

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden strömungsmechanische, experimentelle und numerische Grundlagen vorgestellt. Die strömungsmechanischen Grundlagen werden in Form der vorherrschenden partiellen Differentialgleichungen in Abschnitt 2.1 dargestellt. Daran anschließend werden in Abschnitt 2.2 die experimentellen Grundlagen zur Kavernenuntersuchung wiedergegeben. Die vorherrschenden strömungsmechanischen Gleichungen werden in Abschnitt 2.3 durch die Diskretisierung in ein algebraisches Gleichungssystem überführt, welches numerisch gelöst werden kann. Die in der vorliegenden Arbeit genutzten Methoden und Algorithmen der Simulationen werden an dieser Stelle beschrieben.

### 2.1 Strömungsmechanische Grundlagen

Eine Fluidströmung wird durch die Kontinuitätsgleichung zum Massenerhalt und die Navier-Stokes-Gleichung zum Impulserhalt beschrieben. Die vorherrschenden Gleichungen werden in den Abschnitten 2.1.1-2 dargestellt. Das Fließverhalten von Fluiden kann durch unterschiedliche Modelle beschrieben werden, von denen gängige Vertreter in Abschnitt 2.1.3 aufgeführt werden. Im Anschluss wird in Abschnitt 2.1.4 auf die Modellierung von Turbulenz eingegangen. Die folgenden aufgeführten Gleichungen sind aus [ANSYS 2013a, S. 1 ff.] entnommen.

#### 2.1.1 Kontinuitätsgleichung

Die vorherrschende Gleichung zum Massenerhalt in einem stationären Bezugssystem kann durch Bilanzierung der Massenströme eines differenziellen Volumenelements erhalten werden. Diese allgemeine Kontinuitätsgleichung zum Massenerhalt ist gegeben durch:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = S_m \quad (2.1)$$

In Gleichung (2.1) bezeichnet  $\rho$  die Fluidichte,  $\vec{v}$  die lokale Strömungsgeschwindigkeit und  $S_m$  einen Term für Quellen und Senken. Für ein inkompressibles Fluid einer quellenfreien Strömung reduziert sich Gleichung (2.1) auf:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Impulserhaltung

In einem stationären Bezugssystem ist der Impulserhalt gegeben durch:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}}) + \rho \vec{g} + \vec{F} \quad (2.3)$$

$\vec{g}$  beschreibt die Gravitationsbeschleunigung und  $\vec{F}$  steht für die Summe aller zusätzlich wirkenden Körperkräfte. Der Spannungstensor  $\underline{\underline{\tau}}$  wird berechnet durch:

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta \left[ (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{v} \underline{\underline{I}} \right] \quad (2.4)$$

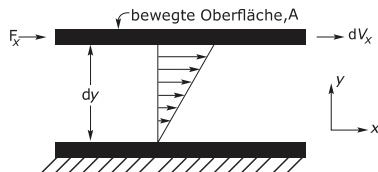
In Gleichung (2.4) steht  $\eta$  für die dynamische Viskosität und  $\underline{\underline{I}}$  für den Einheits-tensor. Der Term  $(\nabla \vec{v})^T$  steht für den transponierten Gradienten des Geschwindigkeitsvektors.

### 2.1.3 Rheologie

Die Charakterisierung der rheologischen Fluideigenschaften ist essentiell für die Beschreibung von Strömungen, insbesondere bei der Untersuchung von nicht-Newton'schen Fluiden. Dieser Abschnitt stellt verschiedene Modelle zur Beschreibung der Viskosität dar.

#### 2.1.3.1 Newton'sches Fließverhalten

Das Newton'sche Viskositätsmodell geht von einer dünnen Fluidschicht zwischen zwei parallelen Platten aus (s. Abbildung 2.1). Ein Scherfeld wird im Fluid zwischen den beiden Platten durch Translation der oberen Platte relativ zur unteren, stationären Platte erzeugt. Das Fluid wird mit einer Kraft  $F_x$  beansprucht. Nach dem dritten Newton'schen Axiom ruft diese Kraft



**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung einer eindimensionalen Scherströmung (nach [Chhabra 2011, S. 1])

eine betragsmäßig gleich große, aber entgegengerichtete Kraft in Form der inneren Fluidreibung hervor. In einer inkompressiblen und laminaren Strömung eines Newton'schen Fluids ist die erzeugte Scherspannung  $\tau_{yx}$  gleich dem Produkt aus Scherrate  $\gamma_{yx}$  und dynamischen Viskosität  $\eta$  des Fluids. Hierbei beschreibt jeweils der erste Index die Richtung normal zur Scherfläche  $A$ , während der zweite Index die Richtung der wirkenden Kraft  $F_x$  wiedergibt:

$$\tau_{yx} = \eta \left( -\frac{dv_x}{dy} \right) = \eta \cdot \gamma_{yx} \quad (2.5)$$

In diesem eindimensionalen Fall ist es möglich, die Scherrate als Geschwindigkeitsgradienten normal zur wirkenden Scherkraft zu beschreiben. Für Newton'sche Fluide besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Scherspannung  $\tau_{yx}$  und der Scherrate  $\dot{\gamma}_{yx}$ . [Chhabra 2011, S. 1 f.]

In diesem Abschnitt werden die Indizierungen der jeweiligen Koordinatenachsen verwendet, um die jeweiligen Richtungen der vorherrschenden Geschwindigkeit, wirkenden Kraft und Spannung einer einfachen Scherströmung darzustellen. Im Folgenden wird auf die Indizierung der jeweiligen Koordinatenachsen der Scherspannung  $\tau$  und Scherrate  $\dot{\gamma}$  aufgrund der Übersichtlichkeit verzichtet.

### 2.1.3.2 Nicht-Newton'sches Fließverhalten

Für nicht-Newton'sche Fluide besteht der lineare Zusammenhang zwischen Scherspannung und Scherrate nicht. Neben dem nicht linearen Verlauf der Fließkurve kann diese zusätzlich eine Fließgrenzspannung aufweisen, welche überwunden werden muss, bevor das Fluid zu fließen beginnt. Fließen bedeutet, dass das Fluid eine bleibende Verformung zeigt, während es unterhalb der Fließgrenzspannung ein elastisches Verhalten aufweist. Des Weiteren kann es zeitabhängige Effekte der Viskosität wie z. B. Thixotropie und Rheopexie geben. Auch viskoelastische Effekte sind möglich [Chhabra 1999, S. 15]. Diese werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht untersucht.

Für eine Vielzahl an Fluiden in industriellen Anwendungen wie z. B. für synthetische oder biologische Polymere liegt ein pseudoplastisches oder schererdünnendes nicht-Newton'sches Fließverhalten vor. Oftmals wird zur Beschreibung der Viskosität in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen das Potenzgesetz nach Ostwald-de-Waele angewendet [Chhabra 1999, S. 9 f.]:

$$\tau = k \cdot (\dot{\gamma})^n \quad (2.6)$$

In einer doppeltlogarithmischen Darstellung der Scherspannung in Abhängigkeit von der Scherrate bildet dieses Modell eine linear fallende Gerade. Die scheinbare Viskosität eines solchen nicht-Newton'schen Fluids ist gegeben durch:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = k \cdot (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (2.7)$$

Die Modellparameter  $k$  und  $n$  sind empirischer Natur und können durch Regression von experimentellen Daten erhalten werden.  $k$  wird auch als Konsistenzfaktor und  $n$  als Fließindex bezeichnet. Je nach Wahl des Fließexponenten zeigt das Modell unterschiedliche Fließigenschaften:

für	$n < 1$	pseudoplastisches, scherverdünnendes Verhalten
	$n = 1$	Newton'sches Fließverhalten
	$n > 1$	dilatantes, scherverdickendes Verhalten

Je niedriger der Wert für  $n$  ist, desto stärker scherverdünnend ist das Fließverhalten des Fluids. Die Modellierung der Viskosität nach dem Potenzgesetz ist ein einfacher Ansatz und nur für einen bestimmten Scherratenbereich gültig. Das Modell deckt beispielsweise nicht die Viskosität bei sehr geringen oder sehr hohen Scherraten ab. Hier kann jeweils eine konstante Viskosität bei einigen pseudoplastischen Fluiden beobachtet werden, welche auch als Newton'sche Plateaus bezeichnet werden (s. Abbildung Anhang A.1). Ein solches Fließverhalten kann durch Modelle wie z. B. von Carreau oder Ellis beschrieben werden, wobei das Ellis'sche Modell nur eine konstante Viskosität bei geringen Scherraten mit einbezieht. [Chhabra 1999, S. 9 ff.]

Neben dem pseudoplastischen Fließverhalten können Fluide auch viskoplastische Eigenschaften besitzen. Dieser Typ von Fluiden wird charakterisiert durch eine Fließgrenzspannung  $\tau_0$ , welche überschritten werden muss, bevor das Fließen des Fluids einsetzt. Typische Beispiele sind Zahnpasta oder Blut [Chhabra 2011, S. 12]. Dementsprechend verhält sich das Fluid bei Scherspannungen kleiner der Fließgrenzspannung wie ein Festkörper und wird durch Scherung rein elastisch deformiert. Bei Spannungen größer der Fließgrenzspannung kann der Verlauf der Fließkurve sowohl linear als auch nicht linear sein. Ein linearer Verlauf charakterisiert ein Bingham-Fluid mit konstanter Viskosität.

Das Modell nach Herschel-Bulkley beschreibt das Fließverhalten viskoplastischer Fluide. Es gleicht dem einfachen Potenzgesetz, erweitert es allerdings um den Term der Fließgrenzspannung  $\tau_0$  [Chhabra 1999, S. 13]:

$$\tau = \tau_0 + k \cdot (\dot{\gamma})^n \quad (2.8)$$

Die scheinbare Viskosität berechnet sich aus dieser Scherspannung entsprechend zu:

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \cdot (\dot{\gamma})^{n-1} \quad (2.9)$$

Innerhalb des Modells nach Herschel-Bulkley können durch Wahl der Modellparameter unterschiedliche Fließigenschaften beschrieben werden. In Tabelle 2.1 ist eine Auflistung hierzu dargestellt. Die verschiedenen Fließkurven des Herschel-Bulkley-Modells sind in Abbildung 2.2 schematisch wiedergegeben. Die scheinbare Viskosität pseudoplastischer Fluide nach dem Herschel-Bulkley-Modell ist für sehr geringe Scherraten unbegrenzt und verläuft im Grenzwert

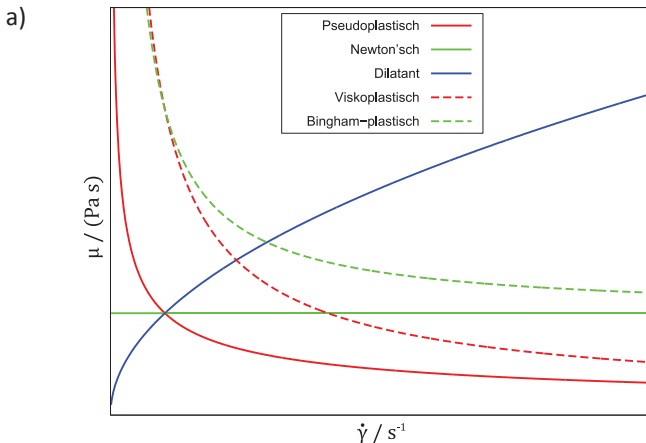
für Scherraten gegen null ins Unendliche. Hierdurch würde es bei der Verwendung dieser Modelle in der CFD zu numerischen Problemen kommen. Sie müssen zur Gewährleistung der numerischen Stabilität durch numerische Modelle ersetzt werden (s. Abschnitt 3.1).

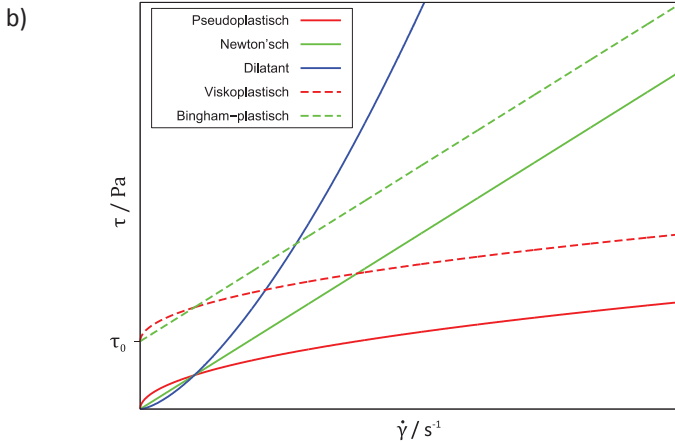
Das Niveau der Fließgrenzspannung ist abhängig vom gewählten Scherratenbereich der Messung. So zeigen Barnes und Walters

[Barnes 1985], dass bei sehr geringen Scherraten von  $\dot{\gamma} = 10^{-5} \dots 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  die Fließgrenzspannung einer eigentlich viskoplastischen Carbopol®-Polymerlösung nicht mehr bestimmbar ist, während jedoch im Scherratenbereich von  $\dot{\gamma} = 10 \dots 150 \text{ s}^{-1}$  eine Fließgrenzspannung von  $\tau_0 = 9,5 \text{ Pa}$  ermittelt wird. In Bereichen hoher Scherraten wird in der Praxis oftmals auf eine Fließgrenzspannung extrapoliert. Es ist allerdings schwierig zu sagen, ob ein reales Fluid eine *wahre* Fließgrenzspannung aufweist. Das Konzept der Fließgrenzspannung hat sich jedoch in der industriellen Praxis als hilfreich erwiesen. Dies ist darin begründet, dass Prozesse in industriellen Anwendungen wie z. B. Mischen und Rühren typischerweise in erhöhten Scherratenbereichen verlaufen [Chhabra 2011, S. 12]. Beim Rühren sind die typischen Scherraten mit  $\dot{\gamma} = 10^1 \dots 10^3 \text{ s}^{-1}$  erheblich größer als die von Barnes und Walters untersuchten. Die Fließgrenzspannung ist eine empirische und ingenieurwissenschaftliche Realität [Schurz 1990; Elson 1990].

**Tabelle 2.1:** Fließklassen innerhalb des Herschel-Bulkley-Modells.

		$\tau_0$ [Pa]	$n$
1	Pseudoplastisch	= 0	< 1
2	Newton'sch	= 0	= 1
3	Dilatant	= 0	> 1
4	Viskoplastisch	> 0	< 1
5	Bingham-plastisch	> 0	= 1





**Abbildung 2.2:** (a) Fließkurven- und (b) Viskositätsverläufe der Fließklassen innerhalb des Herschel-Bulkley-Modells entsprechend Tabelle 2.1 in linearer Darstellung

#### 2.1.4 Turbulenzmodellierung

Bei der Simulation von turbulenten Strömungen ist die Turbulenzmodellierung ein essentieller Bestandteil, um gültige Ergebnisse zu erhalten. Da bei turbulenten Strömungen Schwankungen in den Transportgrößen auftreten, ist ein statistischer Ansatz zur Modellierung von turbulenten Strömungen möglich. Reynolds führte 1895 [Wilcox 1994, S. 5 ff.] die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) ein. Hierbei werden die Transportgrößen als zeitlich gemittelte und fluktuierende Größen behandelt und auf die Kontinuitäts- und Navier-Stokes-Gleichung zum Massen- und Impulserhalt angewendet. Durch die Einführung der gemittelten Größen entstehen in der gesamten Strömung zusätzliche Spannungen, welche im Voraus unbekannt sind. Diese werden beschrieben durch den symmetrischen Reynolds'schen Spannungstensor mit sechs unbekanntem, unabhängigen Komponenten. Für diese zusätzlichen Spannungen werden Gleichungen benötigt, welche bestimmten Annahmen unterliegen. Werden alle sechs Komponenten des Reynolds'schen Spannungstensors unabhängig gelöst, so wird die anisotrope Natur der Turbulenz modelliert. Durch die Nutzung dieser Reynolds Spannungsmo-delle (RSM) ist es möglich, eine detaillierte Auflösung von Wirbelstrukturen zu erreichen. Oftmals sind jedoch solche detailgetreuen Informationen der Wirbelstrukturen in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen nicht von Nöten. Hier setzen vereinfachte Ansätze an, welche eine isotrope Turbulenz annehmen. Die isotrope Turbulenz geht für jede der drei Raumrichtungen von gleichen mittleren Quadraten der turbulenten Geschwindigkeitsschwankung aus. Es stehen unterschiedliche Mo-

delle verschiedener Komplexität für die Turbulenzmodellierung zur Verfügung. Häufig werden Zweigleichungsmodelle wie z. B. das  $k$ - $\epsilon$ -Modell für die Approximation des Reynolds'schen Spannungstensors eingesetzt. [Wilcox 1994]

Die Auswahl eines Turbulenzmodells muss spezifisch für einen bestimmten Anwendungsfall erfolgen. Sie beeinflusst darüber hinaus die Rechenzeit einer numerischen Simulation. Für die Lösung einer RSM-Simulation werden mehr zu lösende Gleichungen benötigt als beispielsweise bei einem Zweigleichungsmodell oder laminaren Strömungsmodell. [Wilcox 1994]

In den nachfolgenden Simulationen der vorliegenden Arbeit sind ausschließlich laminare Strömungen und Strömungen im unteren Übergangsbereich von Interesse. In diesem Strömungsregime ist die Nutzung eines laminaren Simulationsmodells zulässig, sodass auf die Verwendung von Turbulenzmodellen verzichtet werden kann. Die Validität von laminaren Strömungssimulationen in diesem Strömungsregime wird in der Literatur mehrfach bestätigt [Letellier 2002; Kelly 2003; Arratia 2006; Pakzad 2008a; Liu 2013].

## 2.2 Experimentelle Grundlagen

In Abschnitt 2.2.1 wird zunächst die Berechnung der Leistungsaufnahme eines Rührers beim Rühren nicht-Newton'scher Fluide dargestellt. Rührer lassen sich, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, durch die Förderleistung charakterisieren. Daran anschließend werden in Abschnitt 2.2.3 Messsysteme zur Visualisierung der Kavernen vorgestellt und in Abschnitt 2.2.4 verschiedene Modelle zum Kavernendurchmesser beschrieben.

Aus dem pseudoplastischen Fließverhalten von Fluiden mit Fließgrenzspannung resultiert in Bereichen hoher Scherung die Ausbildung von Kavernen. Diese Bereiche bilden eine gut durchmischte Zone, während außerhalb eine Stagnationszone auftritt. Eine Kavernenbildung wird auch für pseudoplastische Fluide ohne Fließgrenzspannung oder gar hochviskose Newton'sche Fluide beobachtet. In Bereichen hoher Scherungen treten hier Pseudokavernen auf, außerhalb derer nur geringe Geschwindigkeiten herrschen [Adams 2007].

### 2.2.1 Leistungsaufnahme beim Rühren

Üblicherweise wird die Leistungscharakteristik eines Rührers in Form der Newton-Zahl  $Ne$  in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl  $Re$  aufgetragen [Kraume 2003, S. 32 ff.].

Das Strömungsregime einer Fluidströmung wird allgemein durch die dimensionslose Reynolds-Zahl charakterisiert. Sie beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften. Im laminaren Strömungsregime bei geringen Reynolds-Zahlen herrschen überwiegend Zähigkeitskräfte. Ab einer kritischen Reynolds-Zahl wird die Strömung durch den Übergangsbereich charakterisiert. Erhöhte Reynolds-Zahlen werden hingegen im turbulenten Regime aufgrund der

dominierenden Trägheitskräfte erhalten [Paul 2004, S. 393 ff.]. Die allgemeine Reynolds-Zahl ist definiert als:

$$Re = \frac{v d \rho}{\mu} \quad (2.10)$$

In Gleichung (2.10) beschreiben  $v$  eine charakteristische Geschwindigkeit,  $d$  eine charakteristische Länge und  $\mu$  die dynamische Viskosität des strömenden Fluids. Im Falle von nicht-Newton'schem Fließverhalten lässt sich eine repräsentative dynamische Viskosität einsetzen.

Der Leistungseintrag eines Rührers wird in der Regel experimentell bestimmt und lässt sich durch die dimensionslose Newton-Zahl charakterisieren. Die in den Rührbehälter eingebrachte Leistung  $P$  bei einer Rührerdrehzahl  $N$  und dem wirkenden Drehmoment  $M$  wird berechnet durch:

$$P = 2\pi NM \quad (2.11)$$

$$Ne = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \quad (2.12)$$

In Gleichung (2.12) beschreibt  $D$  den Rührerdurchmesser und  $\rho$  die Fluidichte. Die Leistungscharakteristik eines Rührers kann nun durch eine in der Regel doppellogarithmische Auftragung der Newton- über der Reynolds-Zahl erhalten werden.

Für pseudoplastische nicht-Newton'sche Fluide ist die Berechnung der Reynolds-Zahl problematisch, da die scheinbare Viskosität von der lokalen Scherrate abhängig ist. Nach dem Ansatz von Metzner und Otto [Metzner 1957] herrscht im laminaren Strömungsregime eine lineare Beziehung zwischen der Rührerdrehzahl und einer gemittelten, effektiven Scherrate in der Nähe des Rührorgans:

$$\dot{\gamma}_{\text{avg}} = k_{\text{MO}} N \quad (2.13)$$

Die lineare Korrelation der Scherrate ist nach Metzner und Otto unabhängig vom eingesetzten Fluid gültig. Sie beinhaltet die Modellkonstante  $k_{\text{MO}}$ , welche vom verwendeten Rührsystem abhängig ist. Die effektive Viskosität für ein Herschel-Bulkley-Fluid ist nach der Metzner-Otto-Methode gegeben durch:

$$\mu_{\text{avg}} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}_{\text{avg}}} = \frac{\tau_0}{k_{\text{MO}} N} + k(k_{\text{MO}} N)^{n-1} \quad (2.14)$$

Analog zur allgemeinen Formulierung der Reynolds-Zahl (s. Gleichung (2.10)) kann eine Rührer-Reynoldszahl definiert werden. Die charakteristische Geschwindigkeit wird definiert als  $ND$ , eine charakteristische Länge ist durch den  $D$  gegeben und die repräsentative Viskosität im Rührsystem wird nach der Metzner-Otto-Methode berechnet. Somit ergibt sich die Rührer-Reynoldszahl  $Re_D$  zu: [Adams 2009, S. 9]

$$Re_D = Re = \frac{k_{MO} N^2 D^2 \rho}{\tau_0 + k(k_{MO} N)^n} \quad (2.15)$$

Die in Gleichung (2.15) angegebene Formulierung der Rührer-Reynoldszahl wird in der vorliegenden Arbeit als Definition der Reynolds-Zahl  $Re$  eingesetzt.

### 2.2.2 Flüssigkeitsförderung von Rührern

Die Förderleistung von Flüssigkeiten durch einen Rührer wird durch den Volumenstrom definiert, welcher durch die vom rotierenden Rührorgan bestrichene Fläche gefördert wird. Bei konstanter Leistungsaufnahme gelingt es Rührern mit großflächigeren Schaufeln, einen höheren Volumenstrom zu fördern als Rührern mit kleineren Schaufeln. Durch höhere Volumenströme werden Vorgänge wie Homogenisierung oder Wärmeübergang beschleunigt. Infolge von geringeren Volumenströmen und damit geringeren Strömungsgeschwindigkeiten werden demgegenüber höhere Scherfelder erzeugt. [Zlokarnik 1999, S. 32]

Die beschriebene Fläche ist für einen radial fördernden Rührer durch  $A = \pi D b$  gegeben, wobei  $D$  der Rührerdurchmesser und  $b$  die Schaufelhöhe ist. Der Flüssigkeitsstrom wird berechnet als Integralwert der vorliegenden Geschwindigkeitsverteilung: [Zlokarnik 1999, S. 32]

$$Q_P = \pi D \int_{\text{Schaufel}} v_r dz \quad (2.16)$$

Die Förderkapazität lässt sich dimensionslos durch die Förderkennzahl  $N_Q$  beschreiben:

$$N_Q = \frac{Q_P}{ND^3} \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Experimentelle Messsysteme

Die beim Rühren erzeugten Kavernen viskoplastischer Fluide können experimentell durch unterschiedliche Messsysteme visualisiert und analysiert werden. Ihnen ist gemein, dass zur Visualisierung der Kaverne ein Tracer innerhalb der Kaverne appliziert werden muss. Alle vorgestellten Systeme sind nichtinva-

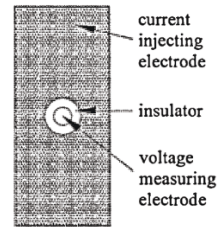
siv. Sie unterscheiden sich allerdings in ihren Anforderungen an das zu untersuchende Fluid.

Der große Vorteil von *Electrical Resistance Tomography*-Systemen (ERT) ist, dass diese zur Kavernenuntersuchung sowohl in transparenten als auch in opaken Fluiden eingesetzt werden können. Weitere Messsysteme wie z. B. *planar laser-induced fluorescence* (PLIF) oder Ultraviolett-Fluoreszenz (UV) können nur in transparenten Fluiden eingesetzt werden.

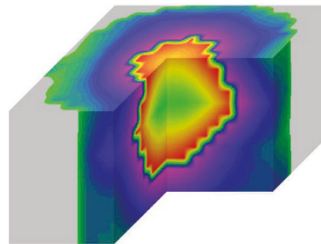
### 2.2.3.1 Electrical Resistance Tomography

Durch die ERT-Messsysteme ist es möglich, tomographische Abbilder eines Prozesses zu erstellen. Das Ziel der ERT-Messtechnik ist es, die elektrische Widerstandsverteilung in Schnittebenen zu rekonstruieren. Das Messprinzip wird aufgrund dieses Vorteils gegenüber anderen Verfahren in der Verfahrenstechnik in unterschiedlichen Apparaten wie z. B. Rohrleitungen, Behältern, Rührbehältern oder verschiedenen Reaktoren eingesetzt [Young 2013].

Bei der Anwendung von ERT in einem Rührbehälter werden mehrere Elektroden in äquidistanten Abständen schichtenweise in mehreren Ebenen auf dem Umfang des Rührbehälters angebracht. Die Elektroden müssen hierbei Kontakt zum Fluid im Rührbehälter aufweisen, ohne die Strömung dabei maßgeblich zu beeinflussen. Zwei benachbarte Elektroden leiten paarweise einen elektrischen Strom in das Fluid. Die Spannungsmessung erfolgt jeweils paarweise über verbleibende Elektrodenpaare in der Messebene. Die hierbei auftretende Spannungsdifferenz stellt nur eine integrale Information zur Verteilung der Leitfähigkeit dar. Aus diesem Grund wird die Messung für alle verbleibenden stromspeisenden Elektroden wiederholt. Die stromgespeisten Elektroden weisen im Vergleich zu den Elektroden zur Spannungsmessung eine große Oberfläche auf, um sicherzustellen, dass genügend elektrischer Strom in das Fluid gelangen kann. Die Elektroden zur Spannungsmessung müssen hingegen für eine hohe Messgenauigkeit eine möglichst kleine Oberfläche aufweisen (s. Abbildung 2.3).



**Abbildung 2.3:** Struktur der in [Pakzad 2007, S. 53] eingesetzten Verbundelektroden



**Abbildung 2.4:** 3D-Kavernendarstellung durch ERT, rekonstruiert aus tomographischen 2D-Schnitten, Xanthan 0,5% [Pakzad 2008b]

Ein typischer experimenteller Aufbau eines ERT-Systems am Rührbehälter ist in Abbildung 2.5 dargestellt.

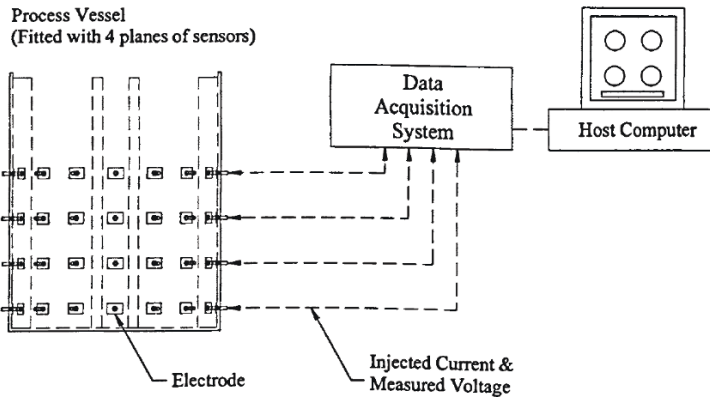


Abbildung 2.5: Experimenteller Aufbau des ERT-Systems am Rührbehälter [Pakzad 2008b]

Durch Methoden der Bildrekonstruktion mit linearisierten Rückprojektionsverfahren können aus den Rohdaten tomographische Schnittbilder erzeugt werden. Das Messverfahren kann eine Aufnahmefrequenz von bis zu 20 Bildern pro Sekunde erreichen. [Pakzad 2007, S. 47 ff.; Zlokarnik 1999, S. 97 f.]

### 2.2.3.2 Ultraviolett-Fluoreszenz

Eine einfache Möglichkeit der Kavernenvisualisierung ist die Nutzung von UV-fluoreszierenden Farbstoffen wie z. B. Fluorescein oder Rhodamin B als Tracer im Rührbehälter. Nach der Anregung mit UV-Strahlung emittiert Fluorescein im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums bei 530 nm (grün). Eine UV-Belichtung des gesamten Rührbehälters ermöglicht es, wertvolle Informationen zur Ausbildung von dreidimensionalen Strömungsstrukturen zu erhalten. [Arratia 2006]

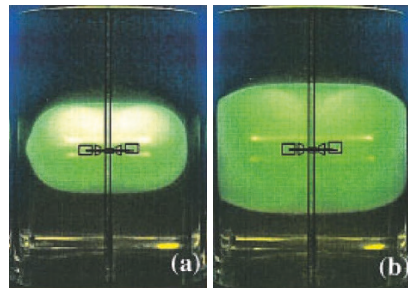
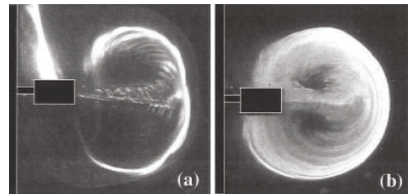


Abbildung 2.6: Tracervisualisierung durch UV-Fluoreszenz  
Carbopol-Lösung im Rührbehälter mit Rushton-Impeller bei (a)  $Re=35,1$  ( $300 \text{ min}^{-1}$ ) und (b)  $Re=90,2$  ( $500 \text{ min}^{-1}$ ) [Arratia 2006]

### 2.2.3.3 Planar laser-induced fluorescence

Ein PLIF-System nutzt einen planaren Laserstrahl, der durch den Rührbehälter mit fluoreszierendem Tracer geleitet wird. Der Laserschnitt ermöglicht die zeitliche Aufnahme von zweidimensionalen Profilen der Tracerverteilung. Gepulste Laser werden als Laserquellen eingesetzt. Eine Einheit zur Synchronisation der Laserpulse wird in Kombination mit einer CCD-Kamera für die Aufnahmen der Laserschnitte verwendet. Die quantitative Auswertung zur Verteilung der Tracerkonzentration wird durch die Analyse der erfassten Lichtintensitäten realisiert. [Arratia 2006; Guida 2010, S. 28 f.]

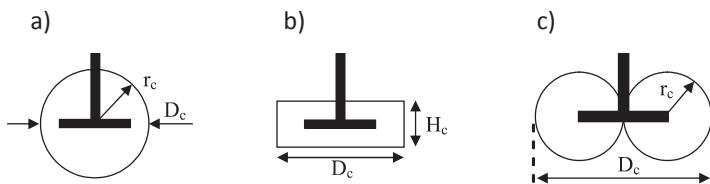


**Abbildung 2.7:** Tracervisualisierung durch PLIF-Fluoreszenz

(a) Einmischen bei  $Re=35,1$  eines Tracers in ein pseudoplastisches Fluid mit Fließgrenze  
(b) Gleiche Anordnung zeigt nach 60 s Rühren ein beständiges Strömungsbild [Arratia 2006]

### 2.2.4 Kavernenmodelle

Zur Beschreibung der Kavernengröße für Fluide mit Fließgrenze werden in der Literatur Korrelationen des Kavernendurchmessers beziehungsweise der Kavernenhöhe mit dem Leistungseintrag verwendet. Die bekannten Modelle gehen für die Modellierung von bestimmten Kavernenformen aus und treffen verschiedene Annahmen zu den wirkenden Kräften, dem vorherrschenden Strömungsregime und dem rheologischen Fluidverhalten [Pakzad 2007].



**Abbildung 2.8:** Kavernenformen der verschiedenen Modelle nach [Adams 2009, S. 74]

(a) sphärische, (b) zylindrische und (c) toroidale Kavernengrenze

#### 2.2.4.1 Sphärisches Kavernenmodell

Ein sphärisches Kavernenmodell wird in [Solomon 1981] entwickelt. Die sphärische Kaverne hat ihren Mittelpunkt im Zentrum des Impellers. Das Modell geht an der Kavernengrenze von einer Scherspannung aus, welche der Fließgrenzspannung des Fluids entspricht. Die Hauptströmung in der Kaverne ist nach Solomon tangential. Durch eine differentielle Kräftebilanz an der Kavernenober-

fläche in einem sphärischen Koordinatensystem wird die folgende Beziehung erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_c}{D}\right)^3 &= \left(\frac{4Ne}{\pi^3}\right) \left(\frac{N^2 D^2 \rho}{\tau_0}\right) \\ &= \frac{4Ne Re_y}{\pi^3} \end{aligned} \quad (2.18)$$

#### 2.2.4.2 Zylindrisches Kavernenmodell

Durch Elson et al. [Elson 1990] wird dieses Modell durch die Annahme einer zylindrischen Kavernenform modifiziert. Zu diesem Modell führten neue Erkenntnisse durch experimentelle Arbeiten zur Kavernenvisualisierung mit einer Röntgentechnik. In einer doppeltlogarithmischen Auftragung von  $D_c/D$  über  $Ne Re_y$  ergibt sich nach dem Modell eine Steigung von  $1/3$ . Der Term  $Re_y$  wird als Reynoldszahl der Fließgrenzspannung bezeichnet.

$$\begin{aligned} \left(\frac{D_c}{D}\right)^3 &= \left(\frac{Ne}{\left(\frac{H_c}{D_c} + \frac{1}{3}\right) \pi^2}\right) \left(\frac{N^2 D^2 \rho}{\tau_0}\right) \\ &= \frac{Ne Re_y}{\left(\frac{H_c}{D_c} + \frac{1}{3}\right) \pi^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sowohl das sphärische als auch das zylindrische Kavernenmodell bilden den Kavernendurchmesser recht gut ab, das zylindrische Modell liefert jedoch eine verbesserte Darstellung der Kavernenform [Amanullah 1998].

#### 2.2.4.3 Toroidales Kavernenmodell

Das toroidale Kavernenmodell für Herschel-Bulkley-Fluide berücksichtigt zusätzlich zu tangential wirkenden Kräften auch axiale Kräfte an der Kavernengrenze [Adams 2009, S. 74 ff.]. Der beschriebene Torus hat einen inneren Radius von null und der dimensionslose Kavernendurchmesser wird beschrieben durch:

$$\left(\frac{D_c}{D}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{N^2 D^2 \rho}{\tau_0}\right) \sqrt{N_f^2 + \left(\frac{4Ne}{3\pi}\right)^2} \quad (2.20)$$

In Gleichung (2.20) wird eine axiale Kraftzahl mit  $N_f = F_{ax}/(\rho N^2 D^4)$  eingeführt, wobei  $F_{ax}$  die axiale wirkende Kraft ist. Das Modell kann mit  $N_f = 0$  auch für radial fördernde Impeller eingesetzt werden. Somit ergibt sich das Modell zu:

$$\left(\frac{D_c}{D}\right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{N^2 D^2 \rho}{\tau_0}\right) \left(\frac{4Ne}{3\pi}\right) \quad (2.21)$$

## 2.3 Numerische Grundlagen

Zur numerischen Berechnung der beschriebenen Gleichungen zum Massen- und Impulserhalt müssen die Gleichungen zeitlich und räumlich diskretisiert werden (s. Abschnitt 2.3.1-2). Hierdurch entsteht ein System aus algebraischen Gleichungen für die Transportgrößen, welche numerisch gelöst werden können. Fluent nutzt hierfür die Finite Volumen Methode (FVM). Die zeitlich diskrete Berechnung wird durch die Lösungen der diskretisierten Gleichungen für einen jeweiligen Zeitschritt realisiert. Eine zeitliche Diskretisierung ist in der vorliegenden Arbeit aufgrund der stationären Simulationen jedoch nicht erforderlich.

Die gewählten Methoden zur Diskretisierung beeinflussen die Genauigkeit der Simulationsergebnisse. Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden sind in Abschnitt 2.3.3 aufgeführt.

### 2.3.1 Räumliche Diskretisierung

Für die räumliche Diskretisierung in der FVM ist die Erstellung eines numerischen Rechengitters notwendig. Die lokalen Werte jeweiliger Transportgrößen  $\phi$  werden in Fluent standardmäßig als Zellwerte für das jeweilige Zentrum einer Zelle gespeichert. Um einen konvektiven Transport der Größen zwischen den einzelnen Zellen (Fluss) zu ermöglichen, ist jedoch die Kenntnis der Größen an den entsprechenden Zellflächen  $\phi_f$  notwendig. Diese können durch verschiedene Interpolationsschemata aus den Zellwerten erhalten werden (s. Abschnitt 2.3.3). [ANSYS 2013a, S. 632 ff.]

### 2.3.2 Zeitliche Diskretisierung

Für transiente Simulationen müssen die vorherrschenden Gleichungen sowohl räumlich als auch zeitlich diskretisiert werden. Die zeitliche Diskretisierung integriert jeden Term der Gleichung über eine Zeitschrittweite  $\Delta t$ . Für die Integration der zeitabhängigen und zeitunabhängigen Terme können verschiedene Algorithmen verwendet werden. [ANSYS 2013a, S. 639 ff.]

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich stationäre Simulationen nach dem *Multiple Reference Frame*-Rotationsmodell durchgeführt (s. Abschnitt 2.3.4.2). Aus diesem Grund entfallen alle zeitabhängigen Terme der auf-

geführten Gleichungen und eine zeitliche Diskretisierung muss nicht durchgeführt werden.

### 2.3.3 Eingesetzte Lösereinstellungen

Alle nachfolgenden Simulationen nutzen zur Lösung der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung den *coupled*-Algorithmus in Fluent. Bei segregierten Algorithmen wie z. B. im SIMPLE-Algorithmus werden die Impulsgleichung und Kontinuitätsgleichung getrennt voneinander berechnet. In einer ersten Iteration werden die Geschwindigkeiten berechnet, woraufhin in einem weiteren Schritt eine Druckkorrektur erfolgt, um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen. Der verwendete gekoppelte Algorithmus löst hingegen die Gleichungen simultan in einem Schritt (s. Abbildung Anhang A.2). Somit steigt die Konvergenzrate im Vergleich zu einem segregierten Algorithmus erheblich an. Allerdings nimmt durch Verwendung dieses Algorithmus der Speicherplatzbedarf um einen Faktor von 1,5 bis 2 zu. [ANSYS 2013a, S. 627, 2013a, S. 651 ff.]

Die numerische Berechnung von Gradienten der Transportgrößen wird durch den *Green-Gauss node-based*-Algorithmus durchgeführt. Dieser Algorithmus nutzt einen arithmetischen Mittelwert der Knotenwerte einer Transportgröße für unstrukturierte Rechengitter. Der knotenbasierte Algorithmus ist dafür bekannt, genauere Ergebnisse zu generieren als der äquivalente zellenbasierte Algorithmus, insbesondere bei unstrukturierten Gitterzellen mit einer hohen Verzerrtheit (s. Abschnitt 4.2). [ANSYS 2013a, S. 642]

Für die Interpolation der Geschwindigkeiten an den Zellflächen wird der Algorithmus *third-order MUSCL* genutzt. Dieser Algorithmus bietet eine Genauigkeit dritter Ordnung und ist verfügbar für alle Gitterzelltopologien in Fluent. [ANSYS 2013a, S. 637]

Zur Interpolation des Drucks auf den Zellflächen wird der *PRESTO!*-Algorithmus verwendet [ANSYS 2013a, S. 646 f.].

In den nachfolgenden Simulationen wird die absolute Geschwindigkeitsformulierung verwendet, da erwartet wird, dass aufgrund der viskoplastischen Fließeigenschaften nur ein geringer Anteil des Fluids mit der Rührerumfangsgeschwindigkeit rotiert [ANSYS 2013b, S. 541 f.]

### 2.3.4 Rotationsmodelle

Zur Modellierung von bewegten oder rotierenden Teilen ist es notwendig, das Rechengebiet in Fluidzonen aufzuteilen. Für diese Zonen können jeweils Translation oder Rotation vorgegeben werden. Somit ist es möglich, für die einzelnen Zonen eine stationäre Lösung im lokalen Bezugssystem zu erhalten. Es entstehen Relativgeschwindigkeiten zwischen den Zonen. Diese müssen in den Gleichungen zur Massen- und Impulserhaltung berücksichtigt werden. Die Translation und Rotation von Fluidzonen kann in Fluent durch unterschiedliche Model-

le simuliert werden. In einem geometrisch einfachen Fall ist die Nutzung des *Single Reference Frame* (SRF)-Modells ausreichend, in dem die strömungsmechanischen Gleichungen in einem stationären Rechengitter im bewegten Bezugssystem gelöst werden. Bei geometrisch komplexeren Fällen muss das Problem in mehrere Zonen aufgeteilt werden und das *Multiple Reference Frame* (MRF)- oder *Sliding Mesh*-Modell (SMM) genutzt werden. Eine weitere Alternative stellt das *Mixing Plane*-Modell (MPM) dar. Um das transiente Strömungsverhalten zwischen den Zonen erfassen zu können, muss das rechenintensive SMM verwendet werden. [ANSYS 2013a, S. 17 ff.]

### 2.3.4.1 Sliding Mesh-Modell

Das *Sliding Mesh*-Modell (SMM) ermöglicht die transiente Simulation rotierender Teile. Hierzu nutzt das Modell ein starres, gleitendes Rechengitter. Ein nichtkonformer Übergang von Gitterzellen bildet die Grenzfläche zwischen zwei benachbarten Zonen. Durch das Gleiten der Zellzonen entstehen Überschneidungen im Rechengitter.

Der Modellierungsgrad vom SMM ist geringer als beispielsweise der des MRF-Modells (vgl. Abschnitt 2.3.4.2). Durch das SMM wird z. B. die Interaktion von Rotor und Stator in einem Rührsystem modelliert. Hierzu ist allerdings eine transiente Simulation erforderlich, die verglichen mit stationären Ansätzen wie z. B. dem MRF-Modell eine erheblich höhere Rechenzeit erfordert. Oftmals liefern Simulationen mit dem SMM eine zeitperiodische Lösung. Die Auswertung der transienten Simulationsergebnisse erfordert im Vergleich zu stationären Simulationen mehr Aufwand. Das SMM ist in Systemen mit starken Interaktionen zwischen Rotor und Stator erforderlich [ANSYS 2013b, S. 545 f.].

### 2.3.4.2 Bewegte Bezugssysteme

Die Beschreibung von bewegten Bezugssystemen stellt die Grundlage für die Simulation von Rotationen nach dem SRF-, MRF- und MPM-Modell dar. Für jedes einzelne Bezugssystem wird ein eigenes Koordinatensystem verwendet. Ein bewegtes Bezugssystem kann relativ zu einem stationären (inertialen) Bezugssystem eine Translationsgeschwindigkeit  $\vec{v}_t$  und eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  aufweisen. Die Rotationsachse  $\vec{\omega}$  des Bezugssystems wird beschrieben durch einen Einheitsvektor  $\vec{a}$  jener Achse und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ :

$$\vec{\omega} = \vec{a}\omega \quad (2.22)$$

Der Ursprung des bewegten Bezugssystems ist durch den Ortsvektor  $\vec{r}_0$  definiert. Ein beliebiger Punkt im bewegten Bezugssystem ist durch  $\vec{r}$  ausgehend vom bewegten Ursprung definiert. In Abbildung 2.9 sind die Koordinatensysteme beider Bezugssysteme dargestellt. Es ist möglich, Geschwindigkeiten zwischen beiden Bezugssystemen durch die folgende Beziehung umzurechnen:

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{u}_r \quad (2.23)$$

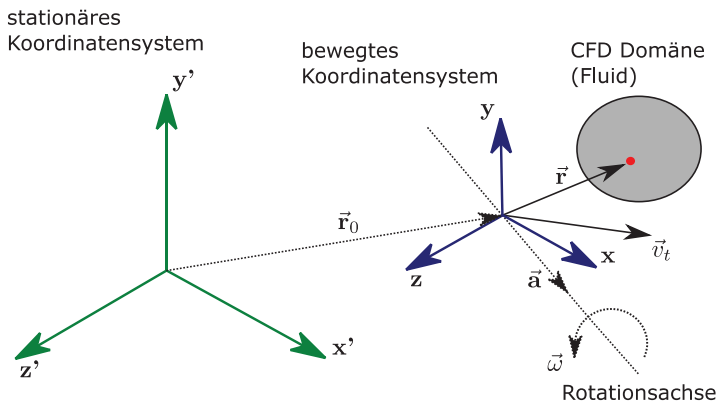
Hierbei ist  $\vec{v}_r$  die Relativgeschwindigkeit des bewegten Bezugssystems und  $\vec{v}$  die absolute Geschwindigkeit, betrachtet vom stationären Bezugssystem. Die Geschwindigkeit des bewegten Bezugssystems  $\vec{u}_r$  ist gegeben durch:

$$\vec{u}_r = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.24)$$

Für ein rotierendes Bezugssystem ohne Translationsgeschwindigkeit reduziert sich der Ausdruck aus Gleichung (2.24) auf:

$$\vec{u}_r = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.25)$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 2.1 im bewegten Bezugssystem ist es möglich, die Geschwindigkeiten unterschiedlich zu formulieren. Als abhängige Variable kann die relative Geschwindigkeit oder die absolute Geschwindigkeit genutzt werden [ANSYS 2013a, S. 19 f.]. Die numerische Diffusion bei der Umrechnung zwischen den beiden Formulierungen der beiden Zonen kann minimiert werden. Die absolute Geschwindigkeitsformulierung wird bevorzugt eingesetzt, wenn der Großteil des Rechengebiets unbewegt ist. Sofern relativ zum Gesamtsystem ein größerer Bereich im Rechengebiet bewegt ist, wird die relative Geschwindigkeitsformulierung empfohlen [ANSYS 2013b, S. 541]. Im bewegten Bezugssystem werden im Vergleich zum stationären Bezugssystem zusätzliche Beschleunigungsterme berücksichtigt.



**Abbildung 2.9:** Koordinatensysteme des stationären und des bewegten Bezugssystems nach [ANSYS 2013a, S. 19]

### **Relative Geschwindigkeitsformulierung**

Durch die Einführung der Relativgeschwindigkeit resultiert die Kontinuitätsgleichung (ohne Quellterme) in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v}_r = 0 \quad (2.26)$$

Die modifizierte Gleichung zum Impulserhalt lautet nach Einführung der Relativgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}_r) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}_r \vec{v}_r) + \rho [2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\beta}] \\ = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau}_r + \vec{F} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{mit } \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \text{ und } \vec{\beta} = \frac{d\vec{v}_t}{dt}$$

Gleichung (2.27) enthält nun vier weitere Beschleunigungsterme. Der erste Term  $2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$  berücksichtigt die Coriolisbeschleunigung. Der Zentripetalbeschleunigung wird durch  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  Rechnung getragen. Eine zeitliche Änderung der Rotations- und Translationsgeschwindigkeit des bewegten Bezugssystems wird durch den dritten und vierten Term  $\vec{\alpha} \times \vec{r}$  und  $\vec{\beta}$  mit einbezogen. Für zeitlich konstante Geschwindigkeiten entfallen die beiden letzten Terme. Der viskose Spannungstensor  $\vec{\tau}_r$  stimmt mit  $\vec{\tau}$  überein, nutzt allerdings den Gradienten bzw. die Divergenz der Relativgeschwindigkeit (vgl. Gleichung (2.4)). [ANSYS 2013a, S. 20]

### **Absolute Geschwindigkeitsformulierung**

In der absoluten Geschwindigkeitsformulierung ist die Kontinuitätsgleichung identisch mit Gleichung (2.26). Die Impulserhaltung wird beschrieben durch:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}_r \vec{v}) + \rho [\vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_t)] = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{F} \quad (2.28)$$

Diese Darstellung des Impulserhalts gestattet es, die Coriolis- und Zentripetalbeschleunigung mit einem Term  $\vec{\omega} \times (\vec{v} - \vec{v}_t)$  zu beschreiben. In der Beschreibung des absoluten Bezugssystems entfallen die Terme  $\vec{\alpha}$  und  $\vec{\beta}$  der relativen Geschwindigkeitsformulierung. [ANSYS 2013a, S. 21]

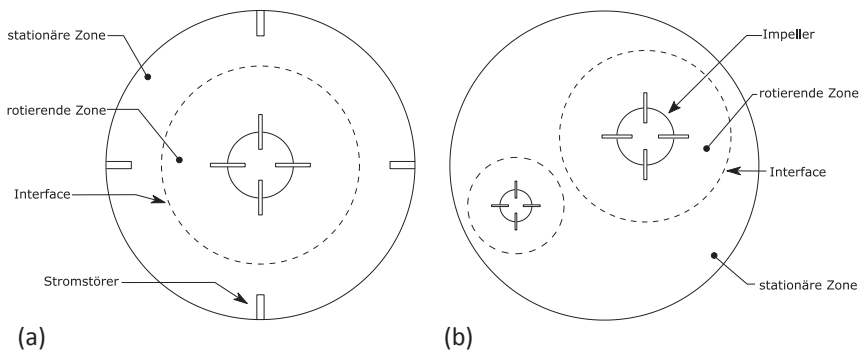
#### **2.3.4.3 Multiple Reference Frame-Modell**

Das *Multiple Reference Frame* (MRF)-Modell kann eine stationäre Lösung für ein Strömungsproblem liefern, in dem mehrere Zonen Rotation oder Translati-

on aufweisen. Der größte Vorteil des MRF-Modells ist die erheblich verkürzte Rechenzeit im Vergleich zu einer SMM-Simulation. Für jede bewegte Zone werden die Gleichungen des bewegten Bezugssystems verwendet. Für unbewegte Bezugssysteme mit  $\vec{v}_t = \vec{0}$  und  $\omega = 0$  reduzieren sich diese auf die stationäre Form.

Das MRF-Modell berücksichtigt keine Interaktion zwischen zwei benachbarten Zonen. Die strömungsmechanischen Gleichungen werden auf einem stationären Rechengitter in einem bewegten Bezugssystem berechnet. Aufgrund des stationären Rechengitters wird durch das Modell lediglich eine Stellung des Rotors simuliert, weshalb der Ansatz manchmal auch *frozen rotor* bezeichnet wird [ANSYS 2013a, S. 22].

Das MRF-Modell wird erforderlich in Fällen, bei denen stationäre Wände wie z. B. Stromstörer keine rotationssymmetrischen Flächen der Drehachse bil-



**Abbildung 2.10:** Modellierung über MRF erforderlich für (a) Rührbehälter mit Stromstörern oder (b) rotierende Zonen mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten nach [ANSYS 2012, S. 10]

den (s. Abbildung 2.10a). Außerdem ist das Modell notwendig für die Simulation von mehreren bewegten Zonen (s. Abbildung 2.10b). Für die jeweiligen Zonen können Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten vorgegeben werden. Zwischen der stationären und der bewegten Zone befindet sich das Interface [ANSYS 2013a, S. 22 f.]. Die verwendeten Randbedingungen an den Wänden der nachfolgenden Simulationen sind in Abschnitt 4.4 aufgeführt.

An dieser Grenzfläche – auch Interface genannt – zweier benachbarter Zellzonen wird eine lokale Umrechnung zwischen den Bezugssystemen durchgeführt, um die Transportgrößen einer Zone für die Berechnung von Flüssen am Rand der benachbarten Zone bereitzustellen. Skalare Größen wie z. B. Druck, Dichte oder Temperatur benötigen keine gesonderte Behandlung am Interface.

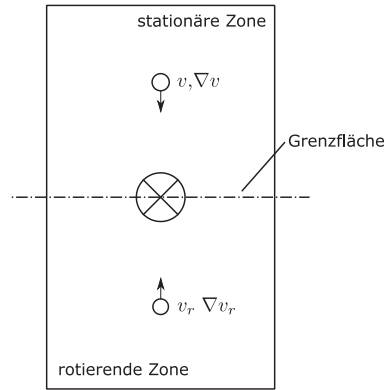
Die jeweilige Größe wird lokal ohne Veränderung an die benachbarte Zone übergeben. Die Behandlung der Geschwindigkeit am Interface hängt allerdings von der genutzten Geschwindigkeitsformulierung ab. In einem stationären Bezugssystem gelten die stationären Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen, während im bewegten Bezugssystem entsprechend die Gleichungen des bewegten Bezugssystems genutzt werden (s. Abschnitt 2.3.4.1). Bei Nutzung der absoluten Geschwindigkeitsformulierung werden die Geschwindigkeiten im absoluten Bezugssystem gespeichert und benötigen keine Umrechnung am Interface. Wird hingegen die relative Geschwindigkeitsformulierung genutzt, müssen die relativen Geschwindigkeiten innerhalb der Zone des bewegten Bezugssystems am Interface in absolute Geschwindigkeiten umgerechnet werden: [ANSYS 2013a, S. 25 f.]

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_r + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_t \\ \nabla \vec{v} &= \nabla \vec{v}_r + \nabla (\vec{\omega} \times \vec{r})\end{aligned}\tag{2.29}$$

Am Interface wird eine uniforme und ausgemittelte Strömung vorausgesetzt [ANSYS 2010, S. 68]. Sollte die Strömung am Interface nicht gleichförmig sein, könnte das Modell zu keiner physikalisch sinnvollen Lösung führen. In solchen Fällen sollte das SMM verwendet werden [ANSYS 2013a, S. 26].

#### 2.3.4.4 Mixing Plane-Modell

Das MPM stellt neben dem MRF-Modell eine weitere Methode für die Simulation von Rotationen durch die Nutzung bewegter Bezugssysteme dar. Im MPM werden die einzelnen Fluidzonen als stationäre Gebiete aufgefasst. Am Interface zwischen zwei benachbarten Zonen werden die Transportgrößen der Zonen räumlich über den Umfang des Interfaces gemittelt. Aus diesem Grund ist das Modell ungeeignet für Rotationssysteme, in denen Rückströmungen über das Interface auftreten, wie es z. B. für die Simulation eines Rührbehälters der Fall ist. Das Modell ist jedoch geeignet für Rotor-Stator-Systeme, wie sie beispielsweise in einer axialen Strömungsmaschine vorkommen (s. Abbildung 2.12). Das MPM stellt in einem solchen System eine deutlich günstigere Alter-



**Abbildung 2.11:** Umrechnung der Relativgeschwindigkeit am MRF-Interface (X) in absolute Geschwindigkeit nach [ANSYS 2013a, S. 25]

native zu einer SMM-Simulation dar, welche sehr hohe Anforderungen an die Rechenleistung stellt. [ANSYS 2013a, S. 26 ff., 2013b, S. 547]

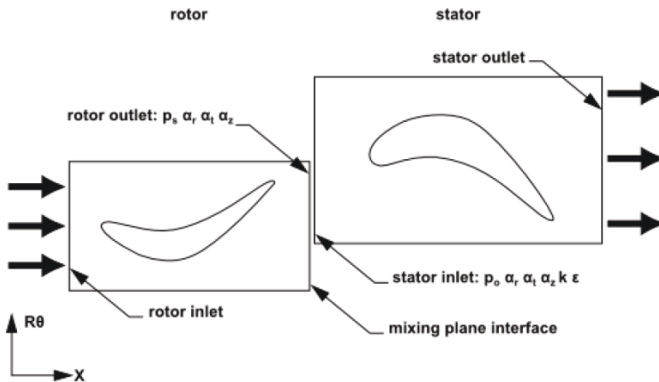


Abbildung 2.12: Axiale Rotor-Stator-Interaktion im Mixing Plane-Modell [ANSYS 2013a, S. 26]

### 2.3.5 Berechnung der Leistungsaufnahme

Neben der experimentellen Bestimmung der Leistungsaufnahme eines Rührers oder der Nutzung von Korrelationsgleichungen bietet CFD eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Leistungsaufnahme eines Rührers. Durch CFD ist es möglich, das wirkende Gesamtdrehmoment  $M$  der rotierenden oder stationären Wände einer Simulation auszuwerten. Dazu werden die an den Wänden wirkenden Drücke und Schubkräfte berücksichtigt. Somit kann die Newton-Zahl zur Erstellung der Leistungscharakteristik gebildet werden.

Prinzipiell ist es auch möglich, den Leistungseintrag durch die Integration der Dissipationsrate im untersuchten Volumen zu ermitteln. Die Voraussetzung hierfür ist allerdings eine Simulation, welche ein Turbulenzmodell mit einem Dissipationsterm nutzt. In der vorliegenden Arbeit wird eine laminare Strömung simuliert. Somit entfällt die Möglichkeit der Integration der lokalen Dissipationsrate. Zudem können die zur Verfügung stehenden Turbulenzmodelle zu signifikanten Unterschieden in der Dissipationsrate einer Strömung führen. Die Berechnung der viskosen Dissipation für eine laminare Strömung durch CFD ist selbst auf einem sehr fein aufgelösten Rechengitter schwierig. Die beste Methode, um die Leistungsaufnahme eines Rührers auszuwerten, ist die Auswertung des wirkenden Drehmoments auf der Oberfläche des Rührorgans. [Bakker 2003, S. 92 f.; Paul 2004, S. 314]

Numerische Untersuchungen zur Mischgüte beim  
Rühren von viskoplastischen Fluiden  
Strömungssimulation für die Analyse von gerührten,  
rheologisch komplexen Fluiden  
Ehrentraut, M.  
2016, XI, 86 S. 44 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-658-14533-0