

2 Grundlagen

2.1 Koordinatensysteme, Notation

Bei der Betrachtung der unterschiedlichen Teilsysteme in der Fahrdynamiksimulation ist es sinnvoll, verschiedene Koordinatensysteme und Referenzpunkte festzulegen, um die Berechnung der erforderlichen Kinematikgrößen zu vereinfachen, vgl. [14].

Beispielsweise befindet sich der Mittelpunkt des Fahrzeugreifens R gegenüber dem Inertialsystem I an der Position $\mathbf{r}_{IR,I}$, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{IR,I}$ und besitzt die Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{IR}$ sowie den Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{IR,I}$. Hierbei werden die Vektoren für den relativen Abstand $\mathbf{r}$, die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ und die relative Drehrate $\boldsymbol{\omega}$ sowie die Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ in einer Schreibweise nach [10] angegeben:

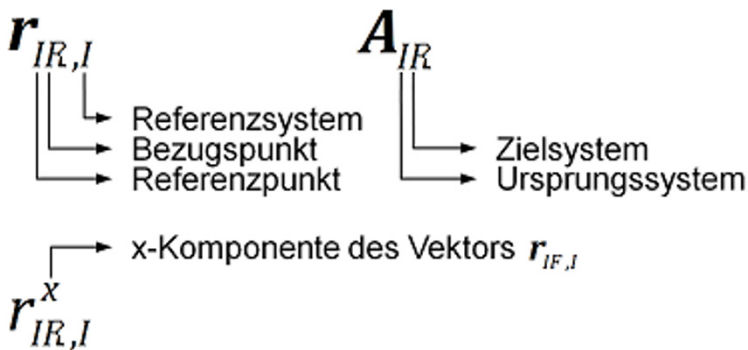


Abbildung 2.1: Vektornotation

Ebenfalls müssen für die Betrachtung der Reifen-Fahrbahn-Interaktion Position, Orientierung und Geschwindigkeit des Fahrbahnkörpers F gegenüber dem Inertial-Koordinatensystem angegeben werden, wenn dieser nicht identisch mit dem Inertial-Koordinatensystem ist. Diese kinematischen Größen sind in einer Mehrkörpersimulationsumgebung zu jedem Zeitpunkt verfügbar. Zur Berechnung des Reifenzustands sind jedoch zunächst die relativ-

kinematischen Größen $\mathbf{r}_{FR,F}$, $\mathbf{v}_{FR,F}$, $\mathbf{A}_{FR}$ und $\boldsymbol{\omega}_{FR,F}$ im Fahrbahnkoordinatensystem F erforderlich, die im Folgenden angegeben werden:

$$\mathbf{A}_{FR} = \mathbf{A}_{FI} \cdot \mathbf{A}_{IR} = \mathbf{A}_{IF}^T \cdot \mathbf{A}_{IR} \quad \text{Gl. 2.1}$$

$$\mathbf{r}_{FR,F} = \mathbf{A}_{IF}^T \cdot (\mathbf{r}_{IR,I} - \mathbf{r}_{IF,I}) \quad \text{Gl. 2.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{FR,F} = \mathbf{A}_{IF}^T \cdot (\boldsymbol{\omega}_{IR,I} - \boldsymbol{\omega}_{IF,I}) \quad \text{Gl. 2.3}$$

$$\mathbf{v}_{FR,F} = \dot{\mathbf{r}}_{FR,F} = \dot{\mathbf{A}}_{IF}^T \cdot (\mathbf{r}_{IR,I} - \mathbf{r}_{IF,I}) + \mathbf{A}_{IF}^T \cdot (\mathbf{v}_{IR,I} - \mathbf{v}_{IF,I}) \quad \text{Gl. 2.4}$$

mit

$$\dot{\mathbf{A}}_{IF}^T = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IF,I} \cdot \mathbf{A}_{IF}^T \quad \text{Gl. 2.5}$$

wobei

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IF,I} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{IF,I}^z & \omega_{IF,I}^y \\ \omega_{IF,I}^z & 0 & -\omega_{IF,I}^x \\ -\omega_{IF,I}^y & \omega_{IF,I}^x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 2.6}$$

die schiefsymmetrische Matrix des Drehgeschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{\omega}_{IF,I}$ darstellt.

Die Komponenten einer Drehmatrix lauten:

$$\mathbf{A}_{IF} = \begin{bmatrix} A_{IF}^{xx} & A_{IF}^{xy} & A_{IF}^{xz} \\ A_{IF}^{yx} & A_{IF}^{yy} & A_{IF}^{yz} \\ A_{IF}^{zx} & A_{IF}^{zy} & A_{IF}^{zz} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{IF}^x = \begin{bmatrix} A_{IF}^{xx} \\ A_{IF}^{yx} \\ A_{IF}^{zx} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{IF}^y = \begin{bmatrix} A_{IF}^{xy} \\ A_{IF}^{yy} \\ A_{IF}^{zy} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{IF}^z = \begin{bmatrix} A_{IF}^{xz} \\ A_{IF}^{yz} \\ A_{IF}^{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 2.7}$$

Bei der Betrachtung der Reifen-Fahrbahn-Interaktion wird sinnvollerweise das Fahrbahn-Koordinatensystem als Referenzsystem verwendet. Daher wird im Folgenden zur einfacheren Schreibweise

- das Referenzsystem nur angegeben, wenn dieses nicht das Fahrbahn-Koordinatensystem ist (z.B.: $\mathbf{r}_{IR} := \mathbf{r}_{IR,F}$),
- der Bezugspunkt nur angegeben, wenn dieser nicht mit dem Fahrbahnursprung identisch ist (z.B.: $\mathbf{r}_R := \mathbf{r}_{FR,F}$).

Neben dem Fahrbahnursprung F und dem Reifenmittelpunkt R existieren für das universelle Fahrbahnmodell noch weitere relevante Punkte bzw. Koordinatensysteme, deren Abkürzungen lauten:

- I : Inertial-Koordinatensystem
- F : Fahrbahnursprung
- A : Beliebiger Punkt auf der Fahrbahnoberfläche
- R : Geometrischer Reifenmittelpunkt
- K : Kontaktpunkt zwischen Reifen und Fahrbahn
- S : Schlupfpunkt
- C : Tydex-C-System
- W : Tydex-W-System
- H : Tydex-H-System
- V : Vorschauunkt des Fahrermodells
- M : Punkt auf der Fahrbahnmittellinie
- B : Referenzpunkt der berührungslosen Messtechnik
- L : Laserpunkt auf der Fahrbahnoberfläche

Abbildung 2.2 stellt diese verwendeten Abkürzungen symbolisch dar:

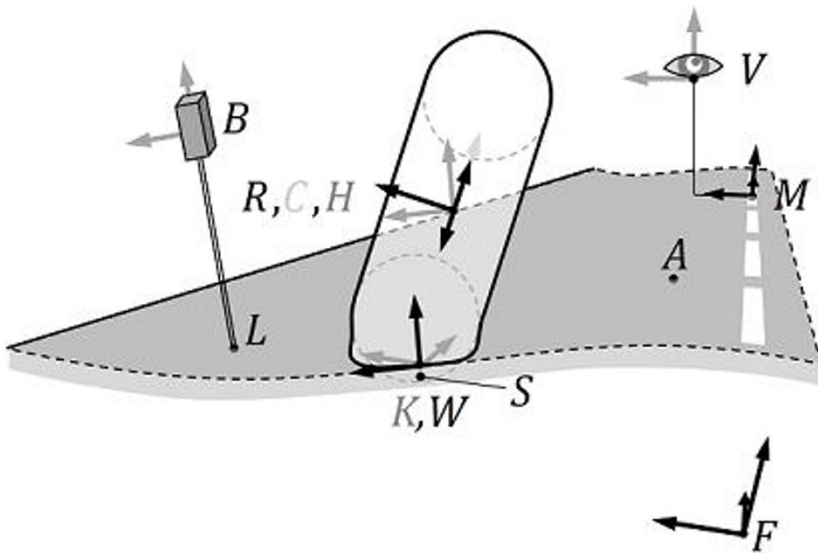


Abbildung 2.2: Relevante Punkte und Koordinatensysteme bei der Interaktion der Fahrbahn mit dem Reifen, dem Fahrer oder berührungsloser Messtechnik

2.2 Reifenmodelle

Die Modellierung des Reifens ist aufgrund seiner Materialeigenschaften und seines komplexen Aufbaus für die Fahrdynamiksimulation eine der größten Herausforderungen. Der Reifen überträgt als einziges Verbindungsglied zwischen Fahrzeug und Fahrbahn alle Kräfte, die zur Längs-, Quer- und Vertikalführung des Kraftfahrzeugs erforderlich sind. Aus diesem Grund sind Modellierungsfehler des Reifenverhaltens häufige Ursachen für Simulationsfehler. Die möglichen Fehlerquellen der Reifenmodellierung bestehen jedoch nicht nur in der Wahl eines geeigneten Modells sondern ebenfalls in der Parametrisierung des Modellverhaltens. Der direkte Vergleich zwischen Simulation und Fahrversuch wird dadurch erschwert, dass die Reifeneigenschaften von den Umgebungsbedingungen (z.B. Luftfeuchtigkeit, Tem-

peratur von Reifen und Fahrbahn) abhängen und sich einige Reifeneigenschaften (z.B. Reifentemperatur) auch während des zu untersuchenden Fahrmanövers signifikant ändern können. Diese Einflüsse können in der Simulation meist nicht abgebildet werden.

Die Entstehungsmechanismen der Reifenkräfte in Umfangs- und Seitenrichtung lassen sich anhand der Verformung der Gummielemente im Reifenlatsch physikalisch erklären, aus der direkt die Schubspannungsverteilung folgt [15]. Das Verhalten der Reifennormalkräfte ist hierbei im Wesentlichen vom Reifeninnendruck sowie der elastischen Eigenschaften der Lauffläche, Seitenwand und des Reifengürtels abhängig.

Wirkt auf einen stehenden Fahrzeugreifen eine konstante Radlast F_z , so verformt sich der Reifen wie in **Abbildung 2.3** links dargestellt. Die Normalkraft F_N im Reifenlatsch ist identisch mit der Summe aus der aufgetragenen Radlast F_z und der Reifengewichtskraft. Die Normalspannungsverteilung ähnelt der Form einer Parabel.

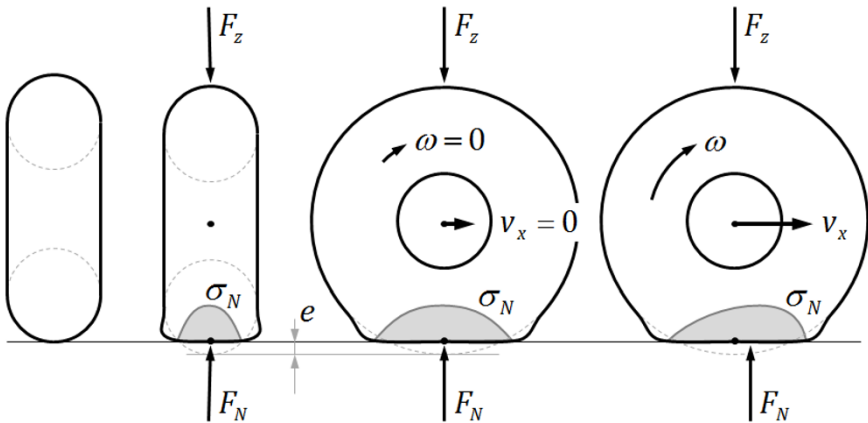


Abbildung 2.3: Normalspannungen σ_N und resultierende Reifennormalkraft F_N im Reifenlatsch des stehenden ($\omega = v_x = 0$) und drehenden ($\omega, v_x \neq 0$) Reifens

Die Normalspannungsverteilung des drehenden Reifens verschiebt sich wie in **Abbildung 2.3** rechts dargestellt. Die resultierende Normalkraft F_N greift versetzt um den Rollwiderstandshebelarm vor dem Radaufstandspunkt an. Die Normalspannungsverteilung im Reifenlatsch begrenzt die übertragbaren Schubspannungen in Längs- und Querrichtung.

Für viele fahrdynamische Anwendungsfälle genügt eine lineare Modellierung der Reifennormalkraft in Abhängigkeit von der Reifenverformung bzw. der virtuellen Eindringung e des unverformten Reifens in die Fahrbahnoberfläche mit:

$$F_N = \begin{cases} c_N \cdot e + d_N \cdot \dot{e} & , e \geq 0 \\ 0 & , e < 0 \end{cases} \quad \text{Gl. 2.8}$$

Beim angetriebenen oder gebremsten Reifen verformen sich die auf der Fahrbahnoberfläche haftenden Gummielemente in Reifenlängsrichtung, wie es **Abbildung 2.4** anhand der Schubspannungsverteilung σ_U für einen stationären Zustand zeigt. Ebenfalls dargestellt sind die Schubspannungen σ_S in Reifenquerrichtung, die bei einem unter Schräglauf abrollenden Reifen hervorgerufen werden.

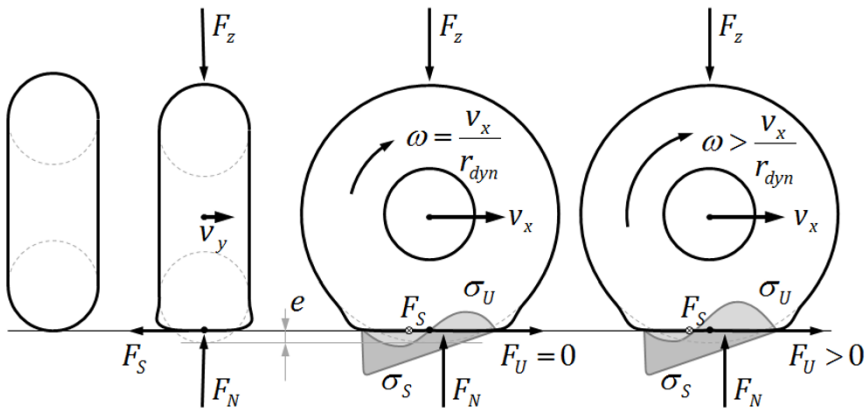


Abbildung 2.4: Qualitative Verläufe der Schubspannungen (σ_U, σ_S) und resultierende Kräfte (F_U, F_S) in Umfangs- und Seitenrichtung im Reifenlatsch bei frei rollendem ($\omega = v_x/r_{dyn}$) und angetriebenem ($\omega > v_x/r_{dyn}$) Reifen.

Die Verformung der Gummielemente wird durch das Reibverhalten zwischen Fahrbahn und Reifen sowie der Normalspannungsverteilung begrenzt. Eine Verformung der Gummielemente ist nur bis zum definierten Haftreibungsmaximum möglich. Ist die Verformung größer als es der Haftreibungsbeiwert zulässt, so beginnen die Gummielemente auf der Fahrbahn zu gleiten und die Schubspannung nimmt ab. Diese Randbedingung führt zu

dem aus der Literatur bekannten Verlauf der Kraft-Schlupfkurven nach **Abbildung 2.5**, z.B. [16], [17].

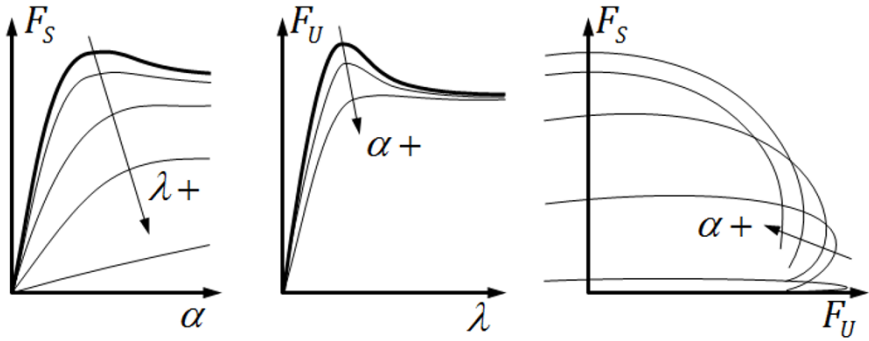


Abbildung 2.5: Verhalten der Umfangs- (F_U) und Seitenkräfte (F_S) im Reifenlatsch für unterschiedliche Kombinationen des Längsschlupfes λ und des Schräglaufwinkels α nach [16]

Das stationäre Kraftverhalten für reinen Längs- bzw. reinen Querschlupf kann sehr gut mit einfachen mathematischen Gleichungen beschrieben werden. Im einfachsten Fall wird lediglich die Steifigkeit im Koordinatenursprung approximiert und ein lineares Reifenkraftverhalten angenommen. Auch die Arkustangensfunktion ist zur Modellierung des Reifenverhaltens durchaus gebräuchlich, da diese zusätzlich neben der Steifigkeit im Koordinatenursprung auch den Sättigungsbereich der Reifenkräfte darstellen kann. Mehr Freiheiten zur mathematischen Approximation der Kraft-Schlupfkurve bietet z.B. Pacejkas Magic Formula [16], die entsprechend über eine größere Anzahl an Parametern (B , C , D , E) verfügt:

$$F_S = D \cdot \sin \left(C \cdot \operatorname{atan} \left(B \cdot \alpha - E \cdot (B \cdot \alpha - \operatorname{atan}(B \cdot \alpha)) \right) \right) \quad \text{Gl. 2.9}$$

mit der Seitenkraftsteifigkeit und dem Seitenkraftmaximum

$$\left. \frac{\partial F_S}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = B \cdot C \cdot D \quad \text{Gl. 2.10}$$

$$\max(F_S) = D \quad \text{Gl. 2.11}$$

sowie den Formfaktoren C und E .

Treten kombinierte Schlupfzustände am Reifen auf, so reduzieren sich die übertragbaren Längs- und Seitenkräfte, wie es bereits in **Abbildung 2.5** dargestellt wurde. Zur Modellierung kombinierter Schlupfzustände existieren ebenfalls unterschiedliche mathematisch oder physikalisch motivierte Ansätze.

Einen weiteren Einfluss auf die Schubspannungsverläufe und damit die Kräfte im Reifenlatsch hat der Sturzwinkel γ . **Abbildung 2.6** verdeutlicht die Entstehung einer Sturzseitenkraft anhand der seitlichen Verformung der Gummielemente des gestürzten und drehenden Reifens. Für kleine Schräglauf- und Sturzwinkel können die resultierenden Sturzseitenkräfte den Seitenkräften linear überlagert werden.

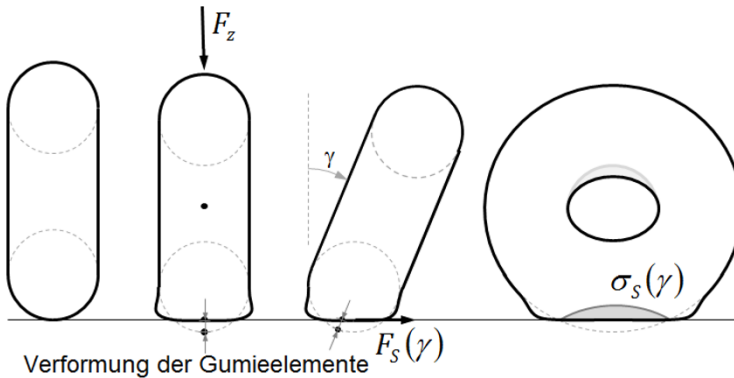


Abbildung 2.6: Entstehung der Sturzseitenkraft $F_s(\gamma)$ infolge der Verformungen der Gummielemente im Reifenlatsch, dargestellt ist ebenfalls die Schubspannungsverteilung $\sigma_s(\gamma)$ in der Reifenmittelebene

Aus den Schubspannungsverteilungen nach **Abbildung 2.4** wird ebenfalls ersichtlich, dass Längs- und Seitenkräfte nicht zwangsläufig im Latschmittelpunkt bzw. Flächenschwerpunkt angreifen. Die hieraus resultierenden Rückstellmomente müssen gegebenenfalls vom Reifenmodell berücksichtigt werden.

Die Entstehung der stationären Kräfte und Momente im Reifenlatsch hängt hierbei von den folgenden kinematischen Größen ab:

- Verformung des Reifens in vertikale Richtung, entspricht der virtuellen Eindringung e des unverformten Reifens in die Fahrbahnoberfläche

- Eindringgeschwindigkeit $\dot{e}$
- Längsschlupf λ , bestimmt aus der Reifenlängsgeschwindigkeit v_x und der theoretischen Fahrgeschwindigkeit v_{th} im Reifenaufstandspunkt, z.B. $\lambda = (v_{th} - v_x)/v_{th}$
- Schräglaufwinkel α , bestimmt aus den kinematischen Größen v_x und v_y , z.B. $\alpha = \text{atan}(v_y/v_x)$
- Sturzwinkel γ

Die Bestimmung dieser Größen ist Aufgabe des Fahrbahnmodells und wird daher in **Kapitel 3.3** hergeleitet.

Die aus der Raddrehzahl theoretisch resultierende Reifengeschwindigkeit im Reifenaufstandspunkt v_{th} kann für eine Fahrt auf ebener Fahrbahn ohne Sturz- und Schräglaufwinkel mit Hilfe des dynamischen Radhalbmessers r_{dyn} zu

$$v_{th} = \omega \cdot r_{dyn} \quad \text{Gl. 2.12}$$

bestimmt werden. Messungen am frei rollenden Reifen haben gezeigt, dass sich im schlupffreien ($\lambda = 0$) und umfangskraftfreien ($F_U = 0$) Fahrbetrieb der dynamische Radhalbmesser zwischen dem Radhalbmesser des unverformten Reifens und dem Abstand zwischen Radmittelpunkte zum Radaufstandspunkt befindet.

Pacejka [16] führt aus diesem Grund zur Modellierung des dynamischen Radhalbmessers den sogenannten Schlupfpunkt ein, der sich in den meisten Betriebspunkten unterhalb der Fahrbahnoberfläche befindet, und bestimmt in diesem Punkt den Geschwindigkeitszustand des Reifens zur Schlupfberechnung, siehe **Abbildung 2.7**. Da jedoch die Modellierung des dynamischen Radhalbmessers in anderen Reifenkraftmodellen nicht einheitlich erfolgt, wird in **Kapitel 3.3** gezeigt, wie eine Transformation der Geschwindigkeitsgrößen v_x , v_y und v_{th} im Kontaktpunkt K auf der Fahrbahnoberfläche in einem beliebigen Schlupfpunkt S erfolgen kann.

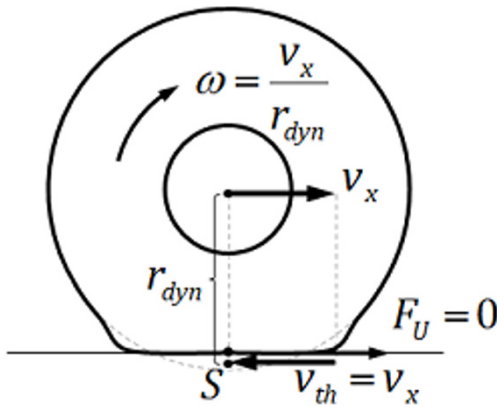


Abbildung 2.7: Position des Schlupfpunkt S nach [16] im frei rollenden Zustand ohne Umfangskraft und Längsschlupf

Bei einer Änderung von Spur-, Sturz- oder Schräglaufwinkel sowie des Antriebsschlupfes stellen sich die bis hierhin beschriebene stationären Reifenkräfte nicht sprunghaft, sondern zeitlich verzögert ein, vgl. [16]. Die zur Modellierung des dynamischen Reifenverhaltens erforderlichen Parameter und Zustände erfordern jedoch keine weiteren relativkinematischen Größen zwischen Fahrbahn und Reifen, weswegen an dieser Stelle auf die Beschreibung des dynamischen Kraftaufbaus verzichtet werden kann.

Einpunkt-Reifenkraftmodelle gehen in der Regel vereinfacht von einer ebenen Fahrbahn im Kontaktpunkt aus und vernachlässigen den Einfluss der Fahrbahnkrümmung (und anderer kurzweiliger Fahrbahnunebenheiten) auf die Normalkraftverteilung im Reifenlatsch. Der Einfluss der Fahrbahnkrümmung ist bereits aus der messtechnischen Erfassung der Reifeneigenschaften am Trommelpfand bekannt und wird durch geeignete Verfahren kompensiert. Einen theoretischen Ansatz zur quantitativen Abschätzung des Krümmungseinflusses im Reifenlatsch auf die Parameter eines Einpunkt-Reifenkraftmodells zeigt [18]. Durch eine geeignete Berücksichtigung der Fahrbahnkrümmung in der Reifenkraftberechnung könnte folglich eine Genauigkeitssteigerung erzielt werden. Die Umsetzung in einem erweiterten Reifenkraftmodell war jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit. Wie in **Kapitel 3** gezeigt, ist durch den Einsatz des universellen Fahrbahnmodells die Information der Fahrbahnkrümmung im Reifenlatsch zu jedem Simulationszeitschritt bekannt und würde dem Reifenkraftmodell zur Verfügung stehen.

2.3 Fahrermodelle

In der Gesamtfahrzeugsimulation ist es für viele Fragestellungen erforderlich, neben Fahrzeug und Fahrbahn ebenfalls den Fahrer zu simulieren. Das Fahrermodell erfasst typischerweise die Querabweichung zu einer vorgegebenen Solltrajektorie sowie die Fahrzeuglängsgeschwindigkeit und stellt abhängig vom verwendeten Regelalgorithmus den Lenkwinkel bzw. das Lenkmoment und führt Eingriffe am Gas-/Bremspedal durch. Die Messung und Bereitstellung der Sensorgrößen für das Fahrermodell ist Bestandteil der Fahrbahnmodellierung und wird daher in diesem Kapitel behandelt.

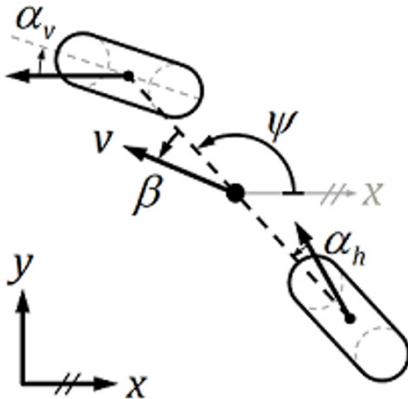


Abbildung 2.8: Lineares Einspurmodell bei konstanter Geschwindigkeit v mit den Zustandsgrößen $\dot{\psi}$ (Gierrate) und β (Schwimmwinkel) sowie den daraus folgenden Schräglaufwinkeln α_v und α_h an Vorder- und Hinterachse

Die Aufgabe der Spurhaltung durch einen Lenkeingriff kann anhand des linearen Einspurmodells, z.B. [19], [20], [21], nach **Abbildung 2.8** erläutert werden.

Die Dynamik des Einspurmodells stellt zunächst einen Zusammenhang zwischen dem Lenkwinkel δ als Stellgröße und der Zustandsableitung $\dot{x}$ dar, wobei der Zustand x die Gierrate $\dot{\psi}$ sowie den Schwimmwinkel β beinhaltet, vgl. [22]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-k_v \cdot l_v^2 - k_h \cdot l_h^2}{J_z \cdot v} & \frac{-k_v \cdot l_v + k_h \cdot l_h}{J_z} \\ \frac{-k_v \cdot l_v + k_h \cdot l_h}{m \cdot v^2} - 1 & \frac{-k_v - k_h}{m \cdot v} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \psi \\ \beta \end{bmatrix}}_B + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{k_v \cdot l_v}{J_z} \\ \frac{k_v}{m \cdot v} \end{bmatrix}}_B \cdot \delta \quad \text{Gl. 2.13}$$

Die Aufgabe eines Lenkreglers besteht in der Minimierung der Querabweichung q zwischen Fahrzeug und Fahrbahnsolltrajektorie, siehe **Abbildung 2.9**. Für die Ableitung der Querabweichung an einem Vorschauunkt V kann für kleine Querabweichungen folgende linearisierte Gleichung nach [23] gefunden werden:

$$\dot{q} = v \cdot (\psi_M - \psi - \beta) - \dot{\psi} \cdot l_V \quad \text{Gl. 2.14}$$

Die zeitliche Ableitung von **Gleichung 2.14** führt zu:

$$\ddot{q} = v \cdot (\dot{\psi}_M - \dot{\psi} - \dot{\beta}(\delta)) + \dot{v} \cdot (\psi_S - \psi - \beta) - \ddot{\psi}(\delta) \cdot l_V = f(\delta) \quad \text{Gl. 2.15}$$

Hiermit ist die zweite zeitliche Ableitung der Querabweichung q direkt abhängig von der Stellgröße, dem Lenkwinkel δ . Es folgt aus **Gleichung 2.13** und **2.15**:

$$\delta = \frac{\ddot{q} + v \cdot (\dot{\psi} \cdot (1 + A_{21}) + \beta \cdot A_{22} - \dot{\psi}_M) + l_V \cdot (\dot{\psi} \cdot A_{11} + \beta \cdot A_{12}) + \dot{v} \cdot (\psi + \beta - \psi_M)}{v \cdot B_2 - l_P \cdot B_1} \quad \text{Gl. 2.16}$$

Nach dem Prinzip der Zustandsregelung kann für das lineare Einspurmodell ein optimale Lenkregler gefunden werden, wenn gilt:

$$\ddot{q} = -[k_P \quad k_D] \cdot \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = -k_P \cdot q - k_D \cdot \dot{q} \quad \text{Gl. 2.17}$$

wobei die Konstanten k_P und k_D z.B. anhand einer geeigneten Polvorgabe gewählt werden können, vgl. [24].

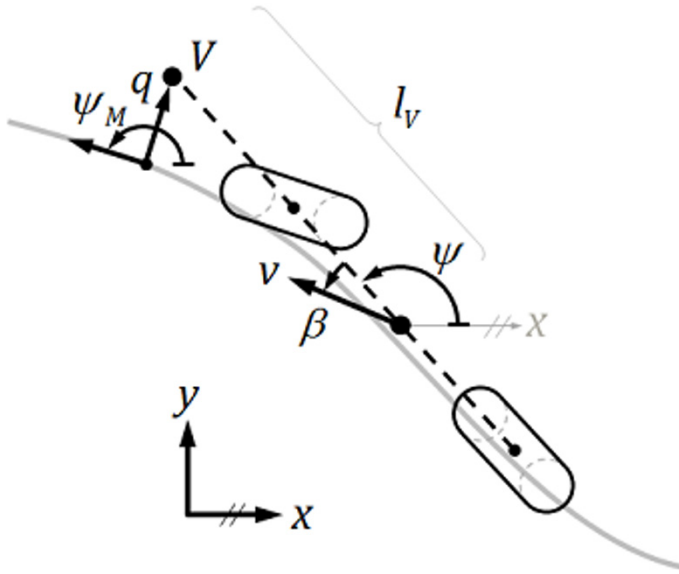


Abbildung 2.9: Queraufweichung q und Gierwinkeldifferenz $\Delta\psi = \psi_M - \psi$ eines Vorschau-Punktes V des linearen Einspurmodells zu einem Punkt M auf der Fahrbahnmitteleise (Solltrajektorie)

Neben den Fahrzeug-Zustandsgrößen ψ und β sind also ebenfalls die Fahrzeugqueraufweichung q , die Fahrzeugquergeschwindigkeit $\dot{q}$ sowie die Gierwinkeldifferenzen $\Delta\psi = \psi_M - \psi$ und deren zeitliche Ableitung $\Delta\dot{\psi} = \dot{\psi}_M - \dot{\psi}$ zur Implementierung einer optimalen Lenkregelung erforderlich. Diese vom Fahrbahnverlauf und der Bewegung eines Vorschau-Punktes abhängigen Größen stellen hiermit die erforderlichen Eingangsgrößen in das Fahrermodell dar.

Auf die Ermittlung dieser kinematischen Größen in einem Interaktionsmodell zwischen Fahrbahn und Vorschau-Punkt wird daher in **Kapitel 3.4** eingegangen.

<http://www.springer.com/978-3-658-15612-1>

Ein universelles Fahrbahnmodell für die
Fahrdynamiksimulation

Wiesebrock, A.

2016, XVIII, 121 S. 78 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-15612-1