

2 Relationen

Was ist eine Relation¹?

Beim Studium etwa der natürlichen Zahlen interessieren uns weniger die Zahlen als isolierte Objekte als vielmehr die Beziehungen zwischen ihnen. Das sind solche Beziehungen wie „ist ein Teiler von“, „ist kleiner als“, „ist Nachfolger von“ usw. Diese sogenannten *Relationen* machen gerade das Wesentliche in unserer Kenntnis von den natürlichen Zahlen aus. Das gilt generell. Für Mengen haben wir bereits die Inklusion, die ja auch *Enthaltenseinsbeziehung* oder *Teilmengenbeziehung* genannt wird, als eine wichtige Relation kennen gelernt. In der Geometrie ist die einfachste Relation die Inzidenz², mit der ausgedrückt wird, dass ein geometrisches Objekt „in einem anderen liegt“. Der Begriff der Relation ist also für die Mathematik von zentraler Bedeutung.

2.1 Der Begriff der n -stelligen Relation

Sind A und B beliebige Mengen (über eventuell verschiedenen Grundbereichen G_1 bzw. G_2), so ist das *kartesische Produkt* $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ dieser Mengen A und B eine Menge dritter Stufe (vgl. Definition 1.11).

Definition 2.1: R ist (definitionsgemäß) eine zweistellige **Relation zwischen A und B** genau dann, wenn R eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$ ist.

$$R \subseteq A \times B.$$

Andere Sprechweisen: „ R ist eine *Relation aus A in (nach) B* “ bzw. „*auf (über) $A \times B$* “. Darüber hinaus definieren wir:

- $D(R) := \{x \mid \bigvee_y (x, y) \in R\}$ heißt der **Definitionsbereich** (oder *Vorbereich*³) und
- $W(R) := \{y \mid \bigvee_x (x, y) \in R\}$ der **Wertebereich** (oder *Nachbereich*³) von R .

Ist $R \subseteq A \times B$, also R eine Relation zwischen A und B , und setzt man $C := A \cup B$, so kann man R als Teilmenge von $C \times C$ auffassen.

Will man jede Menge von geordneten n -Tupeln (n natürliche Zahl) als Relation auffassen, so benötigt man den Begriff der *n -stelligen Relation*.

- R ist **n -stellige Relation auf $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$** : $\Leftrightarrow R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Gewöhnlich interessieren uns jedoch vor allem solche Mengen von geordneten n -Tupeln, deren Komponenten Elemente ein und derselben Menge M sind. Gilt also

$$M := A_1 = A_2 = \dots = A_n,$$

so ist R eine n -stellige Relation auf M^n oder schlichter eine n -stellige Relation *in M* :

- R ist **n -stellige Relation in M** : $\Leftrightarrow R \subseteq M^n$.

¹ relation (franz.) = Beziehung, Verhältnis; aus: relatio (lat.) = Bericht(erstattung), das Zurücktragen.

² incidere (lat.) = begegnen, in/auf etwas fallen.

³ Davon abweichend werden mitunter auch die Mengen A und B selbst so genannt.

Für eine zweistellige Relation zwischen A und B gilt:

➤ $D(R) \subseteq A$ und $W(R) \subseteq B$.

Die Vereinigung beider Bereiche heißt das *Feld* $F(R)$ von R : $F(R) := D(R) \cup W(R)$.

Beispiel 2.1: Sind A und B die Mengen aller Punkte bzw. Geraden einer Ebene, so ist die *Inzidenz* I zwischen Punkten und Geraden eine zweistellige Relation auf $A \times B$.

Ist $(P, g) \in I$, so schreibt man dafür auch $P I g$ und sagt „(der Punkt) P *inzidiert mit* (der Geraden) g “ oder „ P *liegt auf* g “ oder „ g *geht durch* P “ oder auch „ g *inzidiert mit* P “. (Fasst man – wie in der Schule üblich – B als Menge von Punktmenge auf, so ist darüber hinaus auch die Schreibweise $P \in g$ erlaubt.)

Beispiel 2.2: In der euklidischen Geometrie (nach EUKLID 3. Jhd. v. Chr.) ist eine *Fahne* ein geordnetes Tripel $(O, \bar{s}, \bar{\lambda})$, wobei $\bar{s}$ ein Strahl mit dem Anfangspunkt O und $\bar{\lambda}$ eine offene Halbebene sind; die Randgerade s der Halbebene $\bar{\lambda}$ ist dabei die Trägergerade des Strahls $\bar{s}$. Sind A_1, A_2 und A_3 die Mengen aller Punkte, Strahlen bzw. offenen Halbebenen des Raumes, so bilden alle Fahnen eine 3-stellige Relation auf $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Beispiel 2.3: In der Menge aller Punkte des euklidischen Raumes ist die Zwischenbeziehung ZW eine dreistellige Relation. Ist $(P, Q, R) \in ZW$, so sagt man „(der Punkt) Q liegt auf der Geraden PR *zwischen* (den Punkten) P und R “. Die Eigenschaften dieser Zwischenbeziehung ZW werden dann gegebenenfalls durch Anordnungsaxiome festgelegt.

Für eine n -stellige Relation R in einer Menge M verabreden wir:

Ist $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$, so sagt man, dass die Relation R auf das n -Tupel *zutrifft* bzw. dass die Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$ (in dieser Reihenfolge genommen) *in der Relation* R *stehen*.

Beispiel 2.4: Drei natürliche Zahlen a, b und c bilden ein *pythagoreisches*⁴ *Zahlentripel* genau dann, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Auf diese Weise wird in $\mathbf{N}$ eine dreistellige Relation PZT definiert: $PZT := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{N} \wedge a^2 + b^2 = c^2\}$. Es ist $PZT \subseteq \mathbf{N}^3$ mit $(3, 4, 5) \in PZT$, $(5, 12, 13) \in PZT$, aber $(2, 3, 4) \notin PZT$. Will man – auch mit Blick auf die geometrische Interpretation – triviale Lösungen der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ausschließen, wie z. B. das Tripel $(0, 5, 5)$, wird die Relation nicht in $\mathbf{N}$, sondern in $\mathbf{N}^*$ definiert.

Beispiel 2.5: Verallgemeinert man die in Beispiel 2.4 betrachtete Relation PZT , indem die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit $n > 2$ ($n \in \mathbf{N}$) zugrunde gelegt wird, so ist die Relation $FZT := \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{N}^* \wedge a^n + b^n = c^n \wedge n \in \mathbf{N} \wedge n > 2\}$, die alle derartigen Fermatschen⁵ Zahlentripel umfasst, die leere Menge⁶. Dass die Fermatsche Vermutung aus dem Jahre 1637, die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ sei für $n > 2$ unlösbar, zutrifft, wissen wir erst seit wenigen Jahren. 1993/94 löste ANDREW J. WILES (geb. 1953) dieses berühmte Problem – assistiert von RICHARD L. TAYLOR (geb. 1962).

⁴ Nach dem Satz des Pythagoras; PYTHAGORAS VON SAMOS (etwa 580(560) bis etwa 500(480) v. Chr.).

⁵ Nach PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665).

⁶ Also die Relation, die nie gilt.

2.2 Zweistellige Relationen in einer Menge

So wie unter den Operationen die *zweistelligen* oder *binären*¹ Operationen in einer Menge M (vgl. Kap. 3.4, S. 100ff.) eine besondere Rolle spielen (wie z. B. die Grundrechenarten), so nehmen unter den Relationen die *zweistelligen* oder *binären Relationen* in einer Menge M eine ebensolche besondere Stellung ein. So ergibt sich mit $M := A = B$ in Definition 2.1, S. 54:

Definition 2.2: R ist (2-stellige) Relation in $M : \Leftrightarrow R \subseteq M^2$.

Den Zusatz „2-stellig“ lassen wir künftig fort. Sollte die *Stellenzahl* von Bedeutung sein, werden wir darauf hinweisen.

Eine Relation R in M ist also eine Menge geordneter Paare, deren beide Komponenten aus derselben Menge M sind. Ist $(x, y) \in R$, so schreibt man dafür auch $x R y$ und sagt „ x steht in Relation zu y “²; dabei gehört x zum Definitionsbereich und y zum Wertebereich von R . Die auch vorkommende Schreibweise $R(x, y)$ schlägt eine Brücke zum Funktionsbegriff, der seinerseits auf den Begriff der *Zuordnung* zurückgeht. Danach ist eine Relation R in einer Menge M dasselbe wie eine *Zuordnung aus M in M* (s. Kap. 3.2, S. 96).

Eine spezielle Relation in M ist die *identische Zuordnung* id_M , die jedes Element x von M auf sich selbst abbildet. In der Sprache der Relationen nennt man id_M die *identische Relation* (*Identitätsrelation* oder *Diagonale* Δ) in M ; sie ist folgendermaßen definiert:

- $id_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$.

Da jede Relation R in einer Menge selbst eine Menge ist, lässt sich ihr Komplement in Bezug auf eine Grundmenge bilden:

Ist R eine Relation in einer Menge M , so heißt das Komplement $\bar{R}$ von R (bezüglich der Menge $M \times M$) die **Komplementärrelation** der Relation R .

Neben der Komplementärbildung spielt eine weitere einstellige Operation eine wichtige Rolle. Das ist die *Inversenbildung*³. Ist R eine Relation in einer Menge M , so heißt die Menge aller geordneten Paare (y, x) , für die $(x, y) \in R$ gilt:

- $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ bzw. $R^{-1} := \{(y, x) \mid x R y\}$,

die zu R **inverse Relation** (oder *Umkehrrelation* von R). Folglich gilt:

- $D(R^{-1}) = W(R)$ und $W(R^{-1}) = D(R)$.

Offensichtlich ist mit R auch R^{-1} eine Teilmenge von M^2 , folglich eine Relation in M :

- $R \subseteq M^2 \Rightarrow R^{-1} \subseteq M^2$.

¹ binarius (lat.) = zwei enthaltend.

² Man geht also von der mengentheoretischen Schreibweise $(x, y) \in R$ (Postfix-Notation) zur prädikativen Schreibweise $x R y$ (Infix-Notation) über; bei höherer Stelligkeit wird im Allgemeinen die Präfix-Notation $R(x, y, \dots)$ bevorzugt.

³ inversus (lat.) = umgekehrt; mitunter *konverse Relation* genannt; conversus (lat.) = umgekehrt, gegenteilig.

Beispiel 2.6: Die Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ ist in $\mathbf{N}$ wie folgt definiert:

$$\bullet \quad \leq := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbf{N}} y = x + n\},$$

d. h., es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn eine natürliche Zahl n mit $y = x + n$ existiert.

Beispiel 2.7: Das multiplikative Analogon zur $\leq$ -Relation in $\mathbf{N}$ ist die Teilbarkeit $\mid$:

$$\bullet \quad \mid := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbf{N}} y = x \cdot n\},$$

d. h., es gilt $x \mid y$ genau dann, wenn eine natürliche Zahl n mit $y = x \cdot n$ existiert.

Beispiel 2.8: Ist M eine zweielementige Menge, so sind 16 Relationen möglich, ist M eine Einermenge $\{a\}$, sind 2 Relationen möglich, die leere Relation und die (All-) Relation $R = M \times M = \{(a, a)\}$.

Übung 2.1: Wie viele Relationen gibt es in einer Menge M mit n Elementen ($n \in \mathbf{N}$)?

Beispiel 2.9: Die Komplementärrelation $\bar{C}R$ zu einer gegebenen Relation R in einer Menge M mit $M \times M$ als Grundmenge hat folgende Gestalt:

$$\bullet \quad \bar{C}R = \bar{C}_{M \times M} R = (M \times M) \setminus R.$$

Übung 2.2: Geben Sie die Komplementärrelation

a) der Teilbarkeitsrelation $\mid$ in $\mathbf{N}$, b) der $<$ -Relation in $\mathbf{R}$ an!

Beispiel 2.10: Die Komplementärrelation $\bar{C}R$ der Teilbarkeit $R := \{(x, y) \mid \bigvee_{z \in M} x \cdot z = y\}$

in $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist $\bar{C}R = \{(x, y) \mid \bigwedge_{z \in M} x \cdot z \neq y\} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4),$

$(0, 5), (0, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5),$

$(4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$.

Beispiel 2.11: Die inverse Relation $\mid^{-1}$ der Teilbarkeitsrelation $\mid$ in $\mathbf{N}$ ist die Relation VF , die vermöge $x VF y : \Leftrightarrow x$ ist Vielfaches von y für alle $x, y \in \mathbf{N}$ definiert ist:

$$\bullet \quad VF := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge \bigvee_{n \in \mathbf{N}} x = y \cdot n\}.$$

Übung 2.3: Geben Sie die inverse Relation

a) der $<$ -Relation in $\mathbf{R}$, b) der Relation R aus Beispiel 2.10 an!

Unmittelbar aus der Definition der inversen Relation folgt, dass die zu R^{-1} inverse Relation mit der ursprünglichen Relation R in einer Menge M zusammenfällt:

$$\bullet \quad (R^{-1})^{-1} = R.$$

Übung 2.4: Beweisen Sie! Sind R^{-1} und $\bar{C}R$ die inverse bzw. die Komplementärrelation einer Relation R in einer Menge M , so gilt:

$$\bullet \quad \bar{C}(R^{-1}) = (\bar{C}R)^{-1}.$$

2.2.1 Verknüpfungen zweistelliger Relationen

Da Relationen Mengen sind, lassen sich mithilfe der ein- und zweistelligen Mengenoperationen weitere Einsichten über Relationen gewinnen. Es ist also sofort klar, wie etwa der Durchschnitt zweier Relationen R und S zu bilden ist: Ein Element x aus einer Menge M steht in der Relation $R \cap S$ zu einem Element y aus M genau dann, wenn $x R y$ und $x S y$ gelten. Neben der Inklusion, der Komplementärbildung, der Inversenbildung und den zweistelligen Verknüpfungen ($\cap$, $\cup$, Δ , $\setminus$, $\times$) lernen wir jetzt mit der *Nacheinanderausführung von Relationen* eine weitere zweistellige Operation kennen.

Es seien R und S Relationen in M . Unter der **Nacheinanderausführung** (oder der *Verkettung*¹) $S \circ R$ (gelesen: S nach R) versteht man die Menge aller geordneten Paare (x, z) mit x und z aus M , für die es ein y (in M) gibt, sodass das Paar (x, y) zur Relation R und das Paar (y, z) zur Relation S gehört:

$$\bullet \quad S \circ R := \{(x, z) \mid \bigvee_y (x R y \wedge y S z)\}^2.$$

Offensichtlich gilt: $S \circ R \subseteq M^2$, d. h., mit S und R ist auch $S \circ R$ eine Relation in M .

Es seien M eine nichtleere Menge, R, S und T (2-stellige) Relationen in M .

Satz 2.1: $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. (Inversionsgesetz)

Beweis: Mit $(x, z) \in (S \circ R)^{-1}$ ist $(z, x) \in S \circ R$ (nach Definition der inversen Relation). Also gibt es ein y mit $(z, y) \in R$ und $(y, x) \in S$. D. h., es ist $(x, y) \in S^{-1}$ und $(y, z) \in R^{-1}$, sodass nach Definition der Nacheinanderausführung $(x, z) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ ist. Folglich ist $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$. Analog zeigt man $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$, sodass wegen der Antisymmetrie der Inklusion die Gleichheit der beiden Mengen gezeigt ist. ■

Satz 2.2:

$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1},$	$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1},$
$(R \Delta S)^{-1} = R^{-1} \Delta S^{-1},$	$(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1},$
$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T,$	
$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T),$	$(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R),$
$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T),$	$(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R),$
$(R \circ S) \setminus (R \circ T) \subseteq R \circ (S \setminus T),$	$(S \circ R) \setminus (T \circ R) \subseteq (S \setminus T) \circ R.$

Beweis: Stellvertretend beweisen wir die Eigenschaft $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$:

Für beliebiges $(x, y) \in M \times M$ ist $(x, y) \in (R \cup S)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R \cup S \Leftrightarrow (y, x) \in R \vee (y, x) \in S \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \vee (x, y) \in S^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$. ■

¹ Auch *Hintereinanderausführung* oder *-schaltung*.

² Vielfach wird in dieser Definition $S \circ R$ durch $R \circ S$ ersetzt. Mit Blick auf die Funktionen (s. Kap. 3, S. 92ff.) sollte man dann aber anstelle von $f(x)$ besser x^f schreiben, also anstatt der Präfix-Notation die Postfix-Notation verwenden. Sind f und g Funktionen, ist deren Nacheinanderausführung durch $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ definiert. Im Falle der umgekehrten Reihenfolge ergäbe sich dann $(f \circ g)(x) := g(f(x))$, sodass anstelle von $(f \circ g)(x)$ besser $x^{f \circ g} = (x^f)^g$ geschrieben werden sollte.

Übung 2.5: Beweisen Sie die restlichen Eigenschaften aus Satz 2.2!

Beispiel 2.12: Für eine Relation R in einer Menge M muss $R \circ R^{-1}$ (bzw. $R^{-1} \circ R$) nicht notwendig mit der identischen Relation id_M zusammenfallen:

In $M = \{1, 2, 3\}$ sei $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$. Mit $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ ist

$R \circ R^{-1} = \{(2, 2), (3, 3)\} \neq id_M$ und $R^{-1} \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\} \neq id_M$.

Beispiel 2.13: In $M = \{3, 7, 9\}$ sind zwei Relationen $R := \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge x < y\}$ und $S := \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge x \mid y\}$ gegeben, d. h., es ist $R = \{(3, 7), (3, 9), (7, 9)\}$ einerseits und $S = \{(3, 3), (3, 9), (7, 7), (9, 9)\}$ andererseits. Wir bilden die folgenden Relationen:
 $M \times M, id_M, R^{-1}, S^{-1}, \bar{C}R, \bar{C}S, R \cap S, (R \cap S)^{-1}, R \cup S, (R \cup S)^{-1}, R \Delta S, (R \Delta S)^{-1},$
 $R \setminus S, (R \setminus S)^{-1}, S \setminus R, (S \setminus R)^{-1}, S \circ R, (S \circ R)^{-1}, R \circ S, (R \circ S)^{-1}, R^{-1} \circ S^{-1}, S^{-1} \circ R^{-1},$
 $R^{-1} \circ R, R \circ R^{-1}, S^{-1} \circ S, S \circ S^{-1}, (\bar{C}R)^{-1}, \bar{C}(R^{-1}), (\bar{C}S)^{-1}, \bar{C}(S^{-1}).$

$M \times M = \{(3, 3), (3, 7), (3, 9), (7, 3), (7, 7), (7, 9), (9, 3), (9, 7), (9, 9)\},$

$id_M = \{(3, 3), (7, 7), (9, 9)\},$

$R^{-1} = \{(7, 3), (9, 3), (9, 7)\}, \quad S^{-1} = \{(3, 3), (7, 7), (9, 3), (9, 9)\},$

$\bar{C}R = \{(3, 3), (7, 3), (7, 7), (9, 3), (9, 7), (9, 9)\}, \quad \bar{C}S = \{(3, 7), (7, 3), (7, 9), (9, 3), (9, 7)\},$

$R \cap S = S \cap R = \{(3, 9)\}, \quad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} = \{(9, 3)\},$

$R \cup S = S \cup R = \{(3, 3), (3, 7), (3, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\},$

$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} = \{(3, 3), (7, 3), (7, 7), (9, 3), (9, 7), (9, 9)\},$

$R \Delta S = S \Delta R = \{(3, 3), (3, 7), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\},$

$(R \Delta S)^{-1} = R^{-1} \Delta S^{-1} = \{(3, 3), (7, 3), (7, 7), (9, 7), (9, 9)\},$

$R \setminus S = \{(3, 7), (7, 9)\}, \quad (R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1} = \{(7, 3), (9, 7)\},$

$S \setminus R = (S \setminus R)^{-1} = S^{-1} \setminus R^{-1} = \{(3, 3), (7, 7), (9, 9)\},$

$S \circ R = R \circ S = \{(3, 7), (3, 9), (7, 9)\},$

$(S \circ R)^{-1} = (R \circ S)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = \{(7, 3), (9, 3), (9, 7)\},$

$R^{-1} \circ R = \{(3, 3), (3, 7), (7, 3), (7, 7)\}, \quad R \circ R^{-1} = \{(7, 7), (7, 9), (9, 7), (9, 9)\},$

$S^{-1} \circ S = S \circ S^{-1} = \{(3, 3), (3, 9), (7, 7), (9, 3), (9, 9)\},$

$(\bar{C}R)^{-1} = \bar{C}(R^{-1}) = \{(3, 3), (3, 7), (3, 9), (7, 7), (7, 9), (9, 9)\},$

$(\bar{C}S)^{-1} = \bar{C}(S^{-1}) = \{(3, 7), (3, 9), (7, 3), (7, 9), (9, 7)\}.$

Übung 2.6: Ermitteln Sie für die Relationen R und S , die in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vermöge $x R y : \Leftrightarrow x \mid y$ und $x S y : \Leftrightarrow y \mid x$ gegeben sind, $R \cap S, R \cup S, S \circ R, R \circ S, R^{-1}, S^{-1}, \bar{C}R, \bar{C}S$!

Bemerkung: Neben den hier vorrangig betrachteten 2-stelligen Relationen in einer Menge M erhalten wir für $n = 1$ die 1-stelligen Relationen (Eigenschaften); das sind dann Teilmengen von M . Als 0-stellige Relationen fassen wir die Elemente von M selbst auf.

Jede 2-stellige Operation $\circ$ in einer Menge M ist dagegen ihrerseits eine 3-stellige Relation in M :

- $\circ = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in M \text{ und } a \circ b = c\} \subseteq M^3.$

2.2.2 Relationsgraphen und Pfeildiagramme

Ist R eine Relation in einer Teilmenge von $\mathbf{R}$ oder in einer endlichen Menge M , so lässt sich diese Relation in der Weise veranschaulichen, wie wir das schon im Falle kartesischer Produkte kennen gelernt haben (Beispiele 1.43 und 1.44, S. 33). Dazu fassen wir die Komponenten a und b des geordneten Paares (a, b) , das zu R gehört, als x - bzw. y -Koordinate des Punktes $P(a, b)$ im kartesischen Koordinatensystem auf. Im Ergebnis erhalten wir den **Relationsgraphen**¹ (oder den **Graphen**) von R .

Beispiel 2.14: $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $R := \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge x \mid y\}$.

Dieser Relationsgraph (s. Bild 2.1) entspricht im Wesentlichen der Darstellung mithilfe einer **(0,1)-Matrix**². Gehört das Paar (x, y) zu R , wird in das entsprechende *Feld* eine Eins, anderenfalls eine Null gesetzt:

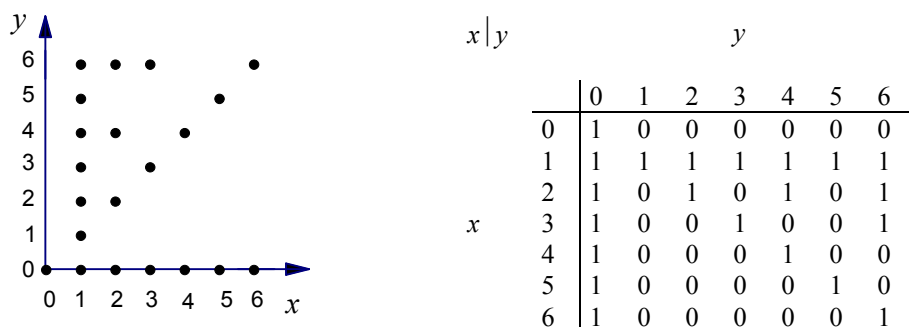


Bild 2.1

Eine weitere Möglichkeit, speziell endliche Relationen auch zwischen verschiedenen Mengen A und B zu veranschaulichen, bieten die **Pfeildiagramme**³:

Die Elemente aus A und B werden als Punkte dargestellt. Steht ein Element x aus A in Relation zu einem Element y aus B , so werden die zugehörigen Punkte X und Y durch einen Pfeil, der von X nach Y zeigt, miteinander verbunden.

Ist $A = B$, so lassen wir im Falle einer *Schleife* (oder eines *Ringpfeils*), das ist ein Pfeil, dessen *Anfangspunkt* mit seinem *Endpunkt* zusammenfällt, die Pfeilspitze weg. Üblicherweise bezeichnet man die Punkte (statt mit $X, Y, \dots$) gleich mit den Elementen $x, y, \dots$ der Mengen A und B selbst.

Die Menge aller Pfeile (samt Punkten) ist das **Pfeildiagramm**, das die Relation R darstellt.

Jedes Pfeildiagramm enthält also genau so viele Pfeile, wie die zugehörige Relation R Elemente besitzt.

¹ gráphein (griech.) = (ein-)ritzen, zeichnen, schreiben.

² matrix (spätlat.) = öffentliches Verzeichnis, Stammmrolle.

³ Die bereits benutzten Hasse-Diagramme sind Pfeildiagramme, in denen man die Pfeilspitzen weglässt. Wegen der Transitivität der Inklusion kann man darüber hinaus eine Reihe von Pfeilen (die so genannten Überbrückungspfeile) einsparen. Des Weiteren verzichtet man auf Schleifen (Pfeile, deren Anfangs- und Endpunkte zusammenfallen), da wegen der Reflexivität der Inklusion jeder Punkt eine Schleife besitzt.

Ist R eine zweistellige Relation zwischen zwei endlichen Mengen

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \text{ und}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} \text{ mit}$$

$$R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_5, b_6)\},$$

$$D(R) = \{a_1, a_2, a_3, a_5\}, W(R) = \{b_1, b_2, b_3, b_6\},$$

so hat das zugehörige Pfeildiagramm nebenstehendes Aussehen (s. Bild 2.2).

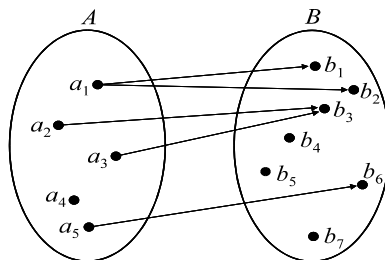


Bild 2.2

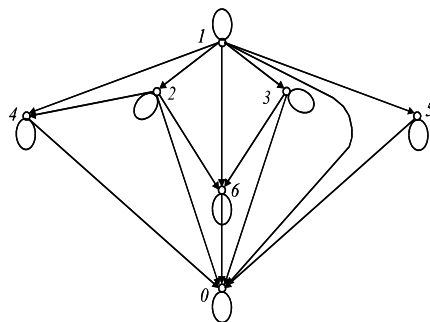


Bild 2.3

Beispiel 2.15: Wir kehren zu zweistelligen Relationen in einer Menge $M (= A = B)$ zurück und geben das Pfeildiagramm der Relation $R := \{(x, y) \mid x, y \in M \wedge x \mid y\}$ in der Menge $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 2.14 an (s. Bild 2.3).

Übung 2.7: Wie gewinnt man das Pfeildiagramm a) der inversen Relation R^{-1} , b) der Komplementärrelation $\bar{C}R$ einer Relation R ? (Vorausgesetzt das Pfeildiagramm von R liege bereits vor.)

Beispiel 2.16: Wir geben neben den Relationsgraphen der Relationen R und S , die in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vermöge $x R y : \Leftrightarrow x \mid y$ und $x S y : \Leftrightarrow y \mid x$ gegeben sind, auch die Relationsgraphen von $R \cap S, R \cup S, S \circ R, R \circ S, R^{-1}, S^{-1}, \bar{C}R$ und $\bar{C}S$ an:

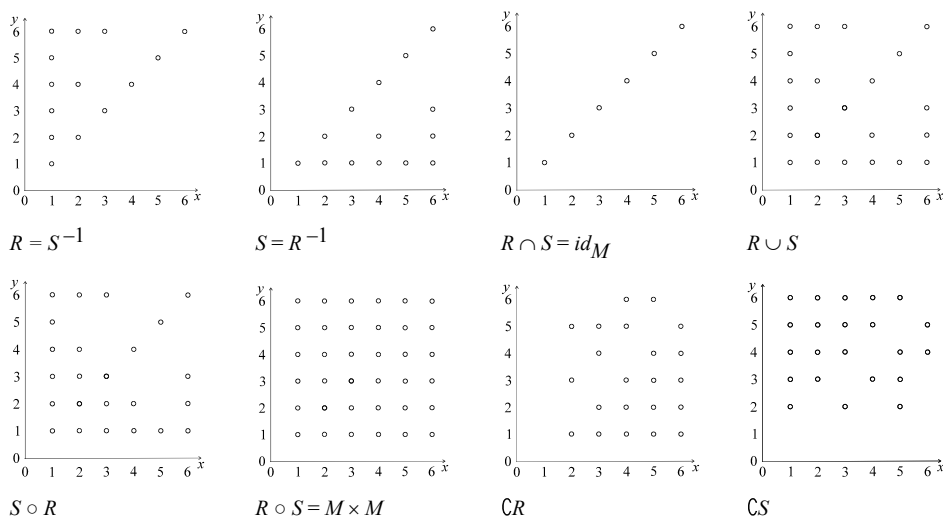


Bild 2.4

2.2.3 Eigenschaften zweistelliger Relationen

Jede Relation hat bestimmte Eigenschaften. So wissen wir bereits, dass die Inklusion reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist (Sätze 1.1 bis 1.3, S. 24). Im Folgenden werden wir uns mit einer Reihe von Eigenschaften zweistelliger Relationen beschäftigen und Zusammenhänge zwischen ihnen aufdecken. Diese Zusammenhänge zwischen Eigenschaften stellen wir abschließend in einem „Abhängigkeits“-Graphen dar. Einige dieser Eigenschaften haben in der Literatur unterschiedliche Namen; und zu allem Überfluss gibt es auch noch wechselseitige Vertauschungen in den Bezeichnungen.

Es seien M eine nichtleere Menge und R eine (2-stellige) Relation in M .

Definition 2.3: R ist **reflexiv** (in M)¹ : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in M} x R x$.

In einer reflexiven Relation R steht also jedes Element $x \in M$ zu sich selbst in der Relation R . Eine Relation R ist demnach *nicht* reflexiv, wenn es wenigstens ein Element $x \in M$ gibt, das *nicht* zu sich selbst in der Relation R steht. Um *irreflexiv*² zu sein, darf kein $x \in M$ zu sich selbst in der Relation R stehen:

Definition 2.4: R ist **irreflexiv** (oder *antireflexiv*) (in M) : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in M} \neg x R x$.

Definition 2.5: R ist **symmetrisch** (in M) : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x, y \in M} (x R y \Rightarrow y R x)$.

R ist *nicht* symmetrisch, wenn wenigstens ein Element $x \in M$ in Relation zu einem Element $y \in M$ steht, dieses y aber seinerseits nicht in Relation zu x steht. Gilt mit $x R y$ aber in keinem Falle $y R x$, so sprechen wir von einer *asymmetrischen*³ Relation:

Definition 2.6: R ist **asymmetrisch** (in M) : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x, y \in M} (x R y \Rightarrow \neg y R x)$.

Es kann also für kein geordnetes Paar $(x, y) \in M^2$ sowohl $x R y$ als auch $y R x$ gelten. Eine mit der Symmetrie verwandte Eigenschaft ist die *Antisymmetrie* (oder *Identitivität*):

Definition 2.7: R ist **antisymmetrisch** (in M) : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x, y \in M} (x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y)$.

Als weitere Eigenschaft der Inklusion haben wir die Transitivität kennen gelernt:

Definition 2.8: R ist **transitiv** (in M) : $\Leftrightarrow \bigwedge_{x, y, z \in M} (x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z)$.

¹ Dieser Zusatz ist notwendig, weil die Eigenschaften einer Relation R nicht allein von der Paarmenge abhängen, sondern auch von der Menge M , in der R definiert ist (vgl. Beispiel 2.18).

² Nicht reflexiv; der Allquantor (Für alle ...) rechtfertigt die Vorsilbe „Ir-“.

³ asýmmetros (griech.) = ohne Ebenmaß.

Beispiel 2.17: Zur Veranschaulichung zweistelliger Relationen haben wir Relationsgraphen und Pfeildiagramme kennen gelernt. Beide Werkzeuge bieten sich natürlich an, will man ausgewählte Eigenschaften dieser Relationen untersuchen. Deshalb gehen wir zunächst der Frage nach, wie sich diese Eigenschaften jeweils widerspiegeln. Dabei werden wir feststellen, dass sich die Vor- und Nachteile der beiden Varianten im Großen und Ganzen ausgleichen.

Eigenschaft von R in M	Relationsgraph	Pfeildiagramm
reflexiv	Die HD ⁴ ist voll besetzt.	Jeder Punkt besitzt eine Schleife.
irreflexiv	Kein Feld der HD ist besetzt.	Kein Punkt besitzt eine Schleife.
symmetrisch	Alle besetzten Felder sind in Bezug auf die HD symmetrisch angeordnet.	Jeder Pfeil besitzt einen „Gegenpfeil“; beide zusammen bilden einen „Doppelpfeil“.
asymmetrisch	Es gibt keine symmetrisch zur HD besetzten Felder.	Zu keinem Pfeil gibt es einen „Gegenpfeil“; es gibt also auch keine Schleife.
antisymmetrisch	Wenn es symmetrisch zur HD liegende Felder gibt, so sind es Felder der HD.	Zu keinem Pfeil zwischen zwei verschiedenen Punkten tritt ein „Gegenpfeil“ auf.
transitiv	<i>Rechteckregel:</i> (s. Bild 2.5) In jedem Rechteck (dessen Seiten parallel zu den Achsen liegen), von dem ein Eckpunkt auf der HD liegt und die dazu benachbarten Eckpunkte zu R gehören, gehört auch der 4. Eckpunkt zu R .	Zu jeder Pfeilkette aus zwei Pfeilen gibt es einen „Überbrückungspfeil“.

Beispiel 2.18: Die Relationen R_1 und R_2 mit

$$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\} \text{ und}$$

$$R_2 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$$

sind als (Paar-)Mengen identisch.

Während in der Menge $M_1 = \{0, 1, 2\}$ die Relation R_1 reflexiv ist, ist die Relation R_2 in der Menge $M_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ nicht reflexiv. Aus diesem Grunde wird eine Relation R in M oft als geordnetes Paar (M, R) angegeben.

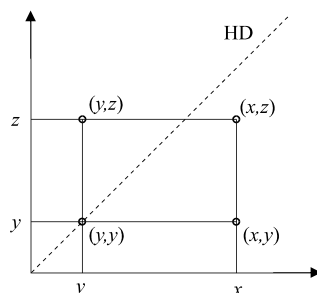


Bild 2.5

⁴ HD = von links unten nach rechts oben verlaufende Hauptdiagonale.

Mengen – Relationen – Funktionen

Eine anschauliche Einführung

Lehmann, I.; Schulz, W.

2016, VIII, 199 S. 105 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-14398-5