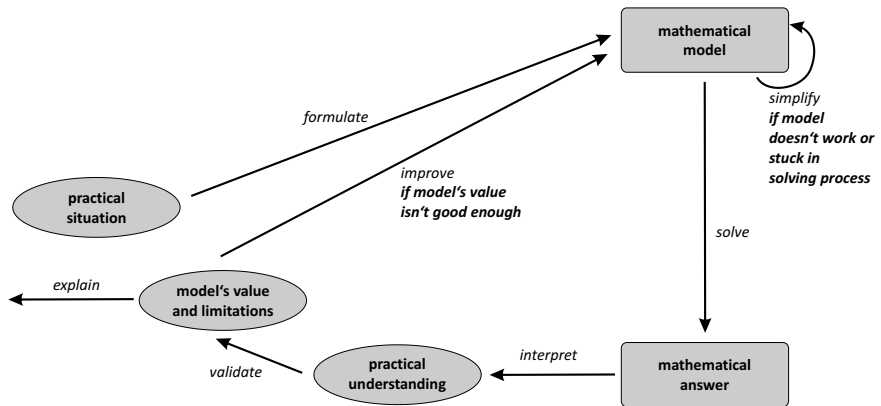


Abbildung 2.9.: Flussdiagramm von Burkhardt (1981) als Modellierungskreislauf dargestellt

Ein Modellierungskreislauf mit fünf Stationen

Eine Synthese aus verschiedenen Kreisläufen findet sich bei Maaß (2005, S. 117) und in der vorliegenden grafischen Darstellung bei Kaiser und Stender (2013, S. 279) (hier in Abbildung 2.10). Dabei wird einerseits der Schritt *Reales Modell* zwischen dem realen Problem und dem mathematischen Modell verwendet, als auch die Interpretation der mathematischen Lösung in Form der realen Lösung als eigenständiges Zwischenergebnis angesehen. Die Validierung der realen Lösung geschieht dabei sowohl in Bezug auf das Ausgangsproblem als auch in Bezug auf das reale Modell.

Dieser Modellierungskreislauf kann bei komplexeren Modellierungsfragestellungen als Orientierung für den Lösungsprozess dienen und wurde im Rahmen des hier beschriebenen Projekts in Unterrichtssituationen mit Schülerinnen und

Schülern verwendet. Er ist dementsprechend ein sprachlich einfach gehaltener Modellierungskreislauf für didaktische Zwecke.

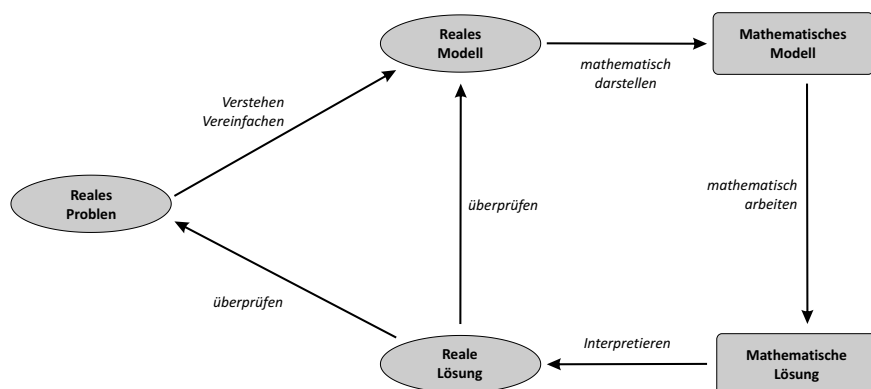


Abbildung 2.10.: Modellierungskreislauf von Kaiser und Stender (2013)

Der Modellierungskreislauf nach Blomhøj und Højgaard Jensen

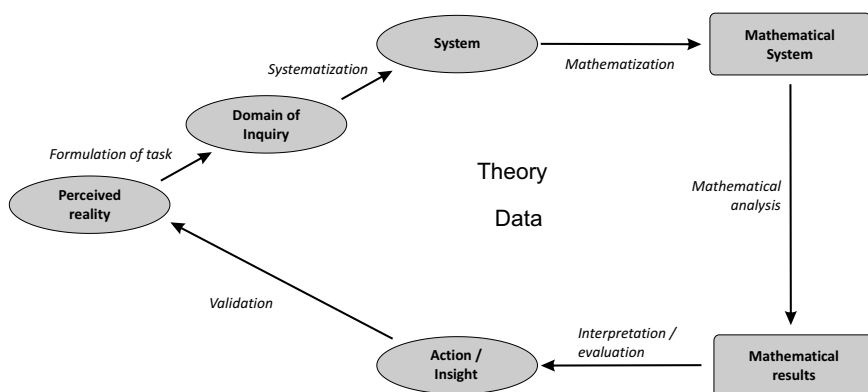


Abbildung 2.11.: Modellierungskreislauf nach Blomhøj und Højgaard Jensen (2007)

Verwendung finden auch Formen des Modellierungskreislaufes mit mehr als fünf Stationen. Blomhøj und Højgaard Jensen (2007, S. 48) verwenden eine Darstellung wie in Abbildung 2.11. Die Autoren haben hier ihr eigenes Schema aus Blomhøj und Højgaard Jensen (2003, S. 125) adaptiert, in der dieselben Schritte in einer linearen Anordnung dargestellt sind.

Der Modellierungskreislauf nach Stillman, Galbraith, Brown und Edwards

Aus dem Kontext australischer Modellierungsforschung stammt der Modellierungskreislauf von Stillman, Galbraith, Brown und Edwards (2007, S. 690) mit sieben Stationen (Abbildung 2.12). Die Station *Revise model or Accept solution* stellt im Gegensatz zu den anderen Stationen eine Handlung und nicht ein (Zwischen-)Ergebnis dar und ist daher hier nicht grau hinterlegt. Ähnlich wie in Abbildung 2.3 sieht man hier einen Bezug zu einer Instanz *Report*, gegenüber der das Modellierungsergebnis dargestellt wird.

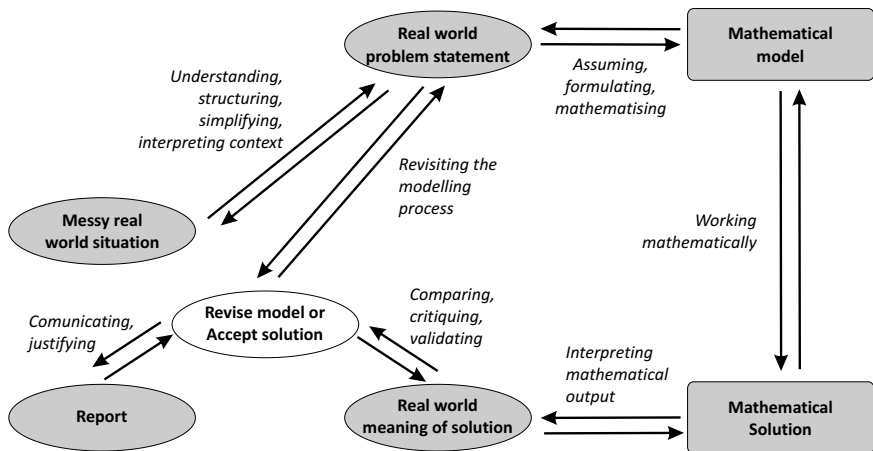


Abbildung 2.12.: Modellierungskreislauf nach Stillman, Galbraith, Brown und Edwards (2007)

Der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss

Eine weitere in der Literatur oft zitierte Form des Modellierungskreislaufes wurde durch Blum und Leiss (2005, S. 19) entwickelt (Abbildung 2.13). Diese Variante führt als zusätzliche Modellebene das *Situationsmodell* ein. Dieser Modellierungsschritt beschreibt die Repräsentation der realen Situation im Bewusstsein des Modellierers. Dieser Modellierungskreislauf ist unter anderem für die genaue individuelle Analyse des Modellierungsprozesses erforderlich: „The researchers who ‚work‘ with this (new) kind of modelling cycle focus especially on the cognitive processes of individuals during modelling processes. This is why the situation model is included in this cycle, because the researchers suppose that this phase

is more or less run through by all individuals during modelling.“ (Borromeo Ferri, 2006, S. 87)

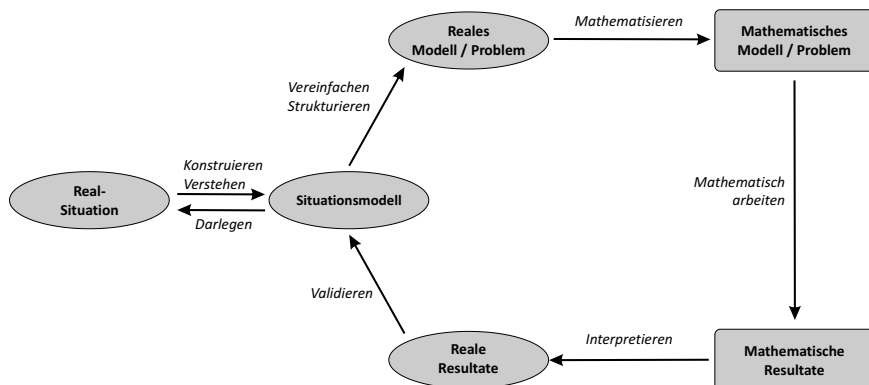


Abbildung 2.13.: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss (2005)

Der Modellierungskreislauf nach Borromeo Ferri

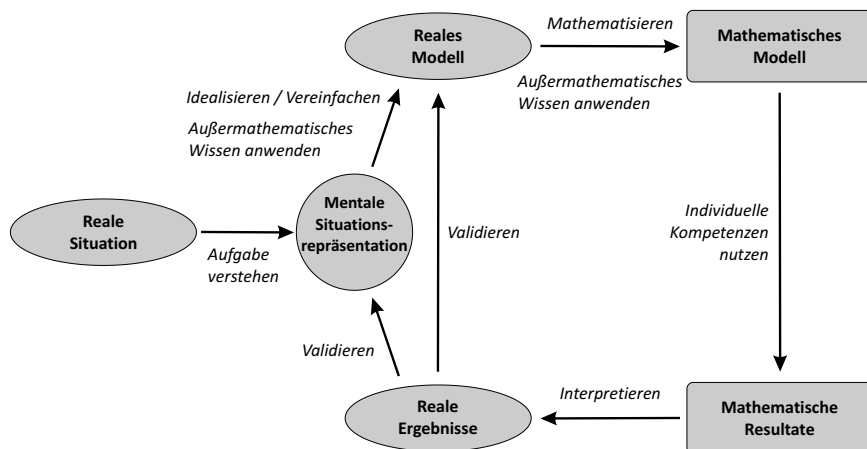


Abbildung 2.14.: Modellierungskreislauf nach Borromeo Ferri 2011

Der Modellierungskreislauf, der von Borromeo Ferri (2011) verwendet wird (Abbildung 2.14), erweitert den Kreislauf von Blum und Leiss um einen Validie-

rungsübergang zwischen dem realen Ergebnis und dem realen Modell. Ferner wird in diesem Kreislauf statt der Bezeichnung *Situationsmodell* der Ausdruck *Mentale Situationsrepräsentation* verwendet. Dies begründet Borromeo Ferri (2006, S. 87): „However Borromeo Ferri used the name mental representation of the situation (MRS) instead of situation model, because this term better describes the kind of internal processes respectively the mental picture of an individual after/while reading the given (complex) modelling task.“ Borromeo Ferri (2006, S. 92) betont, dass die mentale Repräsentation der Situation nicht nur von der Situation selbst, sondern auch vom Denkstil des Individuums abhängen kann, aber auch von individuellen Assoziationen und Erfahrungen. Somit kann die mentale Situationsrepräsentation unbewusste Vereinfachungen enthalten sowie individuelle Präferenzen, was dann den nachfolgenden Modellierungsprozess beeinflusst.

Ein Modellierungskreislauf zum Computereinsatz

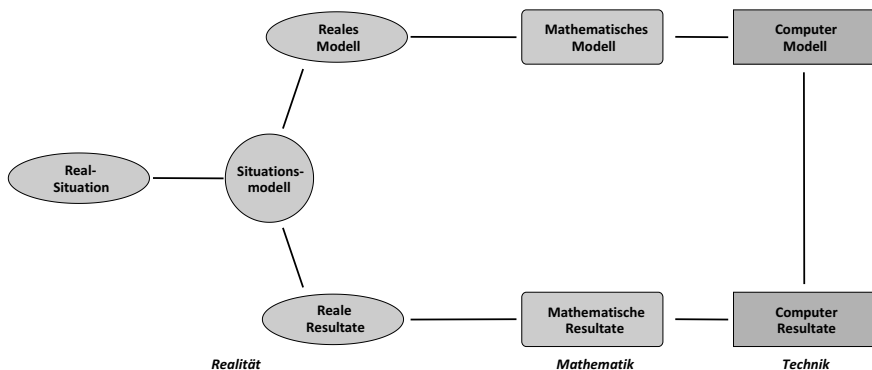


Abbildung 2.15.: Modellierungskreislauf beim Einsatz von Technologie (Greefrath, 2011)

Eine weitere Ergänzung stellt der Modellierungskreislauf von Greefrath (2011, S. 302) dar, der bei der Verwendung von Computern zur Lösung des mathematischen Problems die Technologie als zusätzliche Modellebene einführt (Abbildung 2.15). Für diese Modellebene benennt Greefrath drei verschiedene Möglichkeiten für Handlungen, die zur mathematischen Lösung führen: *simulate*, *algebraing*, *calculate* (Greefrath, 2011, Abb. 30.2).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass alle Modellierungskreisläufe Modelle des Modellierungsprozesses sind und damit den Kriterien von Stachowiak

unterliegen: „Modelle sind nicht nur Modelle von etwas. Sie sind auch Modelle für jemanden, einen Menschen oder einen künstlichen Modellbenutzer. Sie erfüllen dabei ihre Funktionen in der Zeit, innerhalb eines Zeitintervalls. Und sie sind schließlich Modelle zu einem bestimmten Zweck“ (Stachowiak, 1973, S. 132). Welche Stationen im Modellierungsprozess man berücksichtigt, ob man weitere hinzufügt und welche Übergänge man betrachtet, hängt somit davon ab, zu welchem Zweck man den Modellierungsprozess visualisiert. Jedoch wird kein noch so komplexer Modellierungskreislauf jeden Modellierungsprozess vollständig abbilden können, eine Restriktion, die nach Stachowiak (1973) für jede Form von Modellen gilt.

2.2.2. Modellierungskompetenz

Mathematisches Modellieren, wie es im vorherigen Abschnitt beschrieben wurde, erfordert beim Modellierer oder bei der Modelliererin ein breites Repertoire an Kompetenzen, die einerseits für die selbständige Bearbeitung von Modellierungsfragestellungen in einem gewissen Maß vorhanden sein und dafür in der Schule entwickelt werden müssen, andererseits werden diese Kompetenzen während des Modellierungsprozesses weiter entwickelt und vertieft. Die Beschreibung von Modellierungskompetenzen hat eine lange Tradition in der fachdidaktischen Diskussion zum Modellieren, wenngleich dieser Aspekt erst relativ spät in den Forschungsfokus rückte (vergl. Kaiser und Brand, 2015).

Niss und Højgaard Jensen (2002) (hier zitiert nach der englischen Übersetzung Niss und Højgaard Jensen, 2011) beschreiben die Modellierungskompetenz als eine von acht Kompetenzen, die im KOM-Projekt herausgearbeitet wurden. Niss und Højgaard Jensen (2011, S. 50 ff.) unterscheiden zunächst zwei Gruppen von Kompetenzen: „the ability to ask and answer questions in and with mathematics“ sowie „the ability to deal with mathematical language and tools“. Abbildung 2.16 zeigt eine der Originalgrafik nachempfundene Visualisierung dieser acht Kompetenzen.

Niss und Højgaard Jensen (2011, S. 58 f.) führen als Teilkompetenzen der Modellierungskompetenz Fähigkeiten aus, die mit den Handlungen in einzelnen Modellierungskreisläufen korrespondieren: die Fähigkeit, die reale Situation zu strukturieren und zu mathematisieren, die Fähigkeit, in dem mathematischen Modell zu arbeiten, und die Ergebnisse zu de-mathematisieren, zu interpretieren und zu validieren. Ferner führen sie die Fähigkeit an, das gesamte Modell kritisch zu analysieren und mit anderen zu kommunizieren. Betont wird zudem noch die Fähigkeit, den gesamten eigenen Modellierungsprozess zu überwachen und zu steuern.

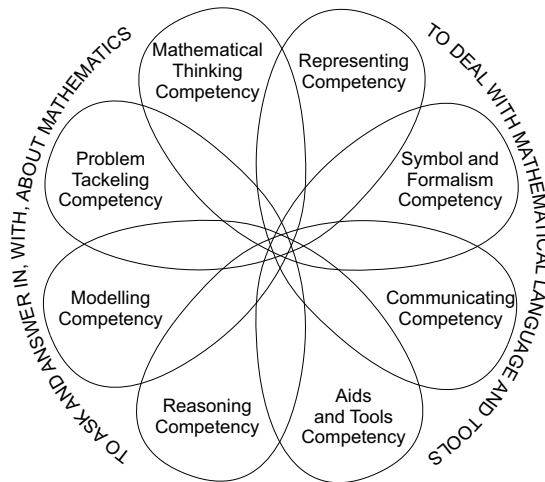


Abbildung 2.16.: Mathematische Kompetenzen nach Niss und Højgaard Jensen (2002) (eigene Grafik)

Basierend auf der Arbeit von Niss und Højgaard Jensen (2002) fassen Blomhøj und Højgaard Jensen (2003, S. 126) die mathematische Modellierungskompetenz wie folgt zusammen:

By mathematical modelling competence we mean being able to autonomously and insightfully carry through all aspects of mathematical modelling process in a certain context.

Eine vergleichbare Position formuliert Maaß (2004, S. 35):

Modellierungskompetenzen umfassen die Fähigkeiten und Fertigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in Handlungen umzusetzen.

Dabei muss dem Kompetenzbegriff nach Weinert (2001, S. 27) folgend, der Wille, sich mit entsprechenden Fragestellungen zu befassen, im Kompetenzkonzept mit berücksichtigt werden:

Dabei versteht man unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.

Die Modellierungskompetenz bezieht sich zum einen darauf, die Einzelschritte im Modellierungskreislauf zu bewältigen, zum anderen wird die Kompetenz benötigt, „den gesamten Modellierungsprozess durchzuführen und über ihn zu reflektieren.“ (Kaiser et al., 2014, S. 369). Die unterschiedlichen Modellierungskreisläufe können dementsprechend auch zu unterschiedlichen Beschreibungen der Modellierungskompetenzen führen (vergl. Kaiser und Brand, 2015). Als Grundlage für die den Einzelschritten des Modellierens zugeordneten Kompetenzen werden von Kaiser et al. (2014) fünf Modellierungsschritte unterschieden, wie beispielsweise in dem Modellierungskreislauf in Abbildung 2.10. Die zugehörigen Kompetenzen werden (basierend auf dem Stand der fachdidaktischen Forschung, ohne dass der Anspruch erhoben wird, damit eine vollständige Aufzählung anzugeben) folgendermaßen von Kaiser et al., 2014, S. 369 f. dargestellt:

1. *Kompetenzen zum Verständnis eines realen Problems und zum Aufstellen eines realen Modells, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *nach verfügbaren Informationen zu suchen und relevante von irrelevanten Informationen zu trennen;*
 - *auf die Situation bezogene Annahmen zu machen bzw. Situationen zu vereinfachen;*
 - *die eine Situation beeinflussenden Größen zu erkennen bzw. zu explizieren und Schlüsselvariablen zu identifizieren;*
 - *Beziehungen zwischen den Variablen herzustellen;*
2. *Kompetenzen zum Aufstellen eines mathematischen Modells aus einem realen Modell: d.h. die Fähigkeiten*
 - *die relevanten Größen und Beziehungen zu mathematisieren, genauer in mathematische Sprache zu übersetzen;*
 - *falls nötig, die relevanten Größen und ihre Beziehungen zu vereinfachen bzw. ihre Anzahl und Komplexität zu reduzieren;*
 - *adäquate mathematische Notationen zu wählen und Situationen ggf. graphisch darzustellen;*

3. *Kompetenzen zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells, d. h. die Fähigkeiten*
 - *heuristische Strategien anzuwenden wie Aufteilung des Problems in Teilprobleme, Herstellung von Bezügen zu verwandten oder analogen Problemen, Reformulierung des Problems, Darstellung des Problems in anderer Form, Variation der Einflussgrößen bzw. der verfügbaren Daten usw.;*
4. *Kompetenz zur Interpretation mathematischer Resultate in einem realen Modell bzw. einer realen Situation, d. h. die Fähigkeiten*
 - *mathematische Resultate in außermathematischen Situationen zu interpretieren;*
 - *für spezielle Situationen entwickelte Lösungen zu verallgemeinern;*
 - *Problemlösungen unter angemessener Verwendung mathematischer Sprache darzustellen bzw. über die Lösungen zu kommunizieren;*
5. *Kompetenz zur Infragestellung der Lösung und ggf. erneuten Durchführung eines Modellierungsprozesses, d. h. die Fähigkeiten*
 - *gefundene Lösungen kritisch zu überprüfen und zu reflektieren;*
 - *entsprechende Teile des Modells zu revidieren bzw. den Modellierungsprozess erneut durchzuführen, falls Lösungen der Situation nicht angemessen sind;*
 - *zu überlegen, ob andere Lösungswege möglich sind, bzw. Lösungen auch anders entwickelt werden können;*
 - *Modelle grundsätzlich in Frage zu stellen*

Für die Steuerung der Arbeitsschritte im Modellierungsprozess werden metakognitive Strategien benötigt, wie in einer Vielzahl von Arbeiten betont wird: „Metacognitive strategies are strategies used to regulate and monitor processes and thus achieve metacognitive goals.“ (Stillman, 2011, S. 166). Niss (2001, S. 79) nennt als eine von zehn Kategorien der Forschung zum Modellieren in der Schule „Students' problems, strategies and meta-cognitive activity in dealing with application and modelling tasks“ und gibt als Ergebnis der von ihm analysierten Studien an: „Meta-cognitive control over application and modelling processes and procedures is a rare feature with students.“ (Niss, 2001, S. 80).

Maaß (2005, S. 120) führt im Kontext von Modellierungskompetenzen an: „Im Zusammenhang mit Handlungskompetenz wird in der didaktischen Diskussion zunehmend die Notwendigkeit der Entwicklung von Metakognition diskutiert.“

In der didaktischen Forschung ist es Konsens, dass die Entwicklung von Modellierungskompetenzen nur dadurch geschehen kann, dass Schülerinnen und Schüler selbstständig unter zurückhaltender Anleitung von Lehrpersonen modellieren. Modellieren kann man ebenso wenig durch zuschauen lernen, wie Schwimmen. Diese Sichtweise betonte bereits Burghes (1984, S. xiii):

The basic philosophy behind the approach ... of the modelling workshop for higher education is that to become proficient in modelling, you must fully experience it – it is no good just watching somebody else do it, or repeat what somebody else has done – you must experience it yourself. I would liken it to the activity of swimming. You can watch others swim, you can practice exercises, but to swim, you must be in the water doing it yourself.

Zur Förderung der Modellierungskompetenz ist es sowohl sinnvoll, Teilkompetenzen einzeln zu fördern (atomistischer Ansatz), als auch Modellierungsaufgaben als Ganzes bearbeiten zu lassen (holistischer Ansatz) (vergl. Blomhøj und Højgaard Jensen, 2003, S. 128 oder Brand, 2014).

Die im atomistischen Ansatz mögliche Trennung der Teilkompetenzen und der Teilprozesse mathematischer Modellierung ermöglicht eine Reduktion der Komplexität des Lernprozesses für Schülerinnen und Schüler (Greefrath, 2010b, S. 53). So wird allein das Mathematisieren oft als kognitiv sehr anspruchsvoll wahrgenommen (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003, S. 129). Eine separate Behandlung dieses oder weiterer Teilprozesse im Unterricht kann also insbesondere bei Schülerinnen und Schülern mit geringer Modellierungserfahrung den Lernprozess fokussieren und einen weniger zeitaufwändigen Einstieg in die Behandlung vom Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht darstellen (ebenda). Voraussetzung für die Realisierung dieses Ansatzes ist es, dass die Lehrperson die Teilkompetenzen kennen und über Konzepte verfügen, diese zu fördern. Blomhøj und Højgaard Jensen (2003, S. 128) weisen auf ein wichtiges Problem des atomistischen Ansatzes hin: „If the students always work with pre-structured problems. They cannot be expected to develop competences in structuring a complex domain of enquiry.“, so dass das vollständige möglichst selbständige Durchlaufen des Modellierungsprozesses für den Erwerb von Modellierungskompetenzen unverzichtbar erscheint.

Dieses vollständige Durchlaufen von Modellierungsprozessen zum Erwerb von Modellierungskompetenzen wird im holistischen Ansatz realisiert. Blomhøj und Højgaard Jensen (2003, S. 128) gehen davon aus, dass der holistische Model-

lierungsansatz grundsätzlich motivierender für Schülerinnen und Schüler sein könne, da vollständige Modellierungsprozesse einen höheren Grad an Authentizität vermitteln könnten. Hier entsteht das Problem, dass die Realisierung vollständiger Modellierungsprozesse im Unterricht oft sehr zeitaufwändig ist und daher möglicherweise unterbleibt.

Brand (2014) vergleicht in ihrer Interventionsstudie die Wirkungen des holistischen und atomistischen Ansatzes in 15 Schulklassen mit 204 Schülerinnen und Schülern, die an allen drei Kompetenzerhebungen teilgenommen haben. Sie konnte signifikante Lernzuwächse in den Teilkompetenzen sowohl in den Lerngruppen, die nach dem holistischen Ansatz unterrichtet wurden, feststellen, als auch in den Gruppen, die nach dem atomistischen Ansatz unterrichtet wurden (Brand, 2014, S. 162 ff). In der Studie konnten Unterschiede im Lernzuwachs zwischen der atomistischen und holistischen Gruppen in Abhängigkeit von der Schulform (Stadtteilschule, Gymnasien) identifiziert werden (Brand, 2014, S. 167 ff). Für den Kompetenzbereich „Gesamtmodellieren“ konnten größere Effekte beim holistischen Ansatz erwartungsgemäß bestätigt werden (Brand, 2014, S. 299 ff).

Diese Forschungsergebnisse machen deutlich, dass die Kenntnis der Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens und der möglichen Wege zur Vermittlung dieser Kompetenzen im Unterricht eine wichtige Voraussetzung für eine erfolgreiche Realisierung von Modellierungsprozessen in der Schule ist.

2.2.3. Beliefs zum mathematischen Modellieren

Der Umgang von Schülerinnen und Schülern mit den Inhalten des Mathematikunterrichts hängt unter anderem stark davon ab, welche Auffassungen die Schülerinnen und Schüler von Mathematik und dem jeweiligen Unterrichtsgegenstand haben und wie ihre persönliche Haltung zur Mathematik und dem Lerngegenstand ist. Niss (2001, S. 80) betont diesen Zusammenhang für den Modellierungsprozess:

Students' and teachers' attitudes, beliefs and perceptions regarding the nature and roles of mathematics and mathematical education decisively shape the parts they assign to applications and modelling as well as their engagement in and ability to do applications and modelling work.

Maaß (2004) untersucht in ihrer umfangreichen empirischen Studie die Beliefs von Schülerinnen und Schülern in Bezug auf Modellierung im Mathematikunterricht sowie die Entwicklung dieser Beliefs im Verlaufe einer Intervention mit umfangreichen Modellierungstätigkeiten im Mathematikunterricht. In ihrer

Arbeit verwendet Maaß die folgende Definition, die sowohl eine kognitive wie auch eine affektive Komponente betont:

***Beliefs** setzen sich aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten oder Angelegenheiten sowie damit verbundenen Emotionen und Haltungen zusammen. Synonym mit dem Begriff Beliefs wird der Begriff **Sichtweisen** verwendet.* (Maaß, 2004, S. 45)

Es zeigte sich, dass die Haltung zu Modellierungstätigkeiten teilweise, aber nicht bei allen Lernenden von der Thematik abhängig war (Maaß, 2004, S. 153) und sich überwiegend im Verlauf der Interventionsstudie positiv entwickelte (ebenda). Kritik gegenüber Modellierungsfragestellung richtete sich gegen die vermeintliche Ungenauigkeit von Lösungen oder Annahmen, das Fehlen von Lösungsschemata und dem vermeintlich geringen Bezug zur Mathematik, da weniger gerechnet wurde (Maaß, 2004, S. 154). All dies sind Aspekte, die für die Schülerinnen und Schüler offensichtlich in Bezug auf Mathematik so ungewöhnlich waren, dass sie zu Ablehnung führten. Gerade Schülerinnen und Schüler, die sonst weniger mathematikaffin waren, bewerteten jedoch Fragestellungen mit Realitätsbezug als positiv, da die Fragestellungen sinnhafter seien. Im Verlauf der Behandlung der Modellierungsfragestellungen veränderte sich die Haltung zur Relevanz von Mathematik für die Lernenden selbst positiv.

Ein Ergebnis der Studie von Maaß ist die Rekonstruktion von vier Idealtypen von Modellierern unter den Schülerinnen und Schülern. Sie unterscheidet (Maaß, 2004, S. 174 - 179):

1. Realitätsferne Modelliererin / Realitätsferner Modellierer
2. Mathematikferne Modelliererin / Mathematikferner Modellierer
3. Reflektierende Modelliererin / Reflektierender Modellierer
4. Desinteressierte Modelliererin / Desinteressierter Modellierer

Die realitätsferne Modelliererin oder der realitätsferne Modellierer ist an Mathematik interessiert mit entsprechenden Kompetenzen und sehr skeptisch gegenüber den Modellierungsfragestellungen. Dementsprechend werden die Schritte im Modellierungskreislauf, die außermathematische Aspekte beinhalten, ungern und weniger erfolgreich bearbeitet.

Die mathematikferne Modelliererin oder der mathematikferne Modellierer ist sehr an realitätsnahen Fragestellungen interessiert mit wenig Affinität gegenüber der Mathematik und entsprechend geringeren Kompetenzen. Diejenigen Schritte

im Modellierungskreislauf, die außermathematische Aspekte enthalten (Aufstellen des Modells, Validierung) werden gern und erfolgreich bearbeitet, während die innermathematischen Arbeitsschritte weniger erfolgreich gegangen werden.

Die reflektierende Modelliererin oder der reflektierende Modellierer ist sowohl inner- als auch außermathematisch kompetent und interessiert und somit sowohl in der Lage als auch motiviert, alle Schritte des Modellierungskreislaufs erfolgreich zu durchlaufen.

Die desinteressierte Modelliererin oder der desinteressierte Modellierer zeigt weder gegenüber Sachkontexten noch gegenüber mathematischen Inhalten eine positive Einstellung, was sich in geringem Erfolg in allen Bereichen des Modellierungskreislaufs ausdrückt.

Einen Überblick über diese vier Typen liefert Tabelle 2.1 (Maaß, 2006, S. 138).

	Positive Haltung zur Mathematik	Negative Haltung zur Mathematik
Positive Haltung zu Modellierungsproblemen	Reflektierend	Mathematikfern
Negative Haltung zu Modellierungsproblemen	Realitätsfern	Desinteressiert

Tabelle 2.1.: Modellierungstypen

Die Kenntnis dieser Typen ist für den Lehrenden, der Modellierung in seinen Unterricht einführen will, relevant, da die unterschiedlichen Typen unterschiedliches Lehrerhandeln erfordern.

2.2.4. Digitale Werkzeuge in Modellierungsprozessen

Der Einsatz von Taschenrechnern und Computern im Mathematikunterricht wird immer bedeutender. Dies zeigt sich unter anderem dadurch, dass in mehreren Bundesländern auch in den Abiturprüfungen entsprechende Hilfsmittel zugelassen sind. Modellierungsaktivitäten sind eine sinnvolle Lernumgebung, um in den Umgang mit diesen Hilfsmitteln einzuführen und diese zu üben; gerade die Behandlung komplexerer Modellierungsfragestellungen macht die Verwendung von Computern oft unabdingbar, so dass auch eine sinnvolle Anwendung von technischen Hilfsmitteln beim Modellieren vorliegt. Einiger der in diesem Forschungsprojekt eingesetzten Fragestellungen sind ohne den Computer als Hilfsmittel kaum sinnvoll zu bearbeiten, so dass der Computereinsatz Teil der

Vorbereitung für die Modellierungsaktivitäten war (Abschnitt 4.3) und die Rolle des Computers im Modellierungskontext dementsprechend hier thematisiert wird.

Greefrath und Weitendorf (2013, S. 182) setzen verschiedene Einsatzmöglichkeiten von Computern zu den Arbeitsschritten im Modellierungsprozess in Beziehung. Genannt werden:

- Recherchieren
- Experimentieren und Probieren
- Visualisieren
- Berechnen (analytisch oder numerisch)
- Simulieren
- Kontrollieren

Für diese Arbeitsschritte stehen unterschiedliche Werkzeuge zur Verfügung:

- Taschenrechner (wissenschaftlich oder grafikfähig)
- Internetbrowser
- Dynamische Geometriesoftware (DGS) (z. B. Geogebra, Cabri)
- Stochastiksoftware (z. B. Fathom)
- Tabellenkalkulationsprogramme (z. B. OpenOffice, Excel, Geogebra)
- Computeralgebrasysteme (CAS) (z. B. Geogebra, WxMaxima, Derive, Mathematica, Maple oder Handhelds mit CAS)
- Numerische Simulationssysteme (z. B. Mathcad, Scilab, SystemDynamics)

Generell haben all diese Instrumente in Bezug auf den Mathematikunterricht eine ambivalente Bedeutung: Wird das entsprechende Instrument beherrscht, so ist es beim Verstehen von Mathematik hilfreich und ein mächtiges Mittel beim Lösen von (zu dem Instrument passenden) Problemen, wie die oben angeführten Einsatzmöglichkeiten zeigen, aber auch schon von Burkhardt (1981, S. 133 ff.) ausgeführt wird. Wird das Instrument (noch) nicht beherrscht, so muss es zunächst eingeführt werden und der Umgang mit der jeweiligen Software von den Schülerinnen und Schülern erlernt werden. Daher ist es dann zunächst eine zusätzliche Hürde im Lern- und Arbeitsprozess und es wird zur Einführung

des Werkzeugs Unterrichtszeit in nicht unerheblichem Umfang benötigt. Dieses Problem tritt auch innerhalb einer Modellierungsaktivität auf.

Die oben genannten Formen des Einsatzes von digitalen Werkzeugen treten jeweils vorwiegend in bestimmten Modellierungsschritten auf:

Das *Recherchieren* geschieht hauptsächlich beim Übergang vom realen Problem zum realen Modell. Die Internetrecherche dient dazu, Informationen über den Kontext des realen Problems zu sammeln, relevante Einflussgrößen zu identifizieren und zu quantifizieren. Es können jedoch auch zu erreichten Ergebnissen Recherchen mit dem Ziel der Validierung durchgeführt werden. (vergl. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 183)

Beim Aufstellen des mathematischen Modells müssen häufig zunächst mit dem Material unterschiedliche Ansätze ausprobiert werden. Dies kann in systematisches *Experimentieren* übergehen und dabei auch fließend in die Arbeit in einem mathematischen Modell. Hierbei können unterschiedliche Werkzeuge sinnvoll zum Einsatz kommen: der Taschenrechner, wenn einzelne Rechnungen durchprobiert werden müssen oder kurze Wertetabellen benötigt werden, darüber hinaus der grafikfähige Taschenrechner, wenn unterschiedliche funktionale Zusammenhänge exploriert werden. Bei komplexeren Fragestellungen kommt als Universalwerkzeug eine Tabellenkalkulation in Frage oder speziellere Werkzeuge wie Fathom oder Geogebra, wenn von vornherein komplexe Terme untersucht werden, auch ein CAS. Die genannten Computerprogramme ermöglichen alle gleichzeitig das *Visualisieren* der Sachverhalte und damit den Perspektivenwechsel von einer numerischen oder algebraischen Darstellung in eine geometrische. (vergl. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 182)

Beim Arbeiten im mathematischen Modell können abhängig von der Fragestellung umfangreiche analytische oder numerische *Berechnungen* auftreten oder es muss *simuliert* werden. Für komplexe analytische Berechnungen ist der Einsatz eines Computeralgebrasystems sinnvoll. Für umfangreiche numerische Berechnungen und Simulationen kommt wiederum als Universalwerkzeug eine Tabellenkalkulation zum Einsatz oder bei entsprechenden Fragestellungen Stochastik- oder Geometriesoftware. Werkzeuge wie Mathlab oder SystemDynamics sind meist zu komplex, um sie für Simulationen im Mathematikunterricht einzuführen. Gerade bei der Bearbeitung komplexer Modellierungsfragestellungen müssen gleiche oder ähnliche Rechnungen wiederholt durchgeführt werden, wobei dann zum Teil mit unterschiedlichen Parametern gerechnet wird. Hierbei sind Werkzeuge wie eine Tabellenkalkulation einem Taschenrechner deutlich überlegen. Erst wenn beispielsweise Parametervariationen zur Funktionsinspektion ohne großen Aufwand durchführbar sind, werden diese in Modellierungsaktivitäten möglich und können ein Weg zu einer angemessenen Lösung sein. (vergl. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 182)

Bei der Übersetzung vom mathematischen Ergebnis in die Realität kommt dem *Kontrollieren* der Ergebnisse eine zentrale Rolle zu. Hier kommen die beim mathematischen Arbeiten eingesetzten digitalen Werkzeuge wiederum zum Zuge. Daneben wird auch in dieser Arbeitsphase oft visualisiert, um die Ergebnisse anderen in geeigneter Form präsentieren zu können. (vergl. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 183)

Für die Auswahl des adäquaten Werkzeugs gibt es noch keine gesicherten Kriterien und wenig empirisch abgesichertes Wissen (Kaiser et al., 2014). Die Einführung der computergestützten Werkzeuge im Mathematikunterricht geschieht sicher nicht nur in Hinblick auf Modellierungsfragestellungen, dies muss also in Bezug auf die Ziele von Mathematikunterricht insgesamt und die Bildungsziele von Schule gesehen werden.

2.2.5. Kriterien für Modellierungsaufgaben

Modellierungsprozesse können für Schülerinnen und Schüler auf Grundlage ganz unterschiedlicher Fragestellungen initiiert werden, wie bereits die von Kaiser-Messmer (1986, S. 145 ff.) ausführlich dargestellten Ansätze zeigen. Traditionelle Textaufgaben enthalten Modellierungsaspekte, Fermi-Aufgaben ermöglichen den Umgang mit offenen Fragestellungen und Ortlieb (2009) stellt sehr komplexe Fragestellungen mit Realitätsbezügen vor, bei deren Bearbeitung sehr umfangreiche Modellierungsprozesse erforderlich sind. Diesen Fragestellungen werden jeweils unterschiedliche Eigenschaften zugewiesen (z. B. „Offenheit“, „Authentizität“, „Komplexität“). Zur Einordnung der in diesem Projekt eingesetzten Fragestellungen wird das von Maaß (2010, S. 285 - 311) vorgestellte mehrdimensionale Klassifikationsschema für Modellierungsfragestellungen und Aktivitäten dargestellt. Es treten drei Kategorienbereiche auf:

1. Kategorien, die mit der Fragestellung verbundene Ziele betreffen,
2. Kategorien, die die Lerngruppe betreffen,
3. Kategorien, die die Fragestellung selbst betreffen.

Bezogen auf die Ziele der Behandlung einer Modellierungsfragestellung werden von Maaß (2010) die folgenden Aspekte genannt:

- Welche Ziele sollen in Hinblick auf das zukünftige Leben angestrebt werden? (Vorbereitung auf Berufsleben oder Alltag; Entwicklung des Wissens über mathematische Anwendungen)

- Welche Kompetenzen sollen entwickelt werden? (Modellierungskompetenzen, innermathematische Kompetenzen oder Argumentationskompetenzen)
- Wie wird Fragestellung im Rahmen der Schule als Lernfrage oder als Prüfungsfrage verwendet?
- Soll die Frage explizit die Beliefs der Schülerinnen und Schüler beeinflussen?

Für die Analyse der Zielgruppe werden eine Reihe von Aspekte angegeben (Alter, vorhandene mathematische oder übergreifende Kompetenzen, Modellierungserfahrung, Haltung gegenüber dem Mathematikunterricht, Interesse an Fragestellungen mit Realitätsbezügen, Lernumfeld)

Als Klassifikationsschema für die Modellierungsfragestellung selbst werden die folgenden neun Punkte angeführt:

1. Soll bei der Behandlung der Fragestellung der gesamte Modellierungsprozess durchlaufen werden oder nur einzelne Schritte des Modellierungskreislaufes? (Maaß, 2010, S. 298)
2. Von welcher der folgenden Arten sind die zur Verfügung gestellten Daten? (Maaß, 2010, S. 298)
 - Die Fragestellung ist überbestimmt: Es werden mehr Daten zur Verfügung gestellt, als benötigt werden, so dass relevante von irrelevanten Daten unterschieden werden müssen.
 - Die Fragestellung ist unterbestimmt: Für die Beantwortung der Fragestellung fehlen Daten, die durch geeignete Annahmen oder Recherche gewonnen werden müssen.
 - Die Fragestellung ist in einigen Aspekten überbestimmt, in anderen unterbestimmt.
 - Die Fragestellung enthält Daten, die keinerlei Bezug zur Fragestellung haben (Kapitänsaufgaben).
 - Die Fragestellung enthält genau die Daten, die zur Bearbeitung erforderlich sind.
3. In welcher Beziehung steht die Fragestellung zur Realität? (Maaß, 2010, S. 298)
 - Die Fragestellung ist authentisch. Nach Vos ist eine Modellierungsfragestellung authentisch, „if these are *clearly not created for educational purposes*“ (Vos, 2013, S. 715), wenn es also für unterschiedliche Betrachter offensichtlich ist, dass die Fragestellung nicht für Unterrichtszwecke entwickelt wurde, sondern außerhalb von Schule gestellt wird.

- Realistische Fragestellungen basieren auf realitätsnahen Sachverhalten und Daten, die aber nicht notwendig authentisch sind.
 - In eingebetteten Aufgaben ist eine mathematische Aufgabe in eine reale Situation eingebettet, deren Verständnis für die Bearbeitung der mathematischen Aufgabenstellung nicht erforderlich ist (nach Kaiser, 1995).
 - Bewusst künstliche Fragestellungen, bei denen die Qualität des Sachkontextes von den Schülerinnen und Schülern reflektiert werden soll.
 - Fragestellungen, die auf Fiktion beruhen, bei denen der Sachkontext also offensichtlich ausgedacht ist.
4. Auf welcher Art von Situation basiert die Fragestellung? Dies wird im PISA Framework (OECD, 2003, S. 32) ausgeführt:
- The situation is the part of the students' world in which the tasks are placed. It is located at a certain distance from the students. For OECD/PISA the closest situation is the student's personal life, next school life, work life and leisure, followed by the local community and society as encountered in daily life. Furthest away are scientific situations. Based on this, four types of situations have been denied: personal, educational/occupational, public and scientific.*
5. Führt die Fragestellung zu einem deskriptiven oder zu einem normativen Modell? Normative Modelle behandeln beispielsweise die Fragestellung nach einem fairen Steuermodell, während deskriptive Modelle beispielsweise zu Prognosen von Sachverhalten in der Zukunft führen.
6. Art der Präsentation der Fragestellung (Bild, Text, Text und Bild, Material wie Zeitungsartikel oder Wasserrechnung, reale Situationen wie der eigene Klassenraum).
7. Offenheit Fragestellung oder vorhandener Lösungen
- Aufgabenstellungen mit vorhandener Lösung, die als Beispiel dient oder auf Fehler hin untersucht werden kann.
 - Aufgaben zur Berechnung bestimmter Werte, bei denen die Ausgangssituation gegeben ist und der Weg zur Lösung nahe liegt.
 - Aufgaben zum Rückwärtsarbeiten, bei denen eine Zielsituation und der Rechenweg bekannt sind und dazu Ausgangssituationen gefunden werden sollen (z. B. was kann jemand für 10 Euro bei vorliegender Preisliste einkaufen?).

- Probleme zur Bestimmung bestimmter Werte, bei denen die Ausgangssituation bekannt, der Weg zur Lösung und die Zielsituation jedoch unbekannt sind.
- Probleme zum Rückwärtsarbeiten, bei denen nur die Zielsituation bekannt ist, ohne dass eine konkrete Fragestellung vorliegt (Ein Gartenteich soll einen Flächeninhalt von $10m^2$ haben).
- Fragestellungen zum Finden einer Anwendungssituation zu gegebenen mathematischen Gegenständen.
- Offene Fragestellungen, bei denen weder die Ausgangssituation noch die Zielsituation formuliert ist und auch kein Vorgehen vorgegeben ist. Dies kann zum Beispiel die Frage nach der Reorganisation eines Unternehmens sein, bei dem die zu lösenden Probleme erst noch identifiziert werden müssen.

8. Art der kognitiven Anforderung

- Außermathematische Modellierung: Die kognitive Anforderung hängt hier von der Komplexität der Situation und der Übersetzung in die Mathematik ab. Diese Komplexität hängt von der Anzahl der bekannten und unbekannten Einflussfaktoren in der Realität ab, sowie davon, wie genau das erforderliche mathematische Modell schon bekannt ist oder ob unterschiedliche Modelle erst erprobt werden müssen und die Anzahl der Schritte von der Realität zur Mathematik.
- Innermathematische Arbeitsschritte: Die kognitive Anforderung wird beeinflusst von der Anzahl der benötigten Algorithmen sowie der Komplexität, deren Kombination und von dem Ausmaß, in dem Problemlöseprozesse durchlaufen werden müssen.
- Je mehr Grundvorstellungen in die Bearbeitung der Fragestellung einfließen, desto höher sind die kognitiven Anforderungen.
- Das Sprachniveau der Darstellung der Fragestellung beeinflusst die kognitiven Anforderungen.
- Die kognitive Anforderung der Fragestellung hängt ebenso von dem für die Bearbeitung erforderlichen mathematischen Argumentationsniveau ab.
- Die Art und Komplexität der notwendigen Repräsentationsformen und gegebenenfalls der erforderlichen Repräsentationswechsel hat Einfluss auf die kognitiven Anforderungen der Fragestellung.

9. Zu welchem mathematischen Fachgebiet und zu welchem Schuljahr gehört die erforderliche Mathematik?

2.2.6. Aspekte des Problemlösens

Eine Abgrenzung zwischen Problemlösen und Modellieren

Zur Klärung der Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Problemlösen und Modellieren ist es notwendig, die Verwendung des Begriffs *Problem* zu klären

Dörner (1976, S. 10) verwendet die folgende Definition des Begriffs *Problem*.

Was ein Problem ist, ist einfach zu definieren: Ein Individuum steht einem Problem gegenüber, wenn es sich in einem inneren oder äußeren Zustand befindet, den es aus irgendwelchen Gründen nicht für wünschenswert hält, aber im Moment nicht über die Mittel verfügt, um den unerwünschten Zustand in den wünschenswerten Zielzustand zu überführen.

Dörner untersucht sowohl Problemsituationen in der Mathematik und anderen formalen Systemen (Dörner, 1976, S. 47, 56) als auch bei außermathematischen Fragestellungen wie Handlungsstrategien in der Entwicklungshilfe in einem Planspiel mit landwirtschaftlichen Bezug (Das beklagenswerte Schicksal von Tanaland) (Dörner, 1997, S. 22 ff) oder Fragestellungen aus den Naturwissenschaften (Dörner, 1976, S. 32 ff). Er verwendet daher zunächst diese sehr umfassende Definition, die jedoch im Weiteren präzisiert wird. Zentral für die Einordnung einer Fragestellung als Problem ist dabei das Auftreten einer *Handlungsbarriere*:

Ein Problem ist also gekennzeichnet durch drei Komponenten:

1. *Unerwünschter Anfangszustand s_α*
2. *Erwünschter Zielzustand s_ω*
3. *Barriere, die die Transformation von s_α in s_ω im Moment verhindert. (Dörner, 1976, S. 10)*

Tritt bei einer Fragestellung also keine Handlungsbarriere auf, so ist diese kein Problem, auch wenn die Beantwortung der Frage sehr aufwändig ist. Ein Beispiel hierfür ist die Situation, dass der Gauß-Algorithmus bekannt ist und ein lineares Gleichungssystem mit zehn Gleichungen und zehn Unbekannten ohne Computer zu lösen ist. Diese Situation ist kein Problem, bleibt jedoch eine anspruchsvolle Herausforderung. Dörner verwendet zur Abgrenzung solcher Fragestellungen von *Problemen* die Bezeichnung *Aufgabe*:

Wir grenzen Probleme von Aufgaben ab. Aufgaben sind geistige Anforderungen, für deren Bewältigung Methoden bekannt sind.

Die Division von 134 durch 7 ist für die meisten wohl kein Problem, sondern eine Aufgabe, da dafür eine Lösungsmethode bekannt ist. Aufgaben erfordern nur reproduktives Denken, beim Problemlösen muss etwas Neues geschaffen werden. (Dörner, 1976, S. 10)

Ob etwas Neues geschaffen werden muss, hängt dabei nicht nur von der Fragestellung selbst ab, sondern auch von der Person, die diese bearbeitet. Für die Einordnung als Aufgabe muss eine Methode zur Bewältigung derselben nicht nur im Allgemeinen bekannt sein, sondern sie muss im Moment der Bearbeitung der konkreten Person bekannt sein.

Was für ein Individuum ein Problem und was eine Aufgabe ist, hängt von der Vorerfahrung ab. Für den Chemiker ist die Herstellung von Ammoniak aus Luft kein Problem, sondern eine Aufgabe. Für den Laien im Bereich der Chemie ist die Ammoniaksynthese ein äußerst schwieriges Problem. Bei einer Aufgabe fehlt von den drei oben aufgezählten Komponenten der Problemsituation die dritte, nämlich die Barriere. (Dörner, 1976, S. 10)

Pólya (1945)¹ verwendet diese Unterscheidung von Problem und Aufgabe nicht. In der deutschen Übersetzung wird durchgehend der Ausdruck *Aufgaben* verwendet, während Pólya im englischen Original durchgehend von *problem* spricht. Die zweite wichtige Überschrift in Pólyas vierschrittigem Arbeitsanweisung zum Bearbeiten solcher Aufgaben (im Klappentext, 2010) verwendet diese Unterscheidung von Problem und Aufgabe nicht. In der deutschen Übersetzung wird durchgehend der Ausdruck *Aufgaben* verwendet, während Pólya im englischen Original durchgehend von *problem* spricht. Die zweite wichtige Überschrift in Pólyas vierschrittigen Arbeitsanweisung zum Bearbeiten solcher Aufgaben (im Klappentext, 2010) *Ausdenken eines Planes* deutet darauf hin, dass er Probleme im Sinne von Dörner (1976) meint (für eine Aufgabe muss man keinen Plan entwickeln, da dieser nach der Definition des Begriffs *Aufgabe* bereits bekannt ist).

Modellierungsfragestellungen können demnach als Problem bezeichnet werden, wenn die Komplexität der Fragestellung dergestalt ist, dass die Person, die die Fragestellung bearbeiten soll, vor einer Handlungsbarriere steht.

In den oben dargestellten Modellierungskreisläufen tritt generell ein Realitätsbezug in der Fragestellung auf, eine konstituierende Eigenschaft für Modellierungsprozesse, auf die auch Lesh und Doerr (2003) hinweisen. In Problemlöseprozessen in der Mathematik werden in großem Umfang Probleme ohne

¹Zitiert wird hier nach der 4. Auflage der deutschen Übersetzung von 2010.

Realitätsbezug betrachtet, so untersucht Pólya (2010) fast ausschließlich innermathematische² Problemlöseprozesse. Damit müssen für die Unterscheidung von Modellierungsfragestellungen und Problemlösefragestellungen zumindest zwei Aspekte unterschieden werden: ist ein Realitätsbezug vorhanden und handelt es sich um eine Aufgabe oder ein Problem? Die sich daraus ergebenden Konstellationen zeigt Tabelle 2.2.

	Fragestellung mit Realitätsbezug	Fragestellung ohne Realitätsbezug
Fragestellung ohne Handlungsbarriere Aufgabe	Modellierungsaufgabe	innermathematische Aufgabe
Fragestellung mit Handlungsbarriere Problem	Modellierungsproblem	innermathematisches Problem

Tabelle 2.2.: Problemlösen und Modellieren

Deutlich wird hier, dass die Fragestellungen, die unter den Modellierungsaspekt fallen, in einer Spalte auftreten, während Probleme in einer Zeile auftreten, womit es eine Schnittmenge von Modellierungs- und Problemlösefragestellungen gibt, aber auch Fragestellungen, die jeweils das eine Merkmal tragen, jedoch nicht das andere. Damit ergeben sich für die Abgrenzung des Problemlösens vom Modellieren zwei Grenzziehungen: einerseits die zwischen Modellierungsproblemen und innermathematischen Problemen (in der Tabelle die Abgrenzung zwischen Spalten), andererseits die zwischen Modellierungsaufgaben und Modellierungsproblemen (in der Tabelle die Abgrenzung zwischen Zeilen). Da nach Dörners Definition des Begriffs *Aufgabe* bei Modellierungsaufgaben der Lösungsweg bekannt ist, kann der Modellierungsprozess dann direkt durchgeführt werden, der Modellierungskreislauf muss also nur einmal durchlaufen werden, während bei Modellierungsproblemen in der Regel mehrere Durchläufe nötig sind.

Die Unterscheidung von innermathematischen Problemen und Modellierungsproblemen betrifft dann die Ausgangssituation, nämlich ob ein Realitätsbezug vorhanden ist oder nicht. Der in allen dargestellten Modellierungskreisläufen auftretende Übergang von der Realität in die Mathematik ist damit spezifisch für den Modellierungsprozess und tritt bei der Bearbeitung innermathematischer

²Der Ausdruck *innermathematisch* ist hier in einem sehr weitem Sinne gemeint. Im Bereich des Problemlösens mit Schülerinnen und Schülern werden beispielsweise auch Probleme aus dem Bereich der Spieltheorie (Nimm-Spiele) eingesetzt. Solche Probleme sollen hier als innermathematisch gelten.

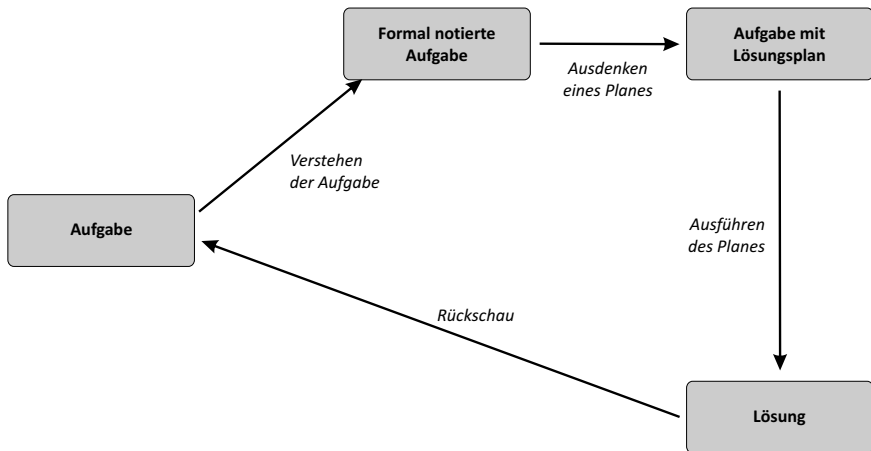


Abbildung 2.17.: Problemlöseprozess nach Pólya

Probleme nicht auf. Daher unterscheidet sich die Bearbeitung von Modellierungsproblemen von innermathematischen Problemen deutlich in den Arbeitsschritten, die bei diesem Übergang realisiert werden müssen: Die Entscheidung, welcher Ausschnitt der Realität berücksichtigt werden soll, welche Aspekte demzufolge in das mathematische Modell einfließen und wie dies realisiert wird, treten bei innermathematischen Problemen nicht auf. Ebenso ist beim Validierungsprozess bei Bearbeitung von Modellierungsproblemen eine Rückübersetzung in die Realität erforderlich, während die Überprüfung eines Ergebnisses beim innermathematischen Problemlösen ohne einen derartigen Übersetzungsprozess durchgeführt werden kann. Neben diesen Unterschieden zwischen der Bearbeitung von Modellierungsproblemen und innermathematischen Problemen treten jedoch auf strukturelle Ähnlichkeiten auf. Die vier Problemlösephasen, die Pólya (2010) im Klappentext beschreibt, weisen deutliche Ähnlichkeit mit dem Modellierungskreislauf in Abbildung 2.6 auf, wie Abbildung 2.17 zeigt³.

Deutlich wird hier, dass auch bei Pólya auf dem Weg von der Aufgabe (eigentlich müsste es *Problem* heißen) zur eigentlichen Lösungsarbeit (Ausführen des Plans) zwei Vorbereitungsschritte auftreten, ebenso wie bei komplexen Modellierungsproblemen. Werden Modellierungsprobleme innerhalb der Schule behandelt, sind die Anforderungen im innermathematischen Bereich in der Regel so ge-

³Die Einträge an den Pfeilen sind dabei die von Pólya (2010) im Klappentext verwendeten Formulierungen der deutschen Übersetzung, während in den grau unterlegten Stationen eigene Formulierungen stehen, da Pólya selbst die Stationen nicht benennt.

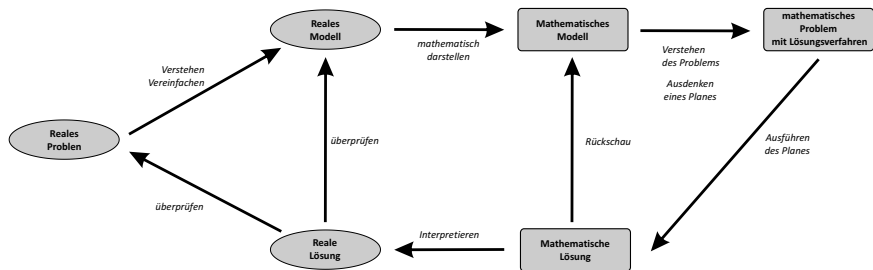


Abbildung 2.18.: Ergänzung eines Modellierungskreislaufes für mathematisch komplexe Situationen

staltet, dass ein Durchschnittsschüler diese bewältigen kann, haben also eher Aufgabencharakter. In diesen Fällen tritt neben dem Modellierungsproblem also kein innermathematisches Problem auf. Betrachtet man Modellierungsprozesse auch außerhalb der Schule, beispielsweise wenn ein Maschinenbauingenieur ein reales Problem zu bewältigen hat, kann das mathematische Modell so anspruchsvoll sein, dass es selbst wieder ein innermathematisches Problem darstellt. Für eine Visualisierung so einer Situation müsste man dann für den Übergang vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung in den Modellierungskreislauf den Problemlöseprozess nach Pólya einfügen. Abbildung 2.18 stellt einen Versuch dar, diese Synthese mit dem Modellierungskreislauf aus Abbildung 2.10 durchzuführen. Dabei fallen die Stationen *Aufgabe* und *Formal notierte Aufgabe* nach Pólya mit dem *mathematischen Modell* des Modellierungskreislaufes zusammen, da bei der Formulierung eines mathematischen Modells dieses in der Regel schon formal notiert wird. Da hier explizit das mathematische Modell ein *Problem* darstellen soll, wurde der Ausdruck *Aufgabe* durch *Problem* ersetzt.

Die Einordnung von einigen Modellierungsfragestellungen als Modellierungsproblem liefert zusammen mit Ergebnissen der Hattie Studie ein weiteres Argument für die Behandlung von Modellierungsproblemen im Mathematikunterricht. *Problem-solving teaching* (Hattie, 2009, S. 210) hat eine Effektstärke von 0.69, die auf Grundlage von sechs Metastudien, die 221 Einzelstudien umfassen (Hattie, 2009, S. 201), ermittelt wurde. Das zugrunde liegende Konzept umfasst die Bearbeitung von Modellierungsproblemen:

Problem solving involves the act of defining or determining the cause of the problem; identifying and selecting alternatives for a solution; or using multiple perspective to uncover the issues related to a particular problem, designing an intervention plan, and then evaluating the outcome. (Hattie, 2009, S. 210)

Heurismen

Heuristische Strategien sind Verfahren, mit deren Hilfe Lösungen für Probleme gefunden werden können (Heurismen = Findeverfahren (Dörner, 1976, S. 27)). Sie liefern damit Handlungsmuster zur Bewältigung von Problemsituationen. Einige dieser Strategien sind in der Literatur ausführlich beschrieben, z. B. von Pólya (2010, 1966a, 1966b), Dörner (1976), Kießwetter (1985, 1988, 2006) oder Bruder und Collet (2011). In der didaktischen Diskussion zum Problemlösen sind heuristische Strategien gut untersucht und treten vorwiegend zur Bearbeitung von innermathematischen Problemen auf. Da komplexe Modellierungsfragestellungen ebenfalls als Probleme aufgefasst werden können, ist es möglich, dass Heurismen auch im Modellierungsprozess als Strategien auftreten.

Pólya (2010, S. 155) verwendet den Begriff *Heuristik* auch für die wissenschaftliche Untersuchung von Heurismen:

Moderne Heuristik trachtet danach, den Vorgang des Lösens von Aufgaben zu verstehen, insbesondere die Denkopoperationen, die bei diesem Prozeß in typischer Weise von Nutzen sind.

Hier verwendet Pólya den Ausdruck *Denkopoperation* sehr ähnlich wie den Ausdruck *Heurismus*. In der Tabelle, die Pólya (2010) im Klappentext anführt (im Werk selbst nur als *die Tabelle* bezeichnet), stehen Fragen, die wichtige Denkopoperationen zum Lösen von Problemen anregen sollen, diese Tabelle kann also als Liste von Heurismen gelesen werden:

Wenn der Leser ausreichend mit der Tabelle bekannt ist und hinter den Anregungen die angeregte Handlung sehen kann, wird er erkennen, daß die Tabelle indirekt die Denkopoperationen aufzählt, die typisch bei der Lösung von Aufgaben helfen. Diese Denkopoperationen sind in der Reihenfolge angeordnet, in der sie am wahrscheinlichsten auftreten. (Pólya, 2010, S. 15)

Pólya bezieht sich in erster Linie auf das Lösen innermathematischer Probleme, er führt aber zu etlichen der von ihm anhand innermathematischer Beispiele beschriebener Heurismen auch außermathematische Beispiele an (Pólya, 2010, S. 67, S. 171 ff, S. 216, S. 252; Pólya, 1966a, S. 223 ff; Pólya, 1966b, S. 104, S. 149, S- 163). Daraus kann geschlossen werden, dass heuristische Strategien auch für den Modellierungsprozess nutzbar sind. Wenn nun eine Lehrkraft bei der Betreuung eines Modellierungsprozesses von Schülerinnen und Schülern bemerkt, dass eine bestimmte heuristische Strategie den modellierenden Kindern weiter helfen würde, so ist es eine sinnvolle strategische Intervention, die Lernenden zum Anwenden dieser Strategie zu bewegen. Als Strategien, die das eigentliche

Arbeiten an der Fragestellung steuern, sind heuristische Strategien auch als eine Form der Metakognition zu verstehen.

Im Folgenden wird eine Reihe von Heurismen aufgeführt und mit Beispielen erläutert. Dabei wurde ein sehr weites Verständnis dieses Konzepts im Sinne von Dörner (1976) zu Grunde gelegt: „Diejenige Struktur, die einen solchen Prozeß, wie er soeben dargestellt wurde⁴, organisiert und kontrolliert, nennen wir einen Heurismus, ein Verfahren zur Lösungsfindung.“. Dies führt dazu, dass hier auch solche mathematischen Handlungsstrategien auftreten, die in der Literatur nicht explizit als heuristische Strategien bezeichnet werden, aber Verfahren zur Lösungsfindung eines inner- oder außermathematischen Problems sind.

Organisieren von Material Die Bezeichnung für diese Handlungsstrategie verwendet Kießwetter (1985, S. 302) für die Denkopoperationen, mit denen das bei der Bearbeitung der Fragestellungen auftretende Material geordnet und strukturiert wird mit dem Ziel, Muster und Strukturen in der untersuchten Situation sichtbar und identifizierbar zu machen. Der Ausdruck Material wird dabei weit konzeptionalisiert und umfasst alle zu Beginn vorhandenen Informationen und deren Beziehungen zueinander ebenso, wie im Laufe des Bearbeitungsprozesses auftretenden Aspekte. Zur Organisation des Materials können unter anderem die bei Pólya (2010) in der Tabelle im Klappentext unter der Überschrift *Verstehen der Aufgabe* auftretenden Fragen beitragen. Diese dienen dazu, die Fragestellung sorgfältig aufzufassen, sich über die Ausgangssituation und das Ziel des Problems Klarheit zu verschaffen und die vorhandenen Rahmenbedingungen genau zu verstehen:

- *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?*
- *Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?*
- *Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!*
- *Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?* Pólya (2010, Klappentext)

Diese Klärungsprozesse sind offensichtlich zentral für die Arbeit an jeder Form von Problemen und müssen daher bei jeder Arbeit an Fragestellungen mit Problemcharakter sowohl am Anfang als auch wiederholt im Problemlöseprozess

⁴Gemeint sind Verfahren zur Lösung eines Problems.

beispielsweise nach dem Überprüfen eine Lösung oder Zwischenlösung durchgeführt werden. In Modellierungsprozessen treten hier, wie bereits dargestellt, unter anderem zusätzlich das Treffen von Annahmen und das Vornehmen von Vereinfachungen auf. Beim Organisieren von Material können auch weitere der im Folgenden beschriebenen Heuristiken wirksam werden. Beispielsweise kann die Wahl einer geeigneten Repräsentationsform der Schlüssel für das Identifizieren und Erkennen der relevanten Muster und Strukturen sein.

Systematisches Probieren Bruder und Collet (2011, S. 70 ff.) erläutern dieses Vorgehen folgendermaßen:

„Versuch und Irrtum“ - das sind die typischen Vorgehensweisen, wenn man sich nicht anders zu helfen weiß, aber das Problem lösen will.

Von dem diffusen Herumprobieren wird dort das *systematische Probieren* abgehoben, wobei „man sich gewisser Kriterien bewusst wird, nach denen man weitere Berechnungen und Darstellungen durchführt.“ (Bruder & Collet, 2011, S. 71)

Dörner (1976, S. 38) führt *Probieren* als den einfachsten Fall einer heuristischen Strategie an und nennt unter anderem als Beispiel das systematische Durchprobieren möglicher Züge beim Schachspiel. Ist der Suchraum kleiner, als dies in der Regel beim Schachspielen der Fall ist, kann mit systematischem Probieren häufig eine Lösung gefunden werden, beispielsweise bei den Nullstellen von Polynomen in Schulbüchern. In komplexeren Situationen hat systematisches Probieren jedoch nicht nur den möglichen Effekt, dass man zu einer Lösung gelangt, sondern auch einen Lerneffekt über den untersuchten Sachverhalt. Die Beschäftigung mit einzelnen Beispielen kann zur Entdeckung von Regelmäßigkeiten, Mustern oder Strukturen führen, die dann im weiteren Bearbeitungsprozess genutzt werden.

Zerlege dein Problem in Teilprobleme Pólya (1966a, S. 191) zitiert zu dieser Strategie Descartes und Leibniz:

*„Man zerlege jede Aufgabe, die man untersucht, in so viele Teile als es möglich und nötig ist, um die Aufgabe besser zu behandeln.“
Descartes : Oeuvres, Bd. VI, S. 18 ; Discours de la méthode, Teil II.*

„Diese Regel Descartes ist von geringem Nutzen, so lange die Kunst des Zerlegens ... unerklärt bleibt... Durch die Zerlegung

seiner Aufgabe in ungeeignete Teile könnte der unerfahrene Aufgabenlöser seine Schwierigkeit erhöhen.“ Leibnitz: Philosophische Schriften, herausgeg. von Gerhardt, Bd. IV, S. 331.

Daneben weist Pólya in den oben genannten Werken mehrfach auf die Verwendung von *Hilfsaufgaben* hin, die eine Möglichkeit der Zerlegung einer komplexeren Aufgabe in Teilaufgaben darstellt.

Eine Hilfsaufgabe ist eine Aufgabe, die wir nicht um ihrer selbst willen betrachten, sondern weil wir hoffen, dass ihre Betrachtung uns helfen kann, die ursprüngliche Aufgabe zu lösen. (Pólya, 2010, S. 122)

Ein Aspekt der Hilfsaufgaben ist die Zerlegung eines mehrschrittigen Lösungsweges in Einzelschritte, wie an dem folgenden Beispiel deutlich wird, das Pólya anführt: Zur Berechnung der Länge der Raumdiagonale eines Quaders wird zunächst als Hilfsaufgabe die Berechnung der Länge der Diagonale eines Rechteckes durchgeführt. Daneben führt Pólya (2010, S. 253) die Strategie unter der Überschrift *Zerlegung und Zusammensetzung* aus:

Recht häufig ist es ratsam, jede gegebene Größe für sich allein zu prüfen, die verschiedenen Teile der Bedingung zu trennen und jeden Teil allein zu untersuchen.

Die wichtige Frage *Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen?* findet sich bei Pólya (2010) auch im Klappentext, der die vier Schritte des Lösens eines Problems anführt.

Diese Strategie betrifft offensichtlich den gesamten Modellierungsprozess. Einerseits besteht der Modellierungskreislauf aus mehreren Schritten, der Arbeitsprozess des Modellierens ist hier also in Teilprobleme unterteilt, was zur Reduzierung der Komplexität im einzelnen Teilprozess führt. Andererseits wird bei komplexen Modellierungsfragestellungen der Modellierungskreislauf mehrfach durchlaufen, es werden also zunächst Teilaspekte bearbeitet, um dann auf diese Ergebnisse aufzubauen.

Die Zerlegung in Teilaspekte tritt daneben auch bei kleineren Arbeitssegmenten auf. Ein aus der Unterrichtspraxis bekanntes Problem für Schülerinnen und Schüler⁵, die Umrechnung einer Geschwindigkeitseinheit in eine andere, lässt sich mit dieser Strategie bearbeiten. Lernende suchen nach einer einschrittigen Lösung, also nach einem Umrechnungsfaktor. Auch wenn sie diesen kennen, sind

⁵Dieses Problem wurde in den in dieser Arbeit untersuchten Videographien auch immer wieder deutlich, dokumentiert beispielsweise in Beutel und Krosanke (2012)

sie oft nicht sicher in der Anwendung (Multiplizieren oder Dividieren), wenn das tiefere Verständnis fehlt. Dies kann nicht erlangt werden, solange nach einem einschrittigen Vorgehen gesucht wird. Erforderlich ist es, zunächst nur eine der beteiligten Einheiten (Zeiteinheit und Längeneinheit) umzurechnen und dann die andere.

Superpositionsverfahren Diese Methode beschreibt Pólya (1966a, S. 151 ff.) ausführlich, wobei er die Kernidee folgendermaßen formuliert: „Wir kombinieren spezielle Fälle, um den allgemeinen Fall zu erhalten“ (Pólya, 1966a, S. 155). Dieses Verfahren ist der Kern der linearen Algebra mit der Beschreibung von mathematischen Objekten durch Linearkombinationen von Basisvektoren und ist auch eines der Grundkonzepte in der Physik von Schwingen von Wellen und damit der Quantenphysik. Pólya erläutert das Verfahren anhand von Interpolationspolynomen, die als Linearkombination von elementaren Polynomen konstruiert werden können. Bei n Stützstellen sind die elementaren Polynome dabei jeweils an $n - 1$ Stellen Null und an der verbleibenden Stützstelle nehmen sie den Wert Eins an. Das Superpositionsprinzip korrespondiert mit der Strategie, ein Problem in Teilprobleme zu zerlegen, indem es ein mögliches Vorgehen beschreibt, wie nach der Bearbeitung der Teilprobleme die Einzellösungen zu einer Gesamtlösung kombiniert werden können.

Führe Neues auf Bekanntes zurück Pólya (2010, S. 120) stellt diesen Heurismus folgendermaßen dar: „Hier ist eine Aufgabe, die der deinen verwandt ist und schon früher gelöst ist.“ und stellt dazu in seiner Übersicht im Klappentext die Fragen „Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat gebrauchen? Kannst Du ihre Methode gebrauchen?“ (Pólya, 2010, S. 121). Als Beispiel führt Pólya eine Aufgabe aus der Stereometrie an, die mit Hilfe von ähnlichen Fragestellungen und dazugehörigen Verfahren aus der Planimetrie bearbeitet wird.

Bruder und Collet (2011, S. 84) führen als Beispiel die Bestimmung der Länge eines Drahtes an, der um eine Rolle gewickelt ist. Bei der Lösung wird dieses Problem auf ein ebenes Problem zurückgeführt, indem die Mantelfläche samt Draht als ebene Situation dargestellt wird.

Vergrößere den Suchraum Auf Grundlage des in Abbildung 2.19 gezeigten Beispiels konstatiert Dörner (1976), dass Problemlöser sich häufig bei der Suche nach Lösungen hinsichtlich der möglichen Operationen unnötigerweise selbst beschränken.

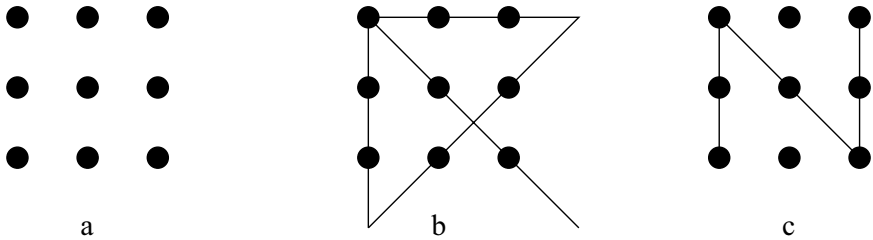


Abbildung 2.19.: Neun-Punkte-Problem: Die neun Punkte der Abb. a sind in einem Zuge durch vier gerade Linien zu verbinden. b: die Lösung, c: Elemente des subjektiven Suchraums der meisten Individuen (Dörner, 1976, S. 77)

Welches sind die Gründe dafür, dass der Suchraum, den Individuen betrachten, oftmals kleiner ist als der, welcher in Betracht gezogen werden müsste? Uns scheinen folgende Gründe wichtig zu sein:

1. *Unbekanntheit der relevanten Operatoren. Der Problemlöser kennt bestimmte Operatoren nicht, die in dem entsprechenden Realitätsbereich anwendbar sind. Er muss diese neu entdecken. Dazu braucht der Problemlöser Entdeckungsheurismen.*
2. *Fehleinstellungen bezüglich des zu lösenden Problems. Der Problemlöser hat eigentlich alle wichtigen Informationen über die zu verwendenden Mittel, weiß dies aber nicht, sondern hält die entsprechenden Informationen für irrelevant. In diesem Fall benötigt der Problemlöser Umstrukturierungsheurismen.*

Die Unterscheidung dieser beiden Heurismenformen darf nicht so verstanden werden, als handele es sich dabei um ganz verschiedenartige Heurismen. Vielmehr sind Entdeckungsheurismen auch als Umstrukturierungsheurismen brauchbar. Das Umgekehrte gilt allerdings nicht unbedingt. (Dörner, 1976, S. 77)

Dörner (1976, S. 78) nennt vier mögliche Gründe dafür, dass der Suchraum nicht angemessen ausgenutzt wird:

- Unkenntnis über Operationen außerhalb des Suchraumes.
- Persönliche Erfahrung, dass bestimmte Operationen außerhalb des subjektiven Suchraumes bisher nur mit wenig Erfolg eingesetzt werden konnten.
- Zuordnung von bestimmten Operationen zu Realitätsbereichen, die nicht mit dem aktuellen Problem in Zusammenhang stehen. Dazu gehört auch eine

Zuordnung zu bestimmten Vorgehensweisen (funktionale Gebundenheit) oder die untrennbare Zuordnung als Teil zu einem Ganzen (figurale Gebundenheit).

- Es liegt ein „Verbotsirrtum“ vor. Es wird unterstellt, dass der Suchraum z. B. durch den Kontext beschränkt wird, obwohl dies nicht der Fall ist („Ich dachte nicht, dass ich über den Bereich der neun Punkte hinaus zeichnen darf“).

Im Modellierungsprozess wird dieser Heurismus beispielsweise in Bezug auf das Treffen von Annahmen bei der Formulierung des realen Problems benötigt. Welche Annahmen sind sinnvoll, also „erlaubt“? Daneben sind in den untersuchten Modellierungsaktivitäten teilweise sehr fantasievolle Modellierungsansätze entwickelt worden, bei denen der Suchraum deutlich weiter gewählt wurde, als vorher erwartet.

Betrachte Grenzfälle oder Spezialfälle Pólya (2010, S. 207 ff.) führt diesen Heurismus auf Basis mehrerer Aufgaben aus. Ein Beispiel zeigt, wie die Betrachtung eines Spezialfalles in einer Bestimmungsaufgabe dazu führt, dass Ideen für die Berechnungen im allgemeinen Fall gewonnen werden (S. 210 ff.). In einer Beweisaufgabe wird ein Spezialfall gefunden, der die behauptete Aussage widerlegt. Für den Unterricht führt Pólya Beispiele an, in denen Spezialfälle allgemeine Situationen illustrieren.

Bei Optimierungsfragestellungen kann durch die Betrachtung von Grenzfällen oft einsichtig gemacht werden, dass es überhaupt eine optimale Situation gibt. Bei der verbreiteten Aufgabe, das Volumen einer Konservendose bei konstantem Materialverbrauch zu maximieren, machen Spezialfälle ($h = 0$ oder $r = 0$) deutlich, dass zwischen diesen Spezialfällen überhaupt ein Maximum auftreten muss.

Schoenfeld (1985, S. 76 ff.) führt die Heuristik der Betrachtung von Spezialfällen an mehreren Beispielen aus, bei denen das Rechnen mit einzelnen konkreten Beispielen dazu führt, dass eine Einsicht in die Situation oder eine Beweisidee entsteht. Spezialfälle können dabei zum Beispiel besonders symmetrische Fälle sein oder Fälle, in denen besonders einfache Zahlen auftreten.

Verallgemeinerungen Ein vorhandenes Problem kann durch Weglassen von Bedingungen verallgemeinert werden. Zunächst bezieht sich dadurch die Fragestellung auf einen umfassenderen Gegenstandsbereich und erscheint dadurch komplexer. Eine Verallgemeinerung kann jedoch auch dazu führen, dass das Finden der Lösung einfacher wird, wie Pólya (2010) am folgenden Beispiel verdeutlicht:

Es seien eine Gerade und ein reguläres Oktaeder der Lage nach gegeben. Suche eine Ebene, die durch die gegebene Gerade geht und das gegebene Oktaeder halbiert.“ Diese Aufgabe sieht schwierig aus, aber nur ein wenig Vertrautheit mit der Gestalt des regulären Oktaeders genügt, um folgende allgemeinere Aufgabe nahezulegen: „Eine Gerade und ein fester Körper mit einem Symmetriezentrum sind der Lage nach gegeben. Suche eine Ebene, die durch die gegebene Gerade geht und das Volumen des gegebenen Körpers halbiert.“ Die geforderte Ebene geht natürlich durch das Symmetriezentrum des festen Körpers und wird durch diesen Punkt und die gegebene Gerade bestimmt.

Im Kontext der Modellierung hilft das Weglassen von beschränkenden Bedingungen ebenfalls: Untersucht man die Fahrt mit einem Bus entlang einer Buslinie, so spielen Einflussfaktoren wie Ampeln, Kurven oder andere regionale Besonderheiten für eine spezielle Buslinie eine große Rolle. Lässt man all diese einschränkenden Faktoren in der Modellierung weg und betrachtet nur eine störungsfreie gerade Straße, wird das Modell allgemeiner und einfacher aber auch abstrakter. Es ist dadurch für den Einzelfall (zunächst) weniger aussagekräftig. Der Verallgemeinerungsschritt ist hier ebenso wie bei dem Oktaeder eine Abstraktion vom Einzelfall, der dabei hilft, die wesentlichen Aspekte genauer wahrzunehmen.

Variation beim Optimieren Dieser Aspekt wird in der Literatur nicht als heuristische Strategie aufgeführt, obwohl es zum Kernbereich mathematischen Vorgehens gehört. Dies wird daran deutlich, dass die allgemeine Form der Optimierung als Variationsrechnung bezeichnet wird. Es zeigt sich jedoch, dass dieses Prinzip Schülerinnen und Schülern in der Mittelstufe keineswegs selbstverständlich ist (Stender, 2014, S. 106).

Schupp (1992) führt neun mögliche Strategien an, wie ein Optimum zu finden ist (Verbessern, Sichern, Finitisieren, Umformulieren, Vereinfachen, Verallgemeinern, Rückführen, Weiterführen, Analogisieren). Diese Strategien stellen entweder direkt eine Vorgehensweise dar, wie durch Variation ein Optimum gefunden wird (Verbessern heißt, man wählt einen benachbarten Wert für x , für den $f(x)$ einen im Sinne des Optimierungszieles besseren Wert liefert - man variiert also x) oder die Strategie beschreibt einen Übergang der vorhandenen Situation in eine, in der durch Variation optimiert werden kann (z. B. Analogisieren).

In Modellierungsprozessen finden sich häufig Fragestellungen nach einer optimalen Situation, hier in dem Beispiel in Abschnitt 4.4.1, oder die Frage nach

der optimalen Positionierung von Hubschraubern (Ortlieb, 2009). Schülerinnen und Schülern ist die Idee der Optimierung nicht notwendigerweise vertraut, auch wenn im Alltag Situationen geläufig sein sollten, in denen man mit den vorhandenen Mitteln das *Beste* erreichen will. In quantifizierbaren Sachverhalten heißt optimieren immer, diejenige Situation zu finden, in der eine gewisse Größe maximal oder minimal wird, in Abhängigkeit von einer anderen Größe. Auch wenn zur Bearbeitung solcher Fragestellungen die Differentialrechnung nicht unbedingt erforderlich ist, so ist das Denkkonzept des funktionalen Zusammenhanges und die Verwendung von Variablen zum Auffassen der Problematik unabdingbar.

Rückwärtsarbeiten und Vorwärtsarbeiten Pólya (2010, S. 199) beschreibt diesen Heurismus anhand einer *Interpolationsaufgabe*, d. h. einer Aufgabe, bei der Ausgangssituation und Zielsituation bekannt sind, jedoch nicht der Weg zwischen diesen. Konkret geht es darum, mit Hilfe zweier Gefäße, die neun bzw. vier Liter fassen, eine Wassermenge von sechs Litern Wasser aus einem großen Reservoir abzumessen. Die vorgestellte Lösung gelingt, indem man von einer Zielsituation aus (sechs Liter im größeren Gefäß) rückwärts jeweils nach Situationen sucht, aus denen man die Nachfolgesituation herstellen kann.

Daneben nimmt Pólya Bezug auf Pappus und zitiert diesen:

In der Analyse gehen wir aus vom Verlangten und nehmen es, als ob es schon zugestanden wäre, wir ziehen Folgerungen daraus und Folgerungen aus den Folgerungen, bis wir einen Punkt erlangt haben, den wir als Ausgangspunkt bei der Synthese verwenden können. [...] Diese Art der Behandlung nennen wir Analyse oder rückläufige Lösung oder rückläufiges Schließen.

In der Synthese wird umgekehrt das bereits Bekannte oder als gültig Zugelassene, was wir in der Analyse zuletzt angetroffen haben, als Ausgangspunkt benutzt. Wir leiten daraus ab, was in der Analyse vorherging, und fahren in diesen Ableitungen fort, bis wir schließlich bei dem Verlangten ankommen. Dieses Verfahren nennen wir Synthese oder konstruktive Lösung oder fortschreitendes Schließen.

Es gibt zwei Arten von Analysen; die eine ist die Analyse der Beweisaufgaben und bezweckt die Aufstellung wahrer Sätze; die andere ist die Analyse der Bestimmungsaufgaben und bezweckt die Auffindung von Unbekannten.

[...]

Bei einer Bestimmungsaufgabe wird verlangt, dass wir eine gewisse Unbekannte x finden, die einer klar formulierten Bedingung genügt. (Pappus zitiert nach Pólya (2010, S. 164)).

Pólya weist hier auf eine Form der Verwendung von Variablen in der Mathematik hin, die zusätzlich beim Betrachten funktionaler Zusammenhänge auftritt, nämlich um quantitative Informationen über einen Sachverhalt unter Verwendung einer unbekannten Größe formulieren zu können. Man gibt der gesuchten Größe einen Namen in Form einer Variablen und formuliert mit Hilfe dieser Variablen das Wissen über die Größe, *so als würde man die Größe bereits kennen*. Dies führt dann zu Gleichungen oder Gleichungssystemen, deren Lösung dann den Wert für die unbekannte Größe liefert. Diese Strategie findet sich beispielsweise auch bei Schoenfeld (1985, S. 23), der sie dort anhand geometrischer Probleme erläutert. Bruder und Collet (2011) geben eine Reihe von Beispielen sowohl für das Vorwärtsarbeiten (Synthese) als auch das Rückwärtsarbeiten (Analyse) (S. 67 - 82) an. Diese Beispiele zeigen Anwendungsmöglichkeiten im Schulalltag auf.

Repräsentationswechsel Schnotz (2014) hat eindrucksvoll an mehreren Beispielen verdeutlicht, wie wirkungsvoll der Wechsel von einer gegebenen Situation zu einer anderen als Schlüssel beim Lösen von Problemen sein kann. Dörner (1976, S. 47) verwendet die Bezeichnung „Problemwechsel“ und illustriert diesen Heurismus mit Hilfe unterschiedlicher Probleme.

Repräsentationswechsel ist eine heuristische Strategie, die in sehr vielen unterschiedlichen Komplexitätsniveaus an vielen Stellen innerhalb und außerhalb der Mathematik verwendet wird. Ein Repräsentationswechsel findet statt, wenn ein und derselbe Sachverhalt zunächst mit einer Methode dargestellt wird und danach mit einer anderen.

Ein instruktives Beispiel stellt Kießwetter (1988) vor. Untersucht werden Efron-Würfel, deren Augensumme über alle Seiten mit 20 festgelegt ist, wobei die Verteilung der Augen auf die Würfelseiten jedoch von der üblichen Verteilung beliebig abweichen kann. Gefragt wird dann, wie die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind, wenn man zwei unterschiedliche Würfel gegeneinander antreten lässt und die jeweils größere gewürfelte Augenzahl gewinnt. Erstaunlich ist dabei, dass man Ringe von beispielsweise drei Würfeln finden kann, wobei Würfel A besser ist als B, B besser ist als C und C besser ist als A. Die Ordnung ist also nicht transitiv. Für einige der durchgeführten Beweise ist es fruchtbar, statt der zunächst verwendeten Darstellung für einen Würfel in der Form $A = \{1; 1; 3; 5; 5; 5\}$ die in Abbildung 2.20 gegebene zu verwenden. So lässt sich leicht ein zu A besserer Würfel B konstruieren, indem ein Spielstein von der

Fünf zur Sechs verschoben wird und wodurch gegenüber A drei zusätzliche Gewinnsituationen aus unentschiedenen Situationen entstehen und im Gegenzug zum Erhalt der Augensumme ein Spielstein von der Drei zur Zwei verschoben wird, wodurch nur eine Verlustsituation statt eines Unentschieden entsteht.

1	2	3	4	5	6
○		○		○	
○				○	
				○	

Abbildung 2.20.: Darstellung eines Efron-Würfels A mit der Augensumme 20 nach Kießwetter (1988, S. 15) mit Spielsteinen

Ein anderes Beispiel liefert die bekannte Fragestellung, wie die Abmessungen x, y gewählt werden müssen, um mit einem Zaun der festen Länge L ein möglichst großes rechteckiges Flächenstück einzuzäunen, wenn entlang des Flusses kein Zaun stehen muss (Abbildung 2.21). Die Standardrepräsentation ist eine funktionale Darstellung der Art $f(x) = x \cdot (L - 2x)$ für den Flächeninhalt und anschließender Berechnung der Maximalstelle. Fügt man jedoch die Symmetrieachse ein und betrachtet nur eine Hälfte des Problems, so verändert sich die Fragestellung dahingehend, mit einem L-förmigen Rand ein möglichst großes Rechteck abzugrenzen, was wiederum aus Symmetriegründen zu gleichen Schenkeln am L führt. Damit gilt $y = 2x$.

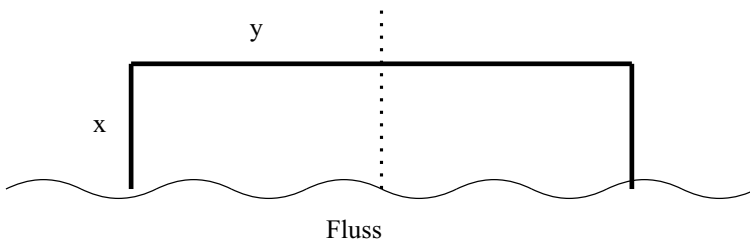


Abbildung 2.21.: Zaun am Fluss

Sowohl im traditionellen Mathematikunterricht als auch im Modellierungsprozess treten Repräsentationswechsel beim Umgang mit Funktionen auf. Bei funktionalen Zusammenhängen sind im Wesentlichen vier Repräsentationsformen verbreitet: Die Funktionsvorschrift mit Hilfe eines Terms, der Funktionsgraph, eine Wertetabelle sowie ein assoziierter Sachkontext (Stender, 2014). Analysieren

Schülerinnen und Schüler die mittels eines Terms gegebene Punkteverteilung bei den Bundesjugendspielen (vergl. Seite 150), so ist eine Darstellung des funktionalen Zusammenhanges mit Hilfe eines Graphen für das Verständnis unerlässlich.

Repräsentationswechsel durchziehen das gesamte Spektrum mathematischer Tätigkeit. Allein beim Bruchrechnen müssen mehrere unterschiedliche Repräsentationen zur Verfügung stehen: Symbolische Darstellungen, wobei man wiederum den Wechsel von einem ungekürzten zu einem gekürzten Bruch als Wechsel der Repräsentation sehen kann, geometrische Repräsentationen als Strecke / Zahlenstrahl, Kreisfläche oder Rechteckfläche sowie sprachlicher Ausdruck. Zum Verständnis des Addierens von Brüchen sind dann andere Repräsentationen günstig als für das Verständnis der Multiplikation, so dass für ein gutes Bruchrechnenverständnis souveräne Repräsentationswechsel erforderlich sind. Jede Termumformung stellt einen Repräsentationswechsel derselben Rechenvorschrift dar. Die Darstellung eines Sachverhaltes in einem Koordinatensystem (Koordinatisierung) ist häufig ein sehr hilfreicher Repräsentationswechsel, wobei wiederum der Wechsel von einem für eine Fragestellung ungünstigen Koordinatensystem zu einem günstigen ein weiterer Repräsentationswechsel sein kann, der sich als Schlüssel für die Lösung eines Problems erweist. Die Anwendung eines mathematischen Satzes erfordert häufig, die vorhandene Darstellung geeignet zu verändern, so dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Bruder und Collet (2011) verwenden nicht den Ausdruck Repräsentationswechsel, bezeichnen aber unterschiedliche Repräsentationsformen wie informative Figuren, Gleichungen, Tabellen, Wissenspeicher oder Lösungsgraphen als heuristische Hilfsmittel, die dabei helfen „ein Problem zu verstehen und zu strukturieren (etwa indem man eine Übersicht über das Gegebene und das Gesuchte anlegt), zu visualisieren (d. h. Beziehungen zwischen Größen in einer Figur oder einem Graphen sichtbar zu machen) bzw. Information zu reduzieren mithilfe einer Gleichung“ (Bruder & Collet, 2011, S. 45). Die als Schlüsselfrage bezeichnete Überschrift „Wie kann ich die Problemstellung veranschaulichen oder anders darstellen?“ Bruder und Collet (2011, S. 46) verdeutlichen dabei, dass der Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen auch hier mitgedacht wird.

Symmetrie Pólya (2010, S. 215) führt aus: „Wenn eine Aufgabe in irgendeiner Hinsicht symmetrisch ist, können wir aus der Beachtung der untereinander vertauschbaren Teile Nutzen ziehen, und oft wird es sich lohnen, diese Teile, die dieselbe Rolle spielen, in derselben Weise zu behandeln“.

Symmetrie tritt einerseits bei geometrischen Gebilden auf, das Finden von Symmetrien in einfachen geometrischen Formen und Mustern ist etablierter Unterrichtsinhalt. Daneben können auch andere mathematische Objekte Symmetrien aufweisen: Terme, wie die binomischen Formeln beliebigen Grades sind symmetrisch, Polynome dritten Grades sind immer symmetrisch zum Wendepunkt und die Binomialverteilung in der Stochastik weist Symmetrien auf. Pólya fordert: „Versuche symmetrisch zu behandeln, was symmetrisch ist, und zerstöre nicht mutwillig natürliche Symmetrie.“

Superzeichenbildung Mit dem Ausdruck *Superzeichenbildung* bezeichnet Kießwetter (1988, S. 20) das Denkkonzept, mehrere Objekte gedanklich zu einem neuen Objekt (Superzeichen, d. h. Zeichen, dass mehrere Zeichen bezeichnet) zusammen zu fassen. Beim weiteren Operieren kann dann im Arbeitsgedächtnis das Superzeichen verwendet werden anstatt mehrerer Einzelobjekte, wodurch das Arbeitsgedächtnis entlastet wird. Dörner (1976, S. 32) verwendet für das gleiche Konzept den Ausdruck *Komplexionen*. Die erste Verwendung dieses Konzeptes findet sich bei Miller (1956, S. 92): „Since the memory span is a fixed number of chunks, we can increase the number of bits of information that it contains simply by building larger and larger chunks, each chunk containing more information than before.“

Kießwetter (1988) erläutert das Konzept am Schneeräumproblem. In einer Region mit einigen Orten, die durch Straßen miteinander verbunden sind, schneit es über Nacht sehr stark. Die beschränkten Ressourcen zum Schneeräumen sollen zunächst so verwendet werden, dass möglichst schnell sichergestellt ist, dass jeder Ort irgendwie erreicht werden kann. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Räumfahrzeuge auf geräumten Straßen deutlich schneller vorankommen als beim Räumprozess, so dass Fahrten auf geräumten Straßen für den Zeitaufwand vernachlässigt werden können. *Gesucht wird daher ein hinsichtlich der Gesamtlänge möglichst kurzes Teilnetz des vorhandenen Straßennetzes, das es ermöglicht, jeden Ort zu erreichen.* Diese Fragestellung ist ausdrücklich nicht als Modellierungsfragestellung gemeint, da bei der Präsentation der Fragestellung das mathematische Modell bereits mit formuliert wird. Der Sachkontext dient nur der Illustration des Problems, ist aber in der Debatte zur Problemlösung ein Standardbeispiel für Superzeichenbildung.

In Abbildung 2.22 ist ein entsprechendes Straßennetz dargestellt, die Zahlen an den Linien geben die Straßenlängen zwischen den Orten an. Der Räumprozess soll in Ort *A* beginnen. Von *A* aus wird zunächst die Straße nach *B* geräumt (fett markiert), da sie kürzer ist als die Verbindung zu *H*. Nun werden *A* und *B* als eine Einheit gedacht (Superzeichen) und wie ein einziger Ort *AB* behandelt

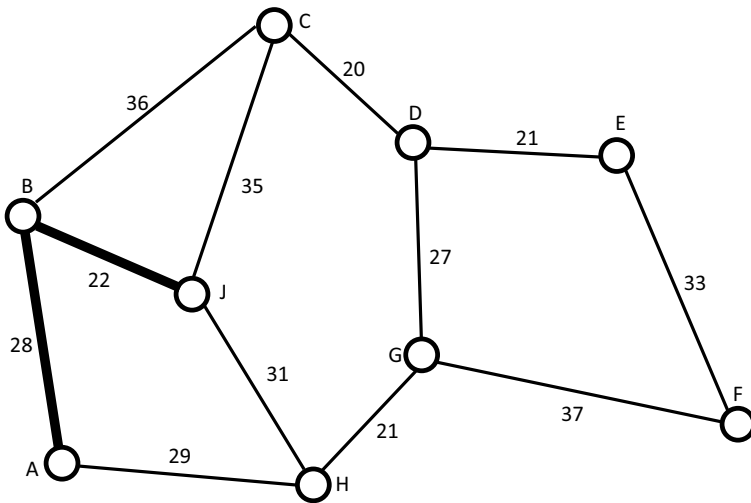


Abbildung 2.22.: Schneeräumproblem mit Start in A, fett dargestellte Straßen werden geräumt. Dies ist eine Zwischenlösung beim Start in Punkt A nach zwei Arbeitsschritten

und die kürzeste Verbindung dieser Einheit zum nächsten Ort gesucht. Dies ist die Verbindung \overline{BJ} , die als nächstes geräumt wird. Nun wird als Superzeichen die Gruppe ABJ gebildet und von dieser Gruppe aus die kürzeste Verbindung zu einem Ort gesucht, so dass als nächstes \overline{AH} geräumt wird. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Orte über das geräumte Teilnetz erreicht werden können. Auf diese Weise entsteht ein minimaler Teilgraph des vorhandenen Graphen, wobei dieses Vorgehen nur eines von mehreren existierenden Verfahren ist.

Wird die Fragestellung „Schneeräumproblem“ als Modellierungsproblem formuliert, indem beispielsweise eine reale Region vorgegeben wird und keine Annahmen und Vereinfachungen bei der Formulierung der Fragestellung gemacht werden, wird die oben vorgestellte Lösung weiterhin ein mögliches Vorgehen beschreiben. Damit wird deutlich, dass Superzeichenbildung auch bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen wirksam werden kann. Auch in der Sprache über die „reale Welt“ treten Superzeichen auf: betrachtet man beim Anfahrprozess am Kreisverkehr nicht einzelne Autos, sondern die ganze Autoschlange als einen Gegenstand, so stellt dies ein Superzeichen dar. Bauersfeld (2001, S. 7) und Fuchs und Käpnick (2008, S. 61) weisen darauf hin, dass das Bilden von Superzeichen in mathematischen Problemlöseprozessen ein wichtiges Merkmal mathematischer Begabung ist. Sind solche Superzeichen in der Alltagssprache gängige Ausdrücke

wie der Ausdruck „Autoschlange“, fällt ihre Verwendung leichter, als wenn entsprechende Superzeichen im Modellierungs- oder Problemlöseprozess erst kreiert werden müssen wie beim Schneeräumproblem. Bei der Bearbeitung der in Abschnitt 4.4.3 kurz beschriebenen Modellierungsprobleme kann in einigen Lösungsansätzen die Verwendung von Superzeichen rekonstruiert werden: bei der Konstruktion von Bekleidungsgrößen auf Basis gemessener Körperdaten von 200 Personen werden Datengruppen gebildet, die dann zu bestimmten Konfektionsgrößen werden. Die Gruppenbildung kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen und fasst die zu den entsprechenden Personen gehörenden Datensätze zu einem Superzeichen zusammen (z. B. „Größe M“). In der von Ortlieb (2009) vorgelegten Lösung zur Positionierung von Rettungshubschraubern wird in einem ersten Lösungsansatz ein Vorgehen beschrieben, dass zum Vorgehen beim Schneeräumproblem direkt analog ist: Es wird zunächst ein Hubschrauber bei nur zwei Orten positioniert, dann wird ein weiterer Ort hinzugenommen und die Lösung für zwei Orte (Superzeichen) mit der Lage des neuen Ortes kombiniert. Dieses kann dann für weitere hinzugewählte Orte mit entsprechenden Superzeichen (Hubschrauberposition für mehrere Orte) fortgesetzt werden.

Simulationen nutzen Simulationen sind bei einigen Modellierungsfragestellungen die einzige Möglichkeit, der Komplexität der Fragestellung gerecht zu werden und trotzdem Ergebnisse zu erhalten, weil analytische Lösungen mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht erreicht werden können (Ortlieb, 2009, S. 7 f.). Dies gilt auch bei einigen stochastischen Fragestellungen, die nicht auf Standardverteilungen zurückgeführt werden können, ein Beispiel hierfür findet sich bei Stender (2015). Daneben kann mit Hilfe von Simulationen „systematisches Probieren“ in großem Umfang durchgeführt werden, wenn Computer verwendet werden. Simulationen ohne Computer können beispielsweise in Form von Brettspielen durchgeführt werden. Dies kann sehr komplexe Formen annehmen wie das Spiel Ökolopoly von Frederik Fester von Ravensburger oder in einfachen Versionen wie im Beispiel *Kreisverkehr* in Abschnitt 4.4.2. Simulationen treten also in vielfältiger Form auf, mit oder ohne die Verwendung von mathematischen Formalia sowie mit oder ohne Verwendung von Computern. Die Simulation selbst ist jeweils ein geregeltes Verfahren. Das Wissen, was mit Simulationen erreicht werden kann und was nicht, und die darauf aufbauende Entscheidungskompetenz, eine Simulation zu nutzen oder nicht, führt zu einer heuristischen Strategie.

Probleme auf Algorithmen zurückführen Die Bedeutung algorithmischen Vorgehens in der Mathematik ist unbestritten und für die Schulmathematik

bereits von Engel (1977) ausführlich dargestellt. Engel erläutert seine Sichtweise auf Algorithmen folgendermaßen:

Die Haupttätigkeit des Menschen ist das systematische Lösen von Problemen. Ein Problem wird in zwei Schritten erledigt. Zuerst konstruiert man eine genau definierte Folge von Anweisungen zur Lösung des Problems. Dies ist eine interessante und geistreiche Tätigkeit. Dann kommt die Ausführung der Anweisungen. In der Regel ist dies eine zeitraubende, langweilige Arbeit, die man einem Rechner überlässt. Eine Folge von Anweisungen zur Lösung eines Problems nennt man einen Algorithmus. Der Begriff des Algorithmus überlappt sich stark mit den Begriffen Rezept, Prozedur, Prozess, Methode, Rechenverfahren. (Engel, 1977, S. 6)

In diesem Werk stellt Engel eine Vielzahl von Algorithmen aus verschiedenen Bereichen der Mathematik vor, unter anderem Newton-Verfahren, Verfahren zur numerischen Integration und systematische Primzahlssuche.

In Modellierungsprozessen spielen Algorithmen ebenso eine Rolle wie im innermathematischen Bereich, sie sind zum Teil sogar Ziel des Modellierungsprozesses. In der in Abschnitt 4.4.3 beschriebenen Fragestellung zur Gartenbewässerung ist das Ziel, für einen *beliebigen* Garten eine optimale Anordnung von Regnern zu finden. Eine Lösung dieses Problems kann also nicht in der Darstellung einer konkreten Bewässerungsanordnung liegen, sondern muss ein *Verfahren* zur Positionierung der Regner angeben, also einen Algorithmus. Werden Simulationen bei der Bearbeitung von Modellierungsfragestellungen genutzt, sind beim Einsatz von Computern Algorithmen erforderlich. Aber auch bei der Simulation zur in Abschnitt 4.4.2 dargestellten Fragestellung *Kreisverkehr*, die mit Hilfe eines Spielplanes geschieht, müssen sich die Lernenden auf eine genaue Abfolge von Arbeitsschritten - also einen Algorithmus - einigen, damit die Simulation sinnvoll eingesetzt werden kann.

Wie bei Simulationen ist der Algorithmus selbst nicht die Strategie, sondern die Entscheidungskompetenz, Algorithmen sinnvoll zu nutzen, also gegebenenfalls gezielt darauf hinarbeiten, ein Problem in eine Form zu transformieren, die das Nutzen von Algorithmen möglich macht. Sowohl beim Modellieren als auch beim innermathematischen Arbeiten kann es eine Strategie sein, zu versuchen, ein Ergebnis in Form eines Algorithmus zu formulieren.

Diskretisieren Zeitabhängige Prozesse in der Welt sind überwiegend kontinuierlicher Natur, da die zugrundeliegende Größe *Zeit* eine kontinuierliche Größe

ist⁶. Solche kontinuierlichen Prozesse können in ihrer Komplexität reduziert werden, indem man sie diskretisiert. Dies kann geschehen, indem man beispielsweise die Zeit diskretisiert, was bei mathematisierten Räuber-Beute-Modellen den Übergang von einer Differentialgleichung zu einer Differenzengleichung bedeutet. Eine andere Möglichkeit ist die räumliche Diskretisierung, so dass sich beispielsweise ein Fahrzeug auf einer Straße in einem Modell nicht mehr an jedem Ort befinden kann, sondern in bestimmten Segmenten. Das Fahren des Fahrzeugs entspricht dann im Modell einem Spielzug von einem Feld zum nächsten⁷. Bruder und Collet (2011, S. 75,188) stellen als Beispiel das Abbrennen einer Kerze diskretisiert dar.

Das Arbeiten in einem Modell, das diskrete Schritte enthält, geschieht in der Mathematik unter anderem mit Hilfe von *Iterationen* und *Rekursionen* oder auch mit Hilfe von Folgen. Ein Anwendungsbereich iterativer und rekursiver Verfahren in der Mathematik außerhalb von zeitabhängigen Prozessen ist das Finden von Näherungslösungen, zum Beispiel beim Lösen von Gleichungen mit Hilfe des Newton Verfahrens oder der Bestimmung des Umfang des Kreises nach Archimedes mit Hilfe von n -Ecken bei jeweils verdoppelter Eckenzahl oder dem numerischen Lösen von Differentialgleichungen. Wird in solchen Verfahren formal ein Grenzübergang durchgeführt, können aus dem Verfahren exakte Ergebnisse bestimmt werden, wie in der Differential- und Integralrechnung. Bruder und Collet (2011) betrachten dies unter dem Heuristischen Prinzip *Zerlegen und Ergänzen*.

Analogien Analogien können beim Lösen von Problemen genutzt werden, wenn auffällt, dass man bereits ein *ähnliches*⁸ Problem bearbeitet hat und hieraus Nutzen für das Lösen des aktuellen Problems ziehen kann.

Analogie durchzieht unser ganzes Denken, unsere Alltagssprache, unsere trivialen Schlüsse ebenso wie künstlerische Ausdrucksweisen und höchste wissenschaftliche Leistungen. Analogie wird auf sehr verschiedenem Niveau gebraucht. Man verwendet oft vage, mehrdeutige, unvollständig geklärte Analogien, aber Analogie kann auch die hohe Stufe mathematischer Genauigkeit erreichen. Alle Arten von Analogien können bei der Entdeckung einer Lösung eine Rolle

⁶Im Rahmen der Quantenphysik gilt dies nur eingeschränkt, was aber für die meisten Situationen in der Welt nicht berücksichtigt werden muss.

⁷Dieses Verfahren wurde in der Fragestellung *Kreisverkehr* verwendet, beschrieben ab S. 136

⁸„Analogie für 'Entsprechung, Ähnlichkeit, Gleichheit von Verhältnissen'“, Digitales Wörterbuch der deutschen Sprache

spielen, und so sollten wir keine davon vernachlässigen. (Pólya, 2010, S. 52 f.)

Analogien können offensichtlich nur genutzt werden, wenn bereits entsprechende andere Problemlöseerfahrung oder Modellierungserfahrung vorliegt. Bruder und Collet (2011, S. 83) weisen auf dieses Problem in Hinblick auf die Nutzung von Analogien in der Schule hin.

Dran bleiben und Aufhören - jeweils zum richtigen Zeitpunkt Dörner (1976, S. 65) beschreibt als wichtige Strategie die Fähigkeit, sich bei Misserfolg umzuorientieren. Andererseits ist in allen Problemlöseprozessen, also auch beim Modellieren, das Durchhaltevermögen eine zentrale Haltung des Problemlösers oder der Problemlöserin: Gibt man zu früh auf, vergibt man die Chance, einen erfolgversprechenden Ansatz auch bis zum Erfolg zu bringen. Hier liegt also ein Balanceakt zwischen zwei Strategien vor: „Halte möglichst lange an einem Ansatz fest“ versus „Sei flexibel in der Lage, dich umzuorientieren“ (Pólya, 1966b, S. 50).

2.3. Zusammenfassung

Zur Beschreibung des geistigen Bezuges von Menschen auf die Realität ist der Modellbegriff spätestens seit Stachowiak (1973) eine wichtige Möglichkeit. Modelle sind dabei die Komplexität reduzierende Abbildungen eines Ausschnitts der Realität oder von Darstellungen der Realität, die in einer Situation der modellbildenden Person helfen, bestimmte Ziele zu erreichen. Mathematische Modelle sind solche Modelle, bei denen das Modell in der Sprache der Mathematik formuliert wird. Mathematische Modelle ermöglichen es somit, mathematische Verfahren zur Bewältigung realer Situationen zu nutzen.

In der fachdidaktischen Diskussion werden unterschiedliche Gründe für die Behandlung von Modellierungsfragestellungen im Mathematikunterricht angeführt und aufgezeigt, dass damit verschiedene Ziele des Mathematikunterrichts erreicht werden können. Dazu gehören die Förderung eines *kritischen Umgangs* mit Mathematik, die Entwicklung eines *angemessenen Bildes* von der Mathematik und die Förderung des *Verstehens und Behaltens* auf Grundlage des motivationalen Aspektes der Behandlung von Modellierungsfragestellungen im Mathematikunterricht. Aus einer übergeordneten Perspektive lassen sich die *pragmatische* Richtung und die *wissenschaftlich-humanistische* Richtung unterscheiden, wobei erstere im Kern darauf orientiert, dass Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, Mathematik zur Lösung realer Probleme zu verwenden, während letztere

die Mathematik als Wissenschaft und die Rolle des Mathematikunterrichts zur Vermittlung humanistischer Bildungsziele betont.

Diese Argumente haben sich einerseits in der Aufnahme der Modellierungskompetenz in die Konzeption nationaler und internationaler Vergleichsuntersuchungen niedergeschlagen und haben darüber hinaus zur Aufnahme des Modellierens in die Bildungspläne in Deutschland für alle Schulstufen geführt. In der Schulpraxis hat das Modellieren jedoch in der Regel noch nicht den Stellenwert, den es gemäß der Bildungspläne und der fachdidaktischen Ansprüche haben sollte.

Betrachtet man den Modellierungsprozess als Ganzes, also mit einem Übergang von der Realität in die Mathematik und einer Rückübersetzung eines mathematischen Resultats in die Realität zur Beantwortung einer Fragestellung, wird dieser Prozess in der Regel durch einen Modellierungskreislauf dargestellt. Modellierungskreisläufe liegen in unterschiedlicher Komplexität vor. Einfache Modellierungskreisläufe unterscheiden nur zwischen der realen Welt und der Mathematik, während andere Kreisläufe weitere Modellebenen beinhalten, wie die mentale Repräsentation der Situation im Geiste des Modellierers / der Modelliererin oder die Ebene der Nutzung von Computern zur Bearbeitung von Modellierungsproblemen. Als „Modelle des Modellierungsprozesses“ haben all diese Modellierungskreisläufe ihre Bedeutung in einem jeweils spezifischen Erklärungs- oder Nutzungspotential. So kann die Anzahl der Zwischenstationen beim Übergang von der Realität zur Mathematik variieren, je nachdem, ob man Modellierungsprozesse von sehr erfahrenen Modellierern / Modelliererinnen im Blick hat, die oft schnell in die Mathematik übergehen, oder ob man den Anfängern den Modellierungsprozess nahe bringen möchte, die gegebenenfalls mehrere Schritte der Reformulierung und Vereinfachung benötigen, um zu einem mathematischen Modell zu gelangen. In dem vorliegenden Forschungsprojekt wurde ein erstmals von Maaß (2005) verwendeter Modellierungskreislauf eingesetzt, der einen Zwischenschritt zwischen Realität und Mathematik einfügt.

Die in Modellierungskreisläufen auftretenden Handlungen, also die an den Pfeilen ausgewiesenen Tätigkeiten, erfordern bei den die Modellierung ausführenden Personen jeweils spezifische Kompetenzen. Diese Teilkompetenzen des Modellierens (u. a. Vereinfachen, Annahmen treffen, Validieren) bilden zusammen mit den Kompetenzen, die zur Steuerung und Bewältigung des gesamten Modellierungsprozesses erforderlich sind, die Modellierungskompetenzen. Diese Kompetenzen werden in der fachdidaktischen Diskussion noch weiter ausdifferenziert. Der Erwerb von Modellierungskompetenzen ist ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts und kann mit unterschiedlichen Zugängen erfolgen. Brand (2014) stellt in ihrer Studie dar, dass sowohl der atomistische Zugang wie auch der holistische Zugang mögliche Wege zur Entwicklung von Modellierungskompetenzen sind. In dem hier verwendeten Forschungsfeld (dargestellt in

Abschnitt 4) wird ein holistischer Zugang verwendet.

Bei der Realisierung von Modellierungsaktivitäten sind Lehrpersonen mit unterschiedlichen Beliefs in Bezug auf mathematisches Modellieren bei den Schülerinnen und Schülern konfrontiert. Maaß (2004) rekonstruierte vier Typen in Hinblick auf die Haltung zum Modellieren (realitätsfern, mathematikfern, reflektierend, desinteressiert). Lehrpersonen, die Modellierungsaktivitäten anleiten, müssen sich dieser Möglichkeiten bewusst sein, um jeweils angemessen reagieren zu können.

Die auftretenden Fragestellungen können durch unterschiedliche Kriterien geordnet werden, u. a. Komplexität der Fragestellung, Authentizität und Art des Realitätsbezuges. Eine detaillierte Darstellung der Kriterien findet sich bei Maaß (2010). Für Lehrpersonen, die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung solcher Fragestellungen anleiten, ist ein Bewusstsein über den genauen Stellenwert der gerade verwendeten Fragestellung unabdingbar. Beispielsweise werden „Fermi-Aufgaben“ häufig zur Entwicklung bestimmter Modellierungskompetenzen eingesetzt (Annahmen treffen), für die sie besonders gut geeignet sind. Fermi-Aufgaben sind aber oft nicht authentisch, da sich in vielen Fällen nicht erschließt, für wen die Antwort auf die Fragestellung wirklich eine relevante Information darstellt. Wird dieser Stellenwert im Unterricht falsch thematisiert, kann dies zu Fehlkonzepten bei Schülerinnen und Schülern führen. In dem hier genutzten Forschungsfeld wurde angestrebt, realitätsnahe authentische komplexe Fragestellungen einzusetzen. Dabei sind die Fragestellungen jedoch meist nicht aus dem Erfahrungsumfeld der Schülerinnen und Schüler, also nicht schülerrelevant.

Digitale Werkzeuge sind beim mathematischen Modellieren häufig hilfreich und zum Teil ist ihr Einsatz unabdingbar. Es existieren für diesen Zweck eine Vielzahl unterschiedlicher Instrumente, von denen einige speziell für schulische Zwecke entwickelt wurden (Geogebra, Capri, Fathom, Derive), andere allgemein für mathematische Anwendungsgebiete (Mathlab, Maple) während mit Tabellenkalkulationsprogrammen digitale Werkzeuge vorliegen, die ursprünglich für Buchhalter entwickelt wurden und nunmehr in vielen Bereichen außerhalb von Schule und Universität eingesetzt werden. Für diese Werkzeuge gibt es jeweils spezifische Gründe für oder gegen die Verwendung in schulischen Kontexten.

In der fachdidaktischen Debatte zum Problemlösen wird überwiegend der Umgang mit im weitesten Sinne innermathematischen Fragestellungen behandelt. Als Problem in Abgrenzung zu Aufgaben werden dabei solche Fragestellungen bezeichnet, für die der Weg zur Lösung nicht bekannt ist und daher unter Verwendung von heuristischen Strategien erarbeitet werden muss. Hier gibt es somit auch eine Überschneidung mit Modellierungsprozessen, die als Problemlöseprozesse bezeichnet werden können, wenn die vorliegende Fragestellung für die

Person, die die Fragestellung bearbeiten soll, ein Problem im oben genannten Sinne darstellt. Damit ist die Kenntnis von heuristischen Strategien für Lehrpersonen relevant, die wie in diesem Projekt Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen betreuen. Darüber hinaus zeigte sich im Rahmen der Untersuchung, dass die Kenntnis heuristische Strategien auch die Formulierung von im nächsten Kapitel dargestellten Lehrerinterventionen hilfreich sein kann.

Die ausgewählten Theorieaspekte zum Modellieren im Mathematikunterricht wurden als relevant für die Betreuung von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen angesehen und daher hier dargestellt und im Masterseminar zur Vorbereitung der Studierenden auf diese Tätigkeit thematisiert (Abschnitt 4.3). In gleicher Weise wurden die im nächsten Kapitel dargestellten Theorien zu Lehrerinterventionen ausgewählt.

Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen
Modellierungsaufgaben

Stender, P.

2016, XII, 323 S. 33 Abb., 3 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-14296-4