

2 Einblick in die historische Entwicklung der Auffassungen von Mathematik

In diesem Abschnitt wird die historische Entwicklung der Mathematik skizziert, um aufzuzeigen, dass *die Mathematik*, so wie sie heute an den Universitäten betrieben und gelehrt wird, nicht unverändert seit der Antike existiert und eine schon immer mit denselben Vorgehensweisen betriebene Wissenschaft ist. Vielmehr befindet sich die Mathematik und die Auffassung von Mathematik im Wandel. Für die Skizzierung wird die klassische Disziplin der Mathematik, die Geometrie, genutzt. Die Entwicklung der Mathematik wurde an der Geometrie vollzogen; die heutige Auffassung von Mathematik hat sich hierbei in der Geometrie entwickelt. Daher wird im Folgenden die Entwicklung der Geometrie von ihren Anfängen bei EUKLID bis zur heutigen Auffassung betrachtet.

2.1 Die Elemente Euklids

Die Darstellung der Entwicklung der Mathematik beginnt mit einem der berühmtesten Werke: Den Elementen von EUKLID (1962).¹ In diesem Werk wird erstmalig die Axiomatisierung einer mathematischen Theorie vollzogen. Axiomatisierung ist hierbei die „Darstellung [einer Theorie, SJS] in der Weise, daß gewisse Sätze dieser Theorie, die Axiome, an den Anfang gestellt werden und weitere Sätze durch logische Deduktion aus ihnen abgeleitet werden“ (CARNAP, 1960, S. 172).²

Die Elemente sind in 13 Bücher aufgeteilt, von denen die ersten sechs Bücher Geometrie behandeln. Über Jahrhunderte wurde die Geometrie der Elemente im Mathematikunterricht gelehrt.³ Das erste Buch der Elemente startet mit der Formulierung der Begriffe in Form von Definitionen. Im Anschluss werden Postulate formuliert, denen

¹Hier in der Übersetzung von C. Thaer.

²JONES (1994) stellt heraus, dass es das einzige überlieferte Werk einer axiomatisierten griechischen Mathematik ist (Ebd. S. 47). MERZBACH/BOYER (2011) bezeichnen es als das erfolgreichste Mathematikbuch aller Zeiten (Ebd. S. 90).

³Siehe zum Beispiel das Schulbuch Elemente der Geometrie von VAN SWINDEN (1834). Eine detaillierte Analyse des Schulbuchs findet man in STRUVE (1994).

Axiome folgen. Nach dieser Grundlegung formuliert EUKLID (1962) Propositionen⁴, die er durch Rückführung auf die Postulate mittels der Axiome und Definitionen beweist. Das Ende des ersten Buchs, und somit das Ziel, ist der Beweis vom SATZ DES PYTHAGORAS. Definitionen sind u.a.:

- „1. Ein **Punkt** ist was keine Teile hat,
- 2. Eine **Linie** ist eine breitenlose Länge.
- 3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
- 4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt. [...]
- 8. Ein ebener **Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen. [...]
- 10. Wenn eine gerade Linke, auf einer geraden Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**; und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot auf**) der, auf der sie steht. [...]
- 15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die **Umfang (Bogen)** heißt] [sic, SJS] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] [sic, SJS] laufende Strecken einander gleich sind;
- 16. Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt. [...]
- 20. (24—26) Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichen Seiten“ (Hervorhebungen im Original, EUKLID, 1962, S. 1).

Nach den ersten 23 Definitionen folgen fünf Postulate:

„Gefordert soll sein:

- 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
- 2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
- 3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
- 4. (Ax. 10) Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,
- 5. (Ax. 11) Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen

⁴Welche im heutigen Sprachkontext den mathematischen Sätzen gleich kommen.

kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ (EUKLID, 1962, S. 2f).

Nach den (geometrischen) Postulaten formuliert EUKLID Axiome, welche unbewiesenen Regeln mit größerem Anwendungsbereich gleich kommen. Beispielhaft sei das erste Axiom formuliert:

„1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich“ (EUKLID, 1962, S. 3).

Als charakteristisches Beispiel für die Beweisführung sei §1 besprochen „Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten“ (EUKLID, 1962, S. 3):

„Die gegebene Strecke sei AB . Man soll über der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck errichten. Mit A als Mittelpunkt und AB als Abstand zeichne man den Kreis BCD (Post. 3), ebenso mit B als Mittelpunkt und BA als Abstand den Kreis ACE ; ferner ziehe man vom Punkte C , in dem die Kreise einander schneiden, nach den Punkten A, B die Strecken CA, CB (Post. 1).

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist $AC = AB$ (I, Def. 15); ebenso ist, da Punkt B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, $BC = BA$. Wie oben bewiesen, ist auch $CA = AB$; also sind CA und BC beide $= AB$. Was aber demselben gleich ist, ist auch einander gleich (Ax. 1); also ist auch $CA = CB$; also sind CA, AB, BC alle drei einander gleich.

Also ist das Dreieck ABC gleichseitig (I, Def. 20); und es ist über der gegebenen Strecke AB errichtet – dies hatte man ausführen sollen.“ (EUKLID, 1962, S. 3f).⁵

Analyse Wie man dem skizzierten Vorgehen in den Elementen von EUKLID (1962) entnehmen kann, arbeitet er axiomatisch-deduktiv, er begründet seine Schlüsse mit Hilfe der Postulate und Axiome. Die Architektur des Beweises zum Satz des Pythagoras (Abb. 2.2) veranschaulicht dies ebenfalls, die Endglieder der jeweiligen Pfade sind hierbei direkte Folgerungen aus den Postulaten bzw. schon bekannte Anfänge von Endgliedern.

EUKLIDS Vorgehen lässt sich als Formulierung einer mathematischen Theorie über die Konstruktion von Figuren auf einem Zeichenblatt mit Hilfe von Zirkel und Lineal beschreiben.⁶ Diese Interpretation erklärt, wieso er die, in der Anschauung völlig einleuchtende Existenz der Schnittpunkte der Kreise in §1 voraussetzt. Wieso existiert der

⁵Für die Skizze zum Beweis vgl. Abb. 2.1. Die Skizze ist in ähnlicher Form in EUKLID (1962) angegeben.

⁶JONES (1994) charakterisiert beispielsweise die Postulate Euklids als „compass-and-ruler principles“ (Ebd. S. 48).

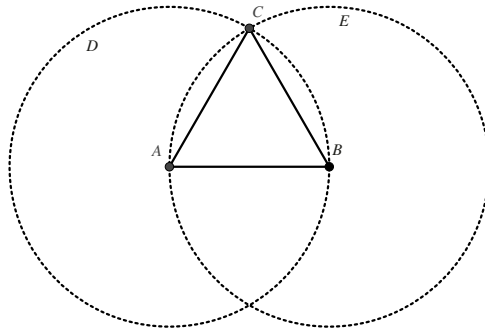


Abbildung 2.1: Errichtung eines gleichseitigen Dreiecks

Schnittpunkt C ? In der Zeichenblattebene (vgl. hierzu auch Abb. 2.1) ist dies anschaulich: Man *sieht*, dass die Kreise sich in zwei Punkten schneiden, einen kann man C nennen. Für einen vollständigen Beweis müsste man diese Existenz auch auf die Axiome zurückführen können.⁷ Ebenso lässt sich mit dieser Sichtweise die Formulierung von Satz 1 erklären: Diese ist stark an der Handlung orientiert. Es geht um eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal.⁸

Das Vorgehen Euklids galt für einen langen Zeitraum als Paradebeispiel für wissenschaftliches Vorgehen. Der Ausspruch „more geometrico“, programmatisch für viele Disziplinen, zeigt nicht zuletzt die Anerkennung dieser Leistung (MITTELSTRASS, 2004, S. 939).

Für Jahrhunderte war die Euklidische Geometrie prägend für die Auffassungen von Mathematik. Es wurde angenommen, dass die Bücher Euklids ewig währende Wahrheiten enthielten. DAVIS/HERSH (1981) charakterisieren diese Auffassung auf treffende Weise mit dem Terminus *Euklidischer Mythos*:

„What ist the Euclid myth? It ist the belief that the books of Euclid contain truths about the universe which are clear and indubitable. Starting from self-evident truths, and proceeding by rigorous proof, Euclid arrives at knowledge which is certain, objective, and eternal. Even now, it seems that most educated people believe in the Euclid myth. Up to the middle or late nineteenth

⁷Erst PASCH (1882) vervollständigte Ende des 19. Jahrhunderts das Axiomensystem Euklids mit Hilfe der Formulierung von Anordnungsaxiomen (BURSCHEID/STRUVE, 2010, S. 13).

⁸Natürlich sind auch andere Sichtweisen auf EUKLID möglich, so kann man ebenso rekonstruieren, dass EUKLID in seinen Werken „wie Platon meinte, den Ideen verwandt[e], in Ewigkeit [...] über die Zeit [erhabene]“ (BECKER, 1965, S. IX) Aussagen beweist. Im Folgenden wird jedoch die o.g. Sichtweise der „Geometrie [...] als Theil der Naturwissenschaft“ (PASCH, 1882, S. 3) eingenommen.

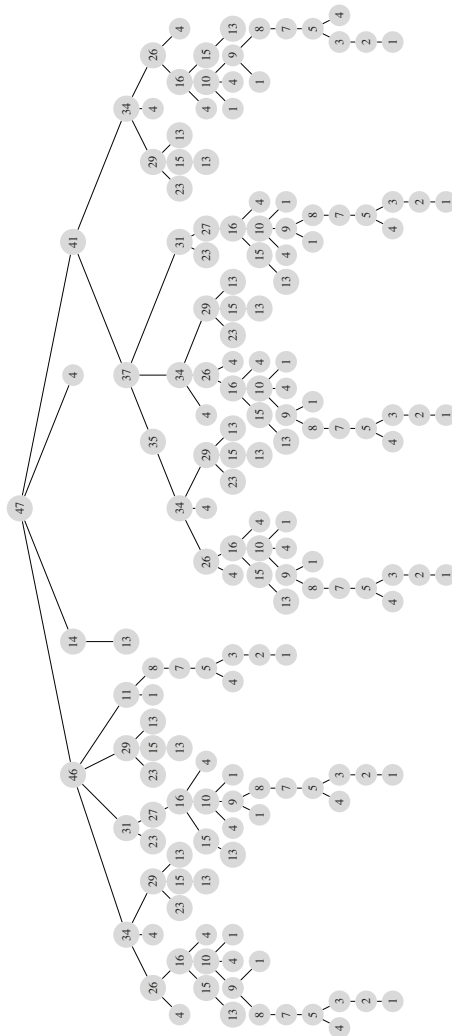


Abbildung 2.2: Architektur des Beweises des Satzes von Pythagoras

century, the myth was unchallenged. Everyone believed it.“ (DAVIS/HERSH, 1981, S. 325).⁹

Die eine Geometrie, welche die Eigenschaften des Raums studiert und welche eben diese Eigenschaften „als erhabenstes Beispiel für Eigenschaften des Universums, die präzise, ewig und für die menschliche Vernunft erkennbar sind“ (DAVIS/HERSH, 1985, S. 347), war die Paradedisziplin für wissenschaftliches Vorgehen, für das Generieren von ewig währendem Wissen. JOAN RICHARDS stellt in DAVIS/HERSH (1988) heraus:

„Die wichtigste Annahme war, alles Wissen bilde eine *Einheit*. Fand man eine Art von Gewißheit in der Geometrie, so durfte man hoffen, die gleiche Art von Gewißheit auch in der Physik, der Biologie, der Ethik oder der Religion zu finden. Dieses gesamte Wissen befand sich auf der gleichen Ebene.“ (DAVIS/HERSH, 1988, S. 272f).

Diese Auffassung von Mathematik währte über Jahrhunderte. Mit der Entdeckung von neuen Gebieten in der Mathematik begann jedoch der Wandel.

2.2 Projektive Geometrie

Die Raumvorstellung der Griechen orientierte sich vorwiegend am Tastsinn, taktile Erfahrungen waren grundlegend für die Wahrnehmung (IVINS JR., 1964, S. 6). Eine Theorie über Perspektive oder gar eine perspektivische Geometrie wurde zu dieser Zeit nicht entwickelt (IVINS JR., 1964, S. 95). Dies geschah erst in der Renaissance (MERZBACH/BOYER, 2011, S. 265).

Die Ursprünge der Projektiven Geometrie liegen in dem Wunsch, dreidimensionale Objekte perspektivisch korrekt in der Zeichenebene darzustellen (MERZBACH/BOYER, 2011, S. 265).¹⁰

Projektive Geometrie kann – ebenso wie die Euklidische – axiomatisch aufgebaut werden.¹¹ Im Folgenden wird ein mögliches Axiomensystem vorgestellt:¹²

⁹Dass dieses Bild von Mathematik auch heute noch gegenwärtig ist, sieht man an Formulierungen wie „Es gibt Wahrheiten, die nicht von Big Data abhängen, mit denen wir aber Big Data beherrschen können: die Gesetze der Mathematik!“ (MAINZER, 2014, S. 22).

¹⁰Vgl. hierzu auch Abb. 2.3: DÜRER stellt in dem Holzschnitt eine Methode dar, wie man eine Laute mit Hilfe eines fest installierten Rahmens und einer Schnur perspektivisch korrekt auf ein Zeichenblatt überträgt. In Abb. 2.4 wird diese Methode geometrisch präzisiert: Die Ebene E wird auf die Bildebene E' abgebildet mithilfe einer Zentralprojektion mit Zentrum Z , hierbei werden Parallelbüschel in Geradenbüschel in einem unendlich fernen Schnittpunkt am Horizont h überführt.

¹¹Vgl. hierzu z.B. BEUTELSPACHER/ROSENBAUM (2004).

¹²Eben dieses Axiomensystem – mit Axiom 3 in eleganterer Form – kann man z.B. in STRUVE (1990) finden (Ebd., S. 155). In unserem Fall ist die zweite Forderung in Axiom 3 nicht zwingend nötig, da man diese auch aus den Axiomen folgern kann, jedoch lässt sich mit dieser Darstellung das Dualitätsprinzip leichter aufzeigen.

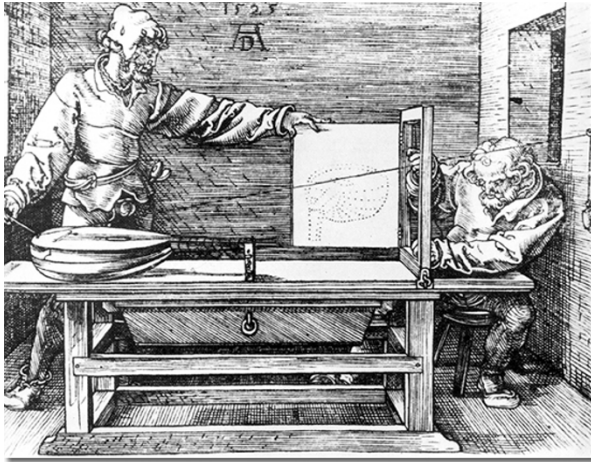


Abbildung 2.3: Ausschnitt aus DÜRERS *Mann beim Zeichnen einer Laute* (1525) (Gemeinfreies Bild hinterlegt auf: WIKIMEDIA COMMONS (2006))

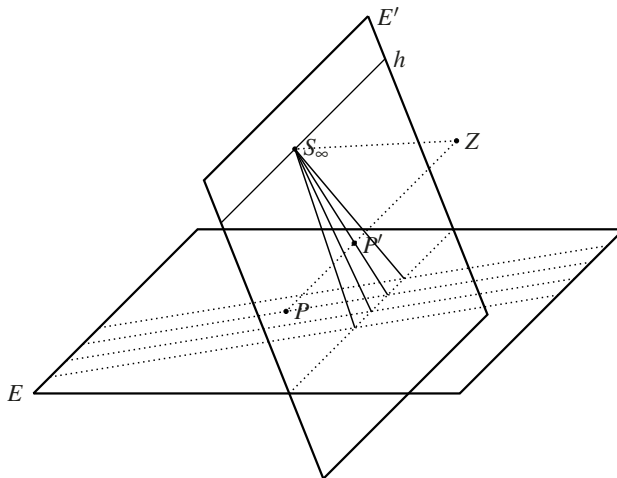


Abbildung 2.4: Beispiel für eine Zentralprojektion

$\mathfrak{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, mit $\mathcal{P}$ Menge (die Elementen nennen wir Punkte), $\mathcal{G}$ Menge (die Elemente nennen wir Geraden) und $\mathcal{I}$ einer Relation auf $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$ (Inzidenz), nennt man **Projektive Ebene**, wenn gilt:

Axiom 1: Sind P und Q zwei verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Gerade g mit der P und Q inzidieren.

Axiom 2: Sind g und h zwei verschiedene Geraden, so gibt es genau einen Punkt P der mit beiden Geraden inzidiert.

Axiom 3: Es gibt mindestens vier Punkte, von denen je drei nicht kollinear sind und es gibt mindestens vier Geraden, von denen je drei nicht kopunktal sind.

Schon unmittelbar nach der Formulierung des Axiomensystems kann man einen wichtigen Satz der Projektiven Geometrie, der auf der Meta-Ebene anzusiedeln ist, beweisen: das Dualitätsprinzip. Es besagt, dass mit jedem gültigen Satz über die Projektive Ebene auch der duale Satz gültig ist. Den dualen Satz erhält man, indem man aus dem Ausgangssatz die Punkte als Geraden auffasst und die Geraden als Punkte.

Die Gültigkeit des Dualitätsprinzips kann man anhand der Axiome überprüfen: Axiom 1 ist dual zu Axiom 2, Axiom 2 zu Axiom 1 und Axiom 3 ist zu sich selbst dual.

Analyse Während die Geometrie nach EUKLID (1962) den Tastraum beschreibt, beschreibt die Projektive Geometrie den Sehraum. In ihm nimmt man keine parallele Geraden wahr, stattdessen schneiden sich Geraden immer. Sei es ähnlich der Schnittpunkte in der Euklidischen Ebene, oder aber im unendlich fernen Punkt am Horizont.

Gerade diese unendlich fernen Elemente boten Anlass zu ausgiebiger Diskussion, welche STRUVE (1990) darstellt (Ebd., S. 203ff): In STURM (1870b) und STURM (1870a) wird für die Behandlung der neueren (projektiven) Geometrie in der Schule plädiert. Der Herausgeber der ZMNU fasst in HOFFMANN (1870) zusammen, dass die Etablierung der Behandlung der neueren Geometrie in der Schule ein erklärtes Ziel der Zeitschrift sei. KOBER (1870) führt jedoch aus, dass die unendlich fernen Punkte einen Widerspruch zur Welt darstellen: Er betrachtet Eisenbahnschienen und formuliert, dass „[n]iemand sagen wolle [...], dass die Schienen, wenn auch im unendlichen, je zusammentreffen würden? Dass also die Locomotive auf ihnen nicht mehr würde stehen können? Hierin läge in der That eine contradictio in adjecto.“ (Ebd. S. 492, Hervorhebungen im Original).

STRUVE (1990) führt aus, dass man Geometrie in Form von verschiedenen Aspekten erfahren kann, zum einen im Tast-Aspekt, für uns der Zugang mit Hilfe der euklidischen Geometrie, zum anderen im Seh-Aspekt, für uns der Zugang mit Hilfe der projektiven Geometrie (Ebd., S. 199ff).

Mittels dieser Unterscheidung lässt sich das o.a. KOBER (1870)-Zitat erklären: Hier findet gerade eine Vermischung der Aspekte statt. Für Elemente, wie die unendlich fernen Punkte, die nur im Seh-Aspekt sinnvoll verwendet werden können, wird eine Veror- tung im Tast-Aspekt gesucht.

Zum einen findet mit der Projektiven Geometrie eine Erweiterung der Anwendungs- bereiche der Mathematik statt: Tastraum und Sehraum können nunmehr beschrieben werden. Hierbei wurde über die Elemente diskutiert, mit denen Geometrie betrieben wird. Zum anderen ist durch das Dualitätsprinzip in der Projektiven Geometrie ein Schritt hin zur Beschreibung von Strukturen gemacht worden. Es werden erste innermathematische Phänomene auf Metaebene beschrieben und es scheint weniger auf die Elemente an sich, Punkte und Geraden sind austauschbar, als auf die Beziehung zwischen ihnen, die Inzidenz, anzukommen.

2.3 Nicht-euklidische Geometrie

In STRUVE/STRUVE (2004a) und STRUVE/STRUVE (2004b) wird die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie dargestellt: Ausgangspunkt für die Entwicklung von nicht-euklidischen Geometrien war die Frage nach der Evidenz des euklidischen Parallelenpos- tulates. Die Evidenz, d.h. die unmittelbare Einsicht, dass eine Aussage unzweifelbar von jedermann als wahr anerkannt wird, war eine Forderung an Postulate. Diesen Kriteri- en genügte das 5. Postulat (siehe Abschnitt 2.1 bzw. Abb. 2.5) für viele Mathematiker nicht.¹³ Zunächst wurden alternative Formulierungen vorgeschlagen, zudem wurde ver- sucht, die Unabhängigkeit des fünften Postulats von den anderen vieren zu zeigen. Hier- bei gingen z.B. G. SACCHERI und J.H. LAMBERT im 18. Jahrhundert von der Negation des fünften Postulats aus und zeigten, dass sie eine Aussage herleiten konnten, die sie als *widersprüchlich* ansahen. Dies galt jedoch nur, wenn man stillschweigend das fünfte Postulat voraussetzte. LOBATSCHEWSKI und BOLYAI entwickelten im 19. Jahrhundert ebenfalls ausgehend von der Negation des fünften Postulats eine Theorie, welche sie jedoch als *nicht widersprüchlich* ansahen. (STRUVE/STRUVE, 2004a, S. 39ff).

Die PLAYFAIR-Fassung¹⁴ des Parallelenpostulats lautet:

Zu einer gegebenen Gerade g und einem nicht mit g inzidierenden Punkt P existiert genau eine Parallele g' zu g , die durch P verläuft.

Dieses Postulat kann man auf zwei Weisen negieren:

¹³GARBE (2001) stellt diese Zweifel schon für Mathematiker des Mittelalters heraus: „Sie [die Mathema- tiker, SJS] waren der Ansicht, daß ein *Problem* damit verbunden ist. Es erschienen ihnen verdächtig und dubios, da es weder so offensichtlich und unmittelbar einleuchtend war wie die meisten anderen Axiome, noch sich durch die sinnliche Anschauung belegen ließ“ (GARBE, 2001, S. 53).

¹⁴Eine zum fünften Postulat äquivalente Formulierung, welche der Brite JOHN PLAYFAIR formuliert hat und die heute i.a. genutzt wird.

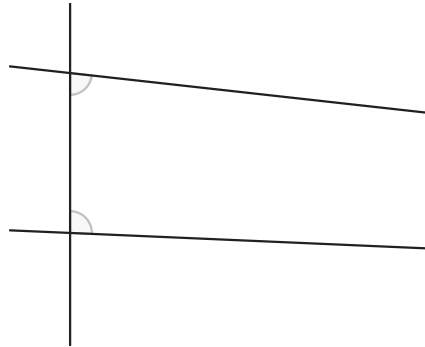


Abbildung 2.5: Fünftes Postulat – Version in EUKLIDS Elementen

1. Zu einer Geraden g und einem nicht mit g inzidierenden Punkt P gibt es mehrere Parallelen durch P .
2. Zu einer Geraden g und einem nicht mit g inzidierenden Punkt P gibt es keine Parallelen durch P .

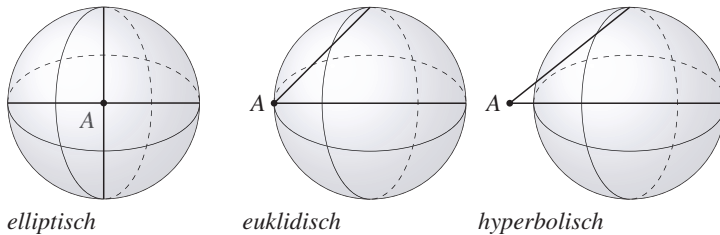
LOBATSCHESKY und BOLYAI wählten beide die hier zuerst aufgeführte Möglichkeit der Negation und entwickelten so deduktiv die hyperbolische Geometrie (STRUVE/STRUVE, 2004a, S. 40). Diese entspricht gerade der Geometrie, welche aus den Hypothesen von SACCHERI und LAMBERT hätte hergeleitet werden können (GARBE, 2001, S. 58).

FELIX KLEIN, eine Idee von CALEY aufgreifend, begründete Anfang des 20. Jahrhunderts die hyperbolische Geometrie (eben jene Anfänge von LOBATSCHESKY und BOLYAI) in der projektiven Geometrie und es war ihm so möglich, anschauliche Modelle zu konstruieren. Zusätzlich zur hyperbolischen Geometrie fand er noch sieben weitere Geometrien (STRUVE/STRUVE, 2004a, S. 40).

Insgesamt gibt es neun ebene Geometrien, die ebenen reellen Caley-Klein Geometrien, welche in STRUVE/STRUVE (2004b) bzw. STRUVE/STRUVE (1985) modelltheoretisch charakterisiert werden. Hierbei werden die Modelle im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ konstruiert. STRUVE/STRUVE (2004b) betrachten eine nicht-ausgeartete Quadrik $\mathcal{Q}$, deren Durchschnitt mit mindestens einer Ebene ein nicht-ausgearteter Kegelschnitt ist. $\mathcal{Q}$ ist hierbei entweder eine „Kugel“, welche keine Erzeugende besitzt, d.h. es existiert keine Gerade, welche innerhalb der Quadrik liegt, ein „Kegel“, welcher genau eine Erzeugende besitzt, d.h. durch jeden von der Kegelspitze verschiedenen Punkt geht genau eine Erzeugende, oder eine „Regelfläche“, welche genau zwei Erzeu-

Tabelle 2.1: Einteilung der ebenen reellen Geometrien (STRUVE/STRUVE, 2004b, S. 209)

$\begin{smallmatrix} m \\ \backslash \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2
0	<i>elliptisch</i>	<i>euklidisch</i>	<i>hyperbolisch</i>
1	<i>coeuklidisch</i>	<i>Galileisch</i>	<i>cominkowskisch</i>
2	<i>cohyperbolisch</i>	<i>Minkowskisch</i>	<i>doppelt-hyperbolisch</i>

**Abbildung 2.6:** Modelle der Caley-Klein-Geometrien

gende besitzt. Zusätzlich zu $\mathcal{Q}$ benötigt man einen Punkt A der projektiven Ebene. Mit Angabe von $\mathcal{Q}$ und A sind die Cayley-Klein Geometrien eindeutig bestimmt.

STRUVE/STRUVE (2004b) definieren die reelle ebene Caley-Klein Geometrie als ein bezüglich einer nicht-ausgearteten Quadrik $\mathcal{Q}$ und einem beliebigen Punkt A von $\mathfrak{P}_3(\mathbb{R})$ und einer Zahl $i \in \{1, 2, 3\}$ definiertes Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{G})$, wobei $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ nicht-leere Mengen und

- $\mathcal{P}$: Menge aller Geraden durch A , die $\mathcal{Q}$ schneiden,
- $\mathcal{L}$: Menge $\mathcal{E}_i$ aller Ebenen durch A , die $\mathcal{Q}$ schneiden und die genau i Tangenten an $\mathcal{Q}$ durch A besitzen,
- $\mathcal{G}$: Gruppe, die erzeugt wird von den Spiegelungen an den Elementen aus $\mathcal{P}$ und $\mathcal{L}$, restringiert auf $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$.

Wir betrachten die erste Zeile von Tabelle 2.1 näher. Die Modelle für die *elliptische*, *euklidische* bzw. *hyperbolische Geometrie* erhält man, indem man als Quadrik $\mathcal{Q}$ die „Kugel“ wählt, d.h. die Anzahl der Erzeugenden m ist 0. Betrachten wir n : $n = 1$ bedeutet, dass der Punkt A auf $\mathcal{Q}$ liegt, $n = 0$ bzw. $n = 2$, dass A innerhalb bzw. außerhalb von $\mathcal{Q}$ liegt, n gibt hierbei die Anzahl der Tangenten an $\mathcal{Q}$ durch A an, die die Elemente aus $\mathcal{L}$ besitzen (vgl. Abbildung 2.6).

Analyse Motiviert durch ein Problem der Anschauung – Ist das fünfte Postulat unmittelbar einsichtig, oder nicht? – wurden die nicht-euklidischen Geometrien entwickelt.

Hiermit wurde zum einen aufgezeigt, dass das Parallelenpostulat nicht aus den anderen Axiomen herleitbar ist und daher zurecht als Postulat angenommen wurde, zum anderen wurde durch FELIX KLEIN aufgezeigt, dass die nicht-euklidischen Geometrien unabhängig von der euklidischen Geometrie bestehen¹⁵ (STRUVE/STRUVE, 2004a, S. 46f).

Dies war insofern bedeutend für die damalige Zeit, als dass der universelle Gültigkeitsanspruch der euklidischen Geometrie in Frage gestellt wurde. Das Vorgehen der Mathematik war bis dato wie folgt zu charakterisieren:

„Von evidenten Axiomen ausgehend wurden alle Sätze der Theorie allein mit Hilfe unbezweifelbarer logischer Schlüsse bewiesen. Da die Axiome als wahre Aussagen angesehen wurden und die Logik als Theorie des korrekten Schließens verstanden wurde, übertrugen die Beweise die Wahrheit der Axiome auf die Schlussfolgerungen“ (STRUVE/STRUVE, 2004a, S. 52).

Selbst die Entdeckung der projektiven Geometrie hatte noch nicht die einschneidende Wirkung auf die Sichtweisen auf Mathematik. So kann man sich zum einen die projektive Geometrie als Derivat der euklidischen Geometrie vorstellen. Die Zentralprojektionen, welche z.B. DÜRER (Abb. 2.3) durchführt, setzt einen euklidischen Raum voraus. Zum anderen ist in der projektiven Geometrie keine Metrik definiert, sie ist also kein kompletter Gegenentwurf zur euklidischen Geometrie.

Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien wurden viele der bisherigen gesellschaftlichen Annahmen in Frage gestellt. DAVIS/HERSH (1981) beschreiben dies treffend als eine Krise in der Geschichte der Mathematik. Der Euklidische Mythos geriet ins Wanken:

„Die Nichteuklidische Geometrie untergräbt, so meinte man, das Paradigma vollkommenen Wissens, nämlich die klassische Geometrie. *Eine* sehr heftige Reaktion bestand darin, das Wissen zu teilen und zuzugeben, daß die Geometrie nicht mehr länger an der Spitze einer einheitlichen Hierarchie stand.“ (DAVIS/HERSH, 1988, S. 272f).

2.4 Geometrie heute

Der weitere Verlauf der Entwicklung der Geometrie ging zunächst über die Vervollständigung des Euklidischen Axiomensystems durch MORITZ PASCH. Mit Hilfe von Anordnungsaxiomen konnten die Lücken des Axiomensystems (s. 2.1) geschlossen werden. Dennoch sieht PASCH die Geometrie „als einen Theil der Naturwissenschaft.“ (PASCH, 1882, S. 3). Diese Sichtweise änderte sich, weil DAVID HILBERT stark die heutige Art

¹⁵Wie auch in STRUVE/STRUVE (2004b) aufgezeigt und oben beschrieben, benötigt man nur einen projektiven Raum zur Begründung der neun ebenen Geometrien.

Geometrie zu betreiben beeinflusste. Er beginnt seine Grundlagen der Geometrie wie folgt:

„Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *e r s t e n* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \dots$; die Dinge des *z w e i t e n* Systems nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$; die Dinge des *d r i t t e n* Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$; die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heißen die *Elemente der ebenen Geometrie*, und die Punkten, Geraden und Ebenen heißen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „kongruent“, „parallel“, „stetig“, die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.“ (Hervorhebungen im Original, HILBERT, 1962, S. 2).

Die ersten beiden Axiome der Verknüpfung, welche er aufstellt, lauten:

„I 1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a , die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I 2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.“ (HILBERT, 1962, S. 3).

Als weiteres Beispiel sei LINGENBERG (1978) betrachtet. Er beginnt seine Geometrie mit der Definition folgenden Axiomensystems:

„Seien $\mathfrak{P}, \mathfrak{G}$ zwei Mengen; die Elemente von $\mathfrak{P}$ wollen wir *Punkte*, die Elemente von $\mathfrak{G}$ *Geraden* nennen. Ferner sei zwischen Punkten und Geraden eine Relation $\mathcal{I}$ gegeben: „Der Punkt P inzidiert mit der Geraden g , geschrieben $P\mathcal{I}g$ (gelesen P inzident g) [...]“

Zwei Geraden g, h heißen *parallel* geschrieben $g \parallel h$, wenn $g = h$ gilt oder g, h mit keinem Punkt gemeinsam inzidieren.

Axiom A 1. *Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Gerade, welche mit P und Q inzidiert.*“ (Hervorhebungen im Original, LINGENBERG, 1978, S. 10).

Tabelle 2.2: Entwicklung der Anschauung von Mathematik

<i>Station</i>	<i>Anwendungsbereich</i>	<i>Besonderheiten</i>
EUKLID	Tastraum	
Projektive Geometrie	Sehraum	Hinwendung zu Beziehungen
Nicht-Euklidische Geometrien	(zunächst) keine Referenz	Widerlegung des euklidischen Mythos
HILBERT	Frage irrelevant	Beschreibung von Strukturen

Analyse Sowohl bei HILBERT (1962), als auch bei LINGENBERG (1978) fällt auf, dass nunmehr von *Systemen von Dingen* bzw. *Elementen von Mengen* gesprochen wird. Diese *bezeichnet* man mit bestimmten Namen und sie stehen in gewissen Beziehungen zueinander, welche man wiederum mit Namen bezeichnet. Es werden abstrakte Strukturen beschrieben, die keinerlei Referenzobjekte besitzen. Vielmehr interessieren allein die Beziehungen zwischen den Elementen der jeweiligen Mengen (bzw. Systeme). HILBERT wird zugesprochen dies pointiert bei einem Gespräch dargestellt zu haben: „Man muß jederzeit an Stelle von „Punkten, Geraden, Ebenen“, „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können“ (MESCHKOWSKI, 1980, S. 136). FREUDENTHAL (1973) charakterisiert dies als „Lösung der ontologischen Bindung“ (Ebd., S. 416). Hierdurch werden „die Gegenstände des Axiomensystems [...] gedachte undefinierte Dinge, die, durch ebenso undefinierte Relationen beschränkt, *implizit*, definiert werden.“ (FREUDENTHAL, 1973, S. 416).¹⁶

Axiome sind in der modernen Auffassung von Mathematik keine *evidenten Wahrheiten*, sondern *freie Setzungen*, die die Beziehungen zwischen den Elementen verschiedener (beliebiger) Mengen festlegen.

2.5 Zusammenfassung

Ausgehend von der *Beschreibung des Tastraums* bei EUKLID fand mit der *Beschreibung des Sehraums* in der Projektiven Geometrie eine *Erweiterung des Anwendungsbereichs* der Mathematik statt. Gleichzeitig rückten die *Beziehungen* zwischen den mathematischen Objekten eher in den Blickpunkt, als die Natur der mathematischen Objekte selbst. Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien rückte dieser Aspekt vollständig in den Mittelpunkt, in der Mathematik ging es nicht mehr darum, ewig erhabene Wahrheiten des Universums zu beschreiben, sondern um die *Beschreibung von Strukturen*,

¹⁶Das strenge axiomatische Vorgehen scheint hierbei auch für FREUDENTHAL anstrengend zu sein: „Das Eindrucksvollste an Hilberts Axiomensystemen und vielen neueren ist wohl, daß sie so kompliziert sind.“ (FREUDENTHAL, 1973, S. 415).

deren Eigenschaften durch Axiome bestimmt sind. Dies wird vor allem in der *formalistischen Auffassung* HILBERTS deutlich (vgl. auch Tab. 2.2).

Diese Beschreibung der Vorgänge lässt sich mit Hilfe des strukturalistischen Konzepts der *empirischen Theorien* (vgl. z.B. STEGMÜLLER (1987) und BURSCHIED/STRUVE (2010)) präzisieren. Dies geschieht im nächsten Kapitel.

Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs

Schwob, S.

2016, XV, 167 S. 28 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-15396-0