

Kapitel 2

Mathematische Beschreibung des Zweirades

2.1 Stand der Technik und Vorgehensweise

Das kinematische und kinetische Verhalten des Systems Zweirad, sei es in Form des Fahrrades als auch als Motorrad, wird bereits seit über einem Jahrhundert untersucht. Ein 2007 veröffentlichter Artikel einer Gruppe bekannter Forscher der Zweiraddynamik [19] bietet einen sehr guten Überblick über wissenschaftliche Arbeiten und Artikel, welche bis zu diesem Zeitpunkt erschienen sind, und dient als Grundlage der folgenden Chronik. So wurde die erste international anerkannte mathematische Analyse des Zweirades 1899 von Whipple [20] veröffentlicht. Das dort verwendete 4-Körper-Modell, inzwischen häufig als Whipple-Modell bezeichnet, dient bis heute als Grundlage analytischer Betrachtungen und wird auch in dieser Arbeit genutzt. In etwa zeitgleich, aber unabhängig von Whipple, veröffentlichte Carvallo eine ähnliche Arbeit [21], in welcher allerdings Masse und Trägheitsmomente der Lenkerbaugruppe vernachlässigt wurden. Dennoch orientiert man sich bis heute an den von ihm gegebenen Hinweisen bzgl. der Vorderradaufhängung, wonach die Lenkachse unterhalb der Frontachse zwischen Radaufhängung und Bodenkontaktpunkt verlaufen soll. Dies wird mittels einer um die Kröpfung nach vorn gebogenen Vorderradgabel realisiert (siehe Abschnitt 2.4 und Abbildung 2.4 links). In den darauf folgenden Jahrzehnten wurden die Arbeiten beider Autoren häufig überprüft, variiert oder ab den 70er Jahren auch numerisch simuliert, ohne das dabei nennenswerte neue Erkenntnisse erlangt wurden. Zudem gab es fehlerhafte Schlussfolgerungen, wie die 1910 von Noether getroffene Aus-

sage, ein Fahrrad kann ohne Kreiseffekte nie selbststabil sein [22]. Diese Aussage wurde 1970 von Johnes [23] angezweifelt, welcher im praktischen Versuch die gyroroskopischen Momente mittels eines gegendrehenden Rades eliminierte und trotzdem freihändig fahren konnte, wenn auch nur mit Mühe. Johnes experimentierte zudem mit dem Nachlauf am Vorderrad und stellte fest, dass ein Fahrrad mit Vorlauf unfahrbar ist. Dennoch gelang es 2011 einer holländischen Forschergruppe [5] ein Einspurfahrzeug zu modellieren und zu konstruieren, welches weder gyroroskopische Momente noch Nachlauf zur Selbststabilisierung verwendet, sondern aufgrund einer ausgeklügelten Massenverteilung stabil bleibt. So entstand über die Jahre ein verworrenes Bild über die Physik des Fahrradfahrens, welches von Widersprüchen und Halbwahrheiten geprägt war und bis heute nur in gewissen Grenzen die Realität beschreibt. Um die Übernahme von Fehlern zu vermeiden wird in dieser Arbeit ein von Grund auf eigenes Modell aufgebaut. Zudem werden im Gegensatz zu den meisten bisherigen Untersuchungen die sich ergebenden Gleichungen nicht linearisiert, wodurch beispielsweise der meist als konstant angenommene Nachlauf am Vorderrad eine Funktion von Lenk- und Kippwinkel wird.

In den folgenden zwei Kapiteln werden die kinetischen Zusammenhänge des Fahrrades hergeleitet. Ziel ist eine möglichst komplette, aber dennoch handhabbare, konsistente Beschreibung. Dazu sind einige Vereinfachungen zu akzeptieren, deren Gültigkeit und Folgen an der jeweiligen Stelle genauer diskutiert werden. Am Ende dieses Abschnittes kann jedem Punkt am Fahrrad, sei es Schwerpunkt oder jeder willkürliche Effektorpunkt, ein eindeutiger Ortsvektor zugewiesen werden. Dieser ist von den generalisierten Koordinaten, welche die Freiheitsgrade des Systems widerspiegeln, abhängig. Mithilfe dieser Ortsvektoren können ab Abschnitt 2.10 die auf das Fahrrad wirkenden Kräfte und Momente beschrieben werden, welche über die Lagrangeschen Gleichungen in Kapitel 3 in ein nichtlineares Differenzialgleichungssystem überführt werden. Parallel wird eine symbolische Berechnung in Matlab mitgeführt (vgl. Abschnitt 3.2). Das komplette Skript befindet sich in Anhang A. Die einzelnen Bestandteile des Gleichungssystems werden in separate Module (subsystems) untergliedert. Dies hat neben einer besseren Übersicht unter anderem den Vorteil, dass einzelne Elemente der Gleichung, wie Massenmatrix oder Kraftkomponenten, unabhängig voneinander in die Simulation zu- oder weggeschaltet werden können. Folglich erscheint an keiner Stelle das

komplett ausformulierte Gleichungssystem, sondern immer nur dessen Ausschnitte.

2.2 Modellbildung

Ein Fahrrad ist ein umfangreiches technisches Gebilde, welches in seiner Komplexität nur schwer beschreibbar ist. Daher sollen vorerst nur die wichtigsten für die Fahrdynamik relevanten Baugruppen beachtet werden. Diese definieren sich durch die Newtonsche Gleichung (Impulssatz) dadurch, dass sie eine Geschwindigkeit ungleich null besitzen und dabei eine nicht zu vernachlässigende Masse in sich vereinen. Zudem werden Elemente, welche eine relevante Führungswirkung ausüben, mit betrachtet. Anhand dieser Überlegung ergibt sich folgende Unterteilung (siehe auch Abb. 2.1), welche sich in den meisten Fahrradbauarten wie auch dem Lastenfahrrad wiederfindet:

- Rahmen, inklusive starr angebundenem Fahrer und Lasten
- Lenkerbaugruppe und Vorderradgabel
- Vorderrad
- Hinterrad

Die starre Anbindung des Fahrers ist eine notwendige Vereinfachung und resultiert aus der nur schwer abschätzbaren Gewichtsverlagerung der Fahrers in Abhängigkeit der Fahrsituation. Der Modellansatz wurde bereits von Whipple genutzt [20].

2.3 Koordinatensysteme

Die Koordinatensysteme bilden die Grundlage für eine analytische Betrachtung des Mehrkörpersystems (MKS) und vereinfachen dessen Handhabung erheblich.

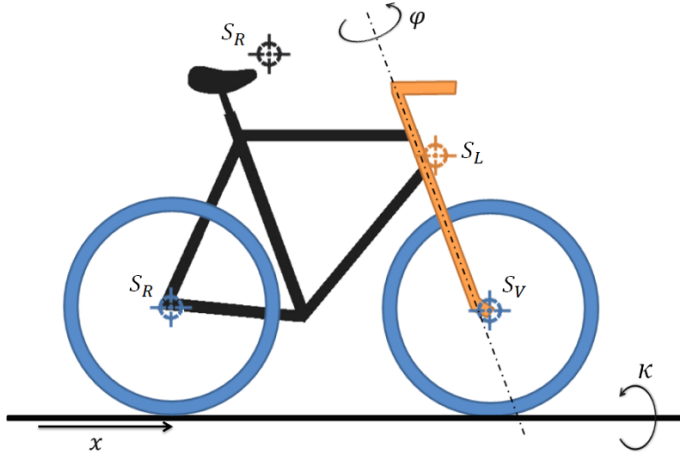


Abb. 2.1 Mehrkörpersystem Fahrrad bestehend aus Rädern (blau), Rahmen (schwarz) und Lenker (orange) mit jeweiligen Schwerpunkten und Freiheitsgraden κ (Kippwinkel, links ist positiv), φ (Lenkwinkel, links ist positiv) und zurückgelegter Fahrstrecke x

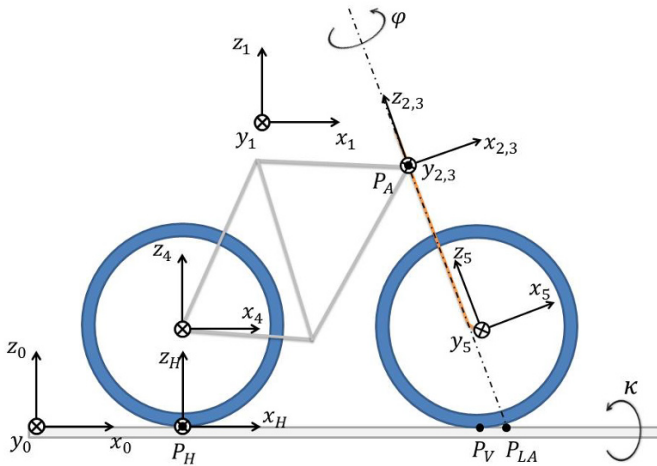


Abb. 2.2 Genutzte Koordinatensysteme

Inertialsystem I_0 :

Basis ist das boden feste und unbewegte Inertialsystem I_0 (Abb. 2.2), dessen Ursprung im Aufstandspunkt des Hinterrades P_H zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt. Die z_0 -Achse steht normal zum Untergrund. Die x_0 -Achse verläuft in der Rahmenebene und schneidet damit immer den hinteren Aufstandspunkt P_H und den Punkt P_{LA} (Schnittpunkt der Lenkachse mit dem Boden). Nach dieser Definition kann das Fahrrad im Modell nur eine gerade Fahrbahn zurücklegen, da es immer an die x_0 -Achse gebunden ist. Dies ist für die Modellierung allerdings völlig ausreichend. Alle auftretenden Kurvenkräfte werden berücksichtigt und der Fahrverlauf lässt sich durch eine Betrachtung des Lenkwinkels über der Zeit berechnen. Durch diese Herangehensweise kann ein Freiheitsgrad (y_0 -Position) eliminiert werden, womit ein holonomes System erreicht wird.

Aufstandspunktsystem I_H :

Der Ursprung des KSYS I_H (Index H für Hinterrad) liegt im Kontaktpunkt des Hinterrades zur Fahrbahn. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Aufstandspunktsystem identisch mit dem Inertialsystem, zu allen anderen Zeitpunkten um x an der x_0 Achse verschoben. Es wird nicht verdreht, die z_H -Achse liegt also immer normal zum Untergrund.

Rahmensystem I_1 :

Im Schwerpunkt des Rahmens (inklusive Fahrer und Lasten) liegt das rahmenfeste KSYS I_1 . Die Achsenausrichtung ist für das labile Gleichgewicht des Fahrrades ($\kappa = \varphi = 0$) identisch zu I_H , sonst abhängig vom Kippwinkel κ .

Zwischensystem I_2 :

Der Kontaktpunkt zwischen Rahmen und Lenker wird durch den Punkt P_A markiert. Dies kann ein willkürlicher Punkt auf der Lenkachse sein, hier ist er der Schnittpunkt mit dem Oberrohr. In diesem Punkt sitzt das KSYS I_2 , welches eben-

falls rahmenfest ist und immer die gleiche y -Achsenausrichtung wie I_1 aufweist. Es ist an y_1 um den Steuerkopfwinkel β gedreht (exakt: um $-(90^\circ - \beta)$), sodass die z_2 -Achse in der Lenkachse liegt.

Lenkersystem I_3 :

Im selben Punkt P_A liegt das KSYS I_3 . Es ist lenkerfest ($z_2 = z_3$) und gegenüber I_2 um den Winkel φ an der z_2 -Achse gedreht.

Hinterradsystem I_4 :

In der Radnabe des Hinterrades liegt das nicht mitdrehende Hinterradsystem I_4 . Wie das Rahmensystem ist seine Lage und Verdrehung vom Kippwinkel κ abhängig.

Vorderradsystem I_5 :

Das Vorderradsystem I_5 liegt in der Radnabe des Vorderrades. Es hat die gleiche Achsenausrichtung wie das Lenkersystem I_3 .

2.4 Koordinatentransformation

2.4.1 Transformationsmatrizen

Mittels homogener Transformationsmatrizen kann ein Ortsvektor $\mathbf{r}_P$ in ein anderes Koordinatensystem überführt werden. Eine Transformationsmatrix baut sich dabei nach folgendem Schema auf:

$$T_i^0 = \begin{bmatrix} \text{Rotationsmatrix} & \text{Translationsvektor} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0i}R & {}^{(0)}\mathbf{r}_{0i} \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Die 3x3 Rotationsmatrix wird aufgestellt, der 3x1 Translationsvektor ist der Ortsvektor zwischen den beiden Koordinatensystemen. Die untere Zeile setzt sich zusammen aus 0 0 0 und einem Maßstabsfaktor (in dieser Arbeit immer 1). So erhält man eine quadratische 4x4 Transformationsmatrix, welche bequem mit einer anderen multipliziert werden kann.

$I_0 \rightarrow I_H$:

Das Aufstandpunktsystem ist gegenüber dem Inertialsystem um den Vektor ${}_{(0)}\mathbf{r}_{0H} = (x, 0, 0)^T$ verschoben. Es folgt die Transformationsmatrix

$$T_H^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$I_0 \rightarrow I_1$:

Das rahmenfeste Koordinatensystem I_1 ist gegenüber dem Inertialsystem je nach Fahrsituation um mehrere Winkel verdreht. So erfolgt beim Kippen des Fahrrades eine Drehung des I_1 um den Winkel κ um die x_1 -Achse. Zudem nickt der Rahmen aufgrund der Vorderradgeometrie beim Einlenken leicht nach vorn, was sich in einer Rotation um y bemerkbar macht. Dieser Effekt wird durch Kippen im eingelenkten Zustand noch weiter verstärkt. Die Rotation liegt allerdings im Bereich von weniger als 1° und wird damit hier vernachlässigt. x_1 bleibt damit immer parallel zu x_0 . Für die Rotationsmatrix von I_H zu I_1 gilt also

$${}^{H1}R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Der Schwerpunkt des Rahmens ist für $\varphi = \kappa = 0$ um l_R an der x_H -Achse und h_R an der z_H -Achse gegenüber dem Aufstandpunktsystem verschoben (s. Abb. 2.3). Beim Kippen teilt sich h_R in eine y - und z -Komponente auf. Dabei ist wie bereits

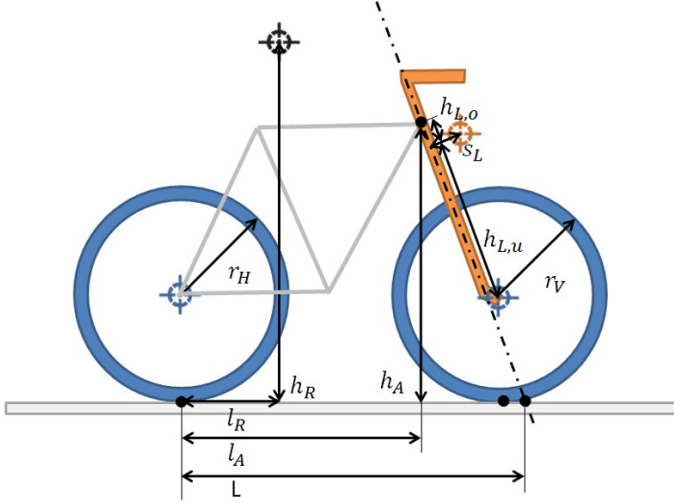


Abb. 2.3 Geometrieparameter

erwähnt h_R eine Funktion des Lenkwinkels φ und des Kippwinkels κ , der Rahmenschwerpunkt senkt sich beim Einlenken in Abhängigkeit vom Kippwinkel ab. Dies hat zur Folge, dass das Gesamtsystem im eingelenkten Zustand eine geringere potentielle Energie aufweist und somit diesen dynamisch instabilen Zustand anstrebt. Für den Ortsvektor zu I_1 , angegeben in I_H , gilt damit

$${}_{(H)}\mathbf{r}_{H1} = \begin{pmatrix} l_R \\ h_R(\varphi, \kappa) \sin \kappa \\ h_R(\varphi, \kappa) \cos \kappa \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

und für die Transformationsmatrix nach Schema (2.1)

$$T_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_R \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa & h_R(\varphi, \kappa) \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa & h_R(\varphi, \kappa) \cos \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Zum Darstellen der Koordinaten im Inertialsystem werden die Transformationsmatrizen multipliziert.

$$T_1^0 = T_H^0 T_1^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_R + x \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa & h_R(\varphi, \kappa) \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa & h_R(\varphi, \kappa) \cos \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$I_0 \rightarrow I_2$:

Das Zwischensystem I_2 ist gegenüber I_1 um den konstanten, bauartbedingten Winkel $\beta - \frac{\pi}{2}$ (β ist Steuereckpfadwinkel) verdreht sowie um den Ortsvektor ${}_{(1)}\mathbf{r}_{12} = (l_A - l_R, 0, h_A - h_R)^T$ verschoben. Der Punkt P_A senkt sich ähnlich wie der Rahmenschwerpunkt, daher ist auch $h_R = f(\varphi, \kappa)$. Die Transformationsmatrix lautet

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\cos \beta & l_A - l_R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \beta & 0 & \sin \beta & h_A(\varphi, \kappa) - h_R(\varphi, \kappa) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Gibt man die direkte Transformationsmatrix des Inertialsystems zu I_2 an, entfällt h_R .

$$T_2^0 = T_1^0 T_2^1 = \begin{bmatrix} \sin \beta & 0 & -\cos \beta & l_A \\ \cos \beta \sin \kappa & \cos \kappa & \sin \beta \sin \kappa & h_A(\varphi, \kappa) \sin \kappa \\ \cos \kappa \cos \beta & -\sin \kappa & \sin \beta \cos \kappa & h_A(\varphi, \kappa) \cos \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$I_0 \rightarrow I_3$:

Das KSYS I_3 befindet sich ebenfalls in Punkt P_A , daher ist der Ortsvektor ${}_{(2)}\mathbf{r}_{23} = (0, 0, 0)^T$. Es erfolgt nur eine Rotation um z_2 mit dem Lenkwinkel φ . Es ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3^0 = T_2^0 T_3^2 \quad (2.9)$$

Ab diesem Punkt werden die Gleichungen zu lang, um sie in gedruckter Form darzustellen. Daher sei auf das beiliegende Matlab-Skript verwiesen.

$I_0 \rightarrow I_4$:

Die Transformation zum Hinterradsystem verhält sich ähnlich der zum Rahmensystem. Es erfolgt eine Drehung um κ und eine Verschiebung um den Hinterradradius r_h .

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa & r_h \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa & r_h \cos \kappa \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$I_0 \rightarrow I_5$:

Das KSYS I_5 hat die gleiche Ausrichtung wie das Lenkersystem, ist allerdings um $-h_l$ an der z_3 -Achse und um B an der x_3 -Achse verschoben.

$$T_5^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_5^0 = T_3^0 T_5^3 \quad (2.11)$$

2.4.2 Berechnung der Koordinaten des Punktes P_A

Die Koordinate h_A ist eine Funktion des Fahr- und Kippwinkels. Dieser Effekt ist nicht mit der offensichtlichen Verringerung der z_0 -Rahmenkoordinaten bei reinem Kippen zu verwechseln, welche mit dem Translationsvektor in T_2^0 ${}_{(0)}P_{A,z} = h_A \cos \kappa$ eingebunden ist. Unter $h_A = f(\kappa, \varphi)$ ist vielmehr der Betrag des kürzest möglichen Vektors vom Punkt von P_A zum Boden zu verstehen, welcher in der Rahmenebene liegt. Deutlich wird dies in Abbildung 2.4: Im linken Bild sind Kipp- und Lenkwinkel 0° , der Abstand der Radnabe zum Boden wird durch den Radius r_v definiert. Im rechten Bild ist der Lenker um 90° eingedreht, der Abstand

ist zwar auch hier durch r_v definiert, allerdings ist die Radebene nun um den Winkel $90^\circ - \beta$ gedreht, wodurch die Radnabe nur noch die Höhe $r_v \cdot \cos(90^\circ - \beta)$ aufweist. Wird nun zusätzlich der Kippwinkel variiert, wird der Zusammenhang sehr kompliziert.

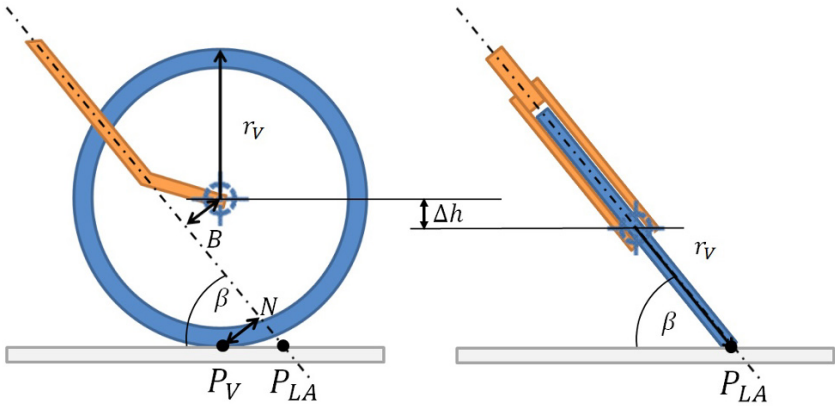


Abb. 2.4 Vorderradgeometrie aus Seitenansicht bei einem Kippwinkel $\kappa = 0^\circ$. Links: Lenkwinkel $\varphi = 0^\circ$. Rechts: $\varphi = 90^\circ$

Ursache hierfür ist die Lenker- und Vorderradgeometrie, welche es zunächst zu untersuchen gilt. Abbildung 2.4 zeigt die für jedes Zweirad übliche Vorderradgeometrie. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Lenkachse, welche im Punkt P_{LA} die Fahrbahnebene schneidet. Der Punkt P_V markiert den Aufstandspunkt des Vorderrades. Entgegen der weitläufigen Definition, dass der Radstand L der Abstand der beiden Aufstandspunkte (P_H, P_V) ist, soll er in dieser Arbeit den konstanten Abstand zwischen Aufstandspunkt des Hinterrades P_H und Punkt P_{LA} kennzeichnen (Abb. 2.3). Die Kröpfung B der Vorderradgabel ist der Abstand des Radmittelpunktes zur Lenkachse. β ist der bereits erwähnte konstante Steuerradwinkel.

Der lotrechte Abstand des Aufstandspunktes P_V zur Lenkachse ist der Nachlauf $N = f(\varphi, \kappa)$. Diese Funktion wurde von Zeller [3] analytisch hergeleitet.

$$N(\varphi, \kappa) = B - r_v \frac{K}{\sqrt{K^2 + \sin^2 \beta}} \quad (2.12)$$

mit

$$K = \cos \varphi \cos \beta - \tan \kappa \sin \varphi \quad (2.13)$$

Negative Vorzeichen für N bedeuten Nachlauf, der Radaufstandspunkt P_V liegt in hinter der Lenkachse, wie in Abbildung 2.3 und 2.4 dargestellt. Positive N kennzeichnen Vorlauf.

Die Höhe h_A ergibt sich aus der Bedingung, dass das Vorderrad in jeder Lenk- und Kippelage auf der Fahrbahn aufsitzt. Rechnerisch bedeutet dies, dass der Punkt P_V im Inertialsystem die z_0 -Koordinate 0 haben muss. Es gilt

$$\begin{pmatrix} P_{Vx} \\ P_{Vy} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_3^0 \begin{pmatrix} {}^{(3)}\mathbf{r}_{P_V} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

mit ${}^{(3)}\mathbf{r}_{P_V}$ als Ortsvektor des Aufstandspunktes des Vorderrades im lenkerfesten I_3 Koordinatensystem. Dieser ergibt sich aus der vektoriellen Summe der Gabellänge h_L , dem Nachlauf und einer Strecke l (in Abbildung 2.4 die Strecke auf der Lenkachse zwischen deren Schnittpunkten mit B bzw. N).

$${}^{(3)}\mathbf{r}_{P_V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{r_v^2 - (B - N)^2} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Aus der dritten Zeile des Gleichungssystems (2.14) erhält man für $\kappa = \varphi = 0$ nach einigem Umstellen den auch in Abbildung 2.3 ablesbaren Zusammenhang

$$h_{A,0} = h_L \sin \beta - B \cos \beta + r_v \quad (2.16)$$

Für den vom Lenk- und Kippwinkel abhängigen Teil ergibt sich

$$\Delta h_A(\kappa, \varphi) = NK - \sin \beta \sqrt{r_v^2 - (B - N)^2} - B \cos \beta + r_v \quad (2.17)$$

Werden fahrradübliche Parameter eingesetzt ($r_v = 0.33 \text{ m}$, $B = 0.06 \text{ m}$, $\beta = 75^\circ$) beträgt die Absenkung des Punktes P_A mit Lenk- und Kippwinkeln im Bereich von $\pm 20^\circ$ weniger als 1 cm. Da selbst bei Radrennen kaum solche Kippwinkel erreicht

werden, und auch dann die Höhendifferenz minimal bleibt, wird h_a im weiteren Verlauf als konstant angenommen. Es wird die in Gleichung (2.16) aufgestellte Beschreibung des Punktes $h_{A,0}$ genutzt.

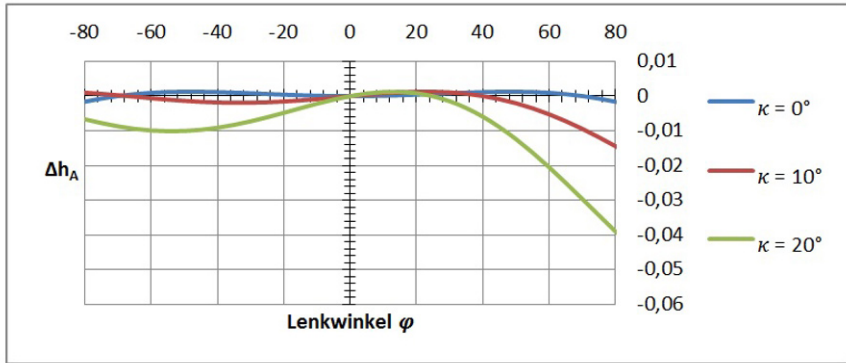


Abb. 2.5 h_A (in m) als Funktion des Lenkwinkels φ mit verschiedenen konstanten Kippwinkeln κ

Dasselbe gilt auch für die Schwerpunkthöhe des Rahmens h_R . Da die bei der Absenkung beider KSYS (I_1 und I_2) beteiligte Drehachse die Hinterradachse ist, stehen die Änderungen der Höhenkoordinaten im festen Zusammenhang

$$\Delta h_R = \Delta h_A \frac{l_R}{l_A} \quad (2.18)$$

Wie h_A ergibt sich auch der Parameter l_A aus anderen Geometrieparametern. Am einfachsten kann man ihn anhand des Radstandes definieren. Aus Abbildung 2.3 lässt sich leicht ablesen

$$\tan \beta = \frac{h_A}{L - l_A} \quad (2.19)$$

Mit Gleichung (2.16) ergibt sich

$$l_A = L - h_L \cos \beta - \frac{r_v - B \cos \beta}{\tan \beta} \quad (2.20)$$

2.5 Ortsvektoren

Mithilfe der Koordinatentransformation können nun die Ortsvektoren im Inertialsystem angegeben werden. Exemplarisch wird der Ortsvektor des Rahmens berechnet, da ein Großteil der übrigen Gleichungen für eine Darstellung an dieser Stelle zu umfangreich ist.

$${}_{(0)}\mathbf{r}_R = T_1^0 {}_{(1)}\mathbf{r}_R = T_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_R + x \\ h_R \sin \kappa \\ h_R \cos \kappa \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Zur Verwendung von Jacobimatrizen müssen zuvor die generalisierten Koordinaten festgelegt werden. Diese spiegeln die Freiheitsgrade des Systems wieder und sind im Modell der Kippwinkel κ (positiv bei kippen nach links), der Lenkwinkel φ (positiv bei lenken nach links) und der zurückgelegte Weg x .

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \kappa \\ \varphi \\ x \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\kappa} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{\kappa} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Die Jacobimatrix entsteht durch Ableiten des Ortsvektors nach den generalisierten Koordinaten. In Matlab steht hierfür auch die Funktion *jacobian(r,q)* zur Verfügung. Für den Rahmen wird errechnet

$$J_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ h_R \cos \kappa & 0 & 0 \\ -h_R \sin \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad {}_{(0)}\dot{\mathbf{r}}_R = J_R \dot{\mathbf{q}} \quad (2.23)$$

2.6 Rotationsvektoren

Zusätzlich zu den translatorischen Jacobimatrizen müssen die rotatorischen Matrizen bestimmt werden. Diese ergeben sich aus den Rotationsvektoren der einzelnen Körper, abgegeben im Inertialsystem. Als Beispiel wird das Hinterrad hergeleitet. Dieses dreht sich im eigenen Koordinatensystem I_4 um die y_4 -Achse, sowie im

Zur späteren Bestimmung der Zentripetalkraft ist die Untersuchung der bei der Kreisfahrt auftretenden geometrischen Abhängigkeiten erforderlich. Abbildung 2.6 veranschaulicht die Position wichtiger Punkte beim Lenken. Das Aufstandspunktsystem befindet sich gemäß Abbildung 2.2 im Aufstandspunkt P_H des Hinterrades. Der Lenkachsenschnittpunkt mit dem Boden (P_{LA}) liegt bei den Koordinaten ${}_{(H)}r_{p_{pv}} = (L, 0, 0)^T$. Der Aufstandspunkt des Vorderrades lässt sich in Abhängigkeit von Lenk- und Kippwinkel aus Gleichung (2.14) errechnen. Die Verbindungslinie $\overline{P_V P_{LA}}$ (=auf Fahrbahn projizierter Nachlauf) gibt bei schlupffreier Bewegung die Fahrrichtung des Vorderrades an, welche durch den Fahrwinkel δ beschrieben wird. Dessen Berechnung kann über den Zusammenhang

$$\tan \delta = \frac{{}_{(0)}P_{V_y}}{{}_{(0)}P_{V_x}} \quad (2.26)$$

erfolgen und führt letztendlich auf die auch von Zeller [3] gefundene Gleichung

$$\delta = \arctan \left(\frac{\tan \varphi \sin \beta}{\cos \kappa - \cos \beta \sin \kappa \tan \varphi} \right) \quad (2.27)$$

Der projizierte Nachlauf ist im Vergleich zu den anderen Strecken der Skizze vernachlässigbar klein, so dass zur weiteren Betrachtung der Punkt P_V in P_{LA} gelegt werden kann. Aus den sich nun ergebenden Dreiecken lassen sich leicht die geometrischen Zusammenhänge ablesen:

$$r_{M,V} = \frac{L}{\sin \delta} \quad (2.28)$$

$$r_{M,H} = \frac{L}{\tan \delta} \quad (2.29)$$

$$r_{M,S} = \sqrt{\left(\frac{L}{\tan \delta} \right)^2 + l_R^2} \quad (2.30)$$

Da zum Beschreiben einer Rechtskurve negative Radien notwendig sind, kann Gleichung (2.30) nicht verwendet werden. Eine alternative Berechnung findet sich mittels Verwendung des Winkels δ_R .

$$r_{M,S} = \frac{l_R}{\sin \delta_R} \quad (2.31)$$

Mit

$$\frac{\tan \delta_R}{\tan \delta} = \frac{l_R}{L} \quad (2.32)$$

ergibt sich

$$r_{M,S} = \frac{l_R}{\sin(\arctan(l_R/L \tan \delta))} \quad (2.33)$$

Da zu jedem Zeitpunkt die Winkelgeschwindigkeit ω aller Fahrradbauteile konstant ist, kann über die Beziehung $v = \omega r$ die jeweilige körpereigene Bahngeschwindigkeit bestimmt werden. So können die Geschwindigkeiten der beiden Räder in eine holonome Abhängigkeit gebracht werden:

$$v_V = v_H \frac{r_{M,V}}{r_{M,H}} = \frac{v_H}{\cos \delta} \quad (2.34)$$

$$v_S = v_H \frac{r_{M,S}}{r_{M,H}} = v_H \frac{l_R}{L} \frac{\tan \delta}{\sin(\arctan(l_R/L \tan \delta))} \quad (2.35)$$

Laut getroffener Definition ist die Fahrgeschwindigkeit des Fahrrades $\dot{x}$ die Geschwindigkeit des Hinterrades v_H .

2.8 Gelenktes Fahren

Ein Zweirad ist naturgemäß ein instabiles System. Es ist bestrebt, seine innewohnende potentielle Energie zu minimieren. Dies wird durch die Verringerung der Höhenkoordinaten erreicht, das Fahrrad kippt um. Die praktische Erfahrung zeigt, dass es dennoch möglich ist, sich auf einem Zweirad aufrecht fortzubewegen. Grund dafür ist hauptsächlich die Zentrifugalkraft. Sie entsteht durch die Trägheit des Fahrrades beim Durchfahren einer Kurve. Sie wirkt auf jeden Schwerpunkt mit der Masse m aus Richtung Kreismittelpunkt mit dem Betrag

$$F_Z = m\omega^2 r \quad (2.36)$$

Ist ein bewegtes Fahrrad nach links gekippt und durchfährt dabei eine Linkskurve, wirkt die Zentrifugalkraft dem Kippen entgegen. In stabiler Kurvenfahrt gilt

$$\frac{F_Z}{\sin \kappa} = \frac{F_G}{\cos \kappa} \quad (2.37)$$

$$\kappa = \arctan \frac{v_R^2}{g r_{M,S}} \quad (2.38)$$

Für jede Fahrgeschwindigkeit v_R kann in Abhängigkeit vom Kurvenradius $r_{M,S}$ ein stabiler Fahrzustand mit dem Kippwinkel κ erreicht werden. So kann ein Fahrradfahrer mit etwas Übung prinzipiell jedes Zweirad steuern: droht es nach links zu kippen, stellt er die korrekte Lenkerstellung nach links ein, vice versa. Hier wird klar, dass es mit einem Zweirad unmöglich ist, eine gerade Strecke zurückzulegen. Dies wird insbesondere beim Betrachten von Fahrradspuren im Winter deutlich.

2.9 Freihändig Fahren

Beim ungesteuerten Fahren ist der zugrunde liegende physikalische Zusammenhang derselbe: zu jedem Kippwinkel gibt es einen korrespondierenden Lenkwinkel, welcher eine stabile Kurvenfahrt ermöglicht. Allerdings ist ein Fahrrad auch ohne Steuerung durch einen Fahrer in der Lage, selbsttätig den korrekten Lenkwinkel zu regeln. Dieser Vorgang nennt sich Selbststabilisierung. Bestand noch bis vor wenigen Jahren die weitläufige Meinung, dass nur ein Zusammenspiel gyroskopischer Effekte und Nachlauf ein Fahrrad stabilisieren, ist es einer Gruppe von Physikern und Konstrukteuren gelungen, ein stabiles Zweirad unter Ausschluss beider Effekte zu entwickeln [5]. Stabilisierend wirkt hier der weit vorn angeordnete Rahmenschwerpunkt. Es sind also eine Vielzahl Parameter, die das Fahrverhalten beeinflussen. Im weiteren Verlauf soll versucht werden, die wichtigsten angreifenden Kräfte und Momente zu benennen, rechnerisch zu erfassen und im Modell zu integrieren.

2.10 Konservative Kräfte

Man unterteilt in konservative und nichtkonservative Kräfte. Erstere verrichten längs einer geschlossener Bahnkurve keine Arbeit. Hierzu gehören in mechanischen Systemen hauptsächlich potentielle Lagekräfte (Gewichtskraft) und Federkräfte. Da im betrachteten MKS von ideal starrem Materialverhalten ausgegan-

gen wird, treten keine Federkräfte auf. Um auch Anstiege und Gefälle simulieren zu können, wird ein Steigungswinkel α eingeführt, um den die angreifenden Gewichtskräfte rotiert werden. Damit wirkt ein Teil der Gewichtskraft als Hangabtriebskraft. Im folgenden wird ausführlich die Berechnung der Gewichtskraft für den Rahmen gezeigt. Alle anderen Gewichtskräfte werden nach der gleichen Vorgehensweise ermittelt und sind dem Matlab-Skript zu entnehmen. Im ersten Schritt werden die Anteile der Kräfte im mitbewegten Rahmensystem ermittelt. Im aufrechten Zustand wirkt die komplette Gewichtskraft entgegen der z_1 -Achse. In diesem Fall existiert für das Fahrrad kein Kippmoment und es steht im labilen Gleichgewicht. Jede seitliche Störung bringt es zum Kippen.

$${}_{(1)}\mathbf{F}_{G,Rahmen}(\kappa = \alpha = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g m_R \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Nun wird der Anstieg α eingearbeitet. Ein positives α soll einen Anstieg beschreiben, die Hangabtriebskraft wirkt also entgegen der x_1 -Achse.

$${}_{(1)}\mathbf{F}_{G,Rahmen}(\kappa = 0, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g m_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g m_R \sin \alpha \\ 0 \\ -g m_R \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Wird nun der Kippwinkel κ involviert, teilt sich die z_1 -Komponente auf.

$${}_{(1)}\mathbf{F}_{G,Rahmen}(\kappa, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & -\sin \kappa \\ 0 & \sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -g m_R \sin \alpha \\ 0 \\ -g m_R \cos \alpha \end{pmatrix} = g m_R \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \kappa \\ -\cos \alpha \cos \kappa \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Der Kraftvektor muss nun in das Inertialsystem überführt werden. Dafür kann die bereits ermittelte Rotationsmatrix (2.3) genutzt werden.

$${}_{(0)}\mathbf{F}_{G,Rahmen}(\kappa, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} {}_{(1)}\mathbf{F}_{G,Rahmen}(\kappa, \alpha) = g m_R \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Im Ergebnis erkennt man die klassische Aufteilung einer Gewichtskraft in eine Normalkraft und eine Hangabtriebskraft. Um eine generalisierte Kraft zu erhalten, wird im letzten Schritt die Transponierte der Jacobimatrix des Kraftangriffspunktes (=Schwerpunkt des Rahmens, Gleichung (2.23)) mit dem Kraftvektor (2.42) multipliziert. Dieser Ausdruck kann später direkt in die Bewegungsgleichungen übernommen werden.

$$\mathbf{Q}_{F_G, \text{Rahmen}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ h_R \cos \kappa & 0 & 0 \\ -h_R \sin \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} -g m_R \sin \alpha \\ 0 \\ -g m_R \cos \alpha \end{pmatrix} = g m_R \begin{pmatrix} h_R \cos \alpha \sin \kappa \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Die einzelnen Vektoren spiegeln dabei Kräfte bzw. Momente wider, welche eine Änderung der jeweiligen generalisierten Koordinate hervorrufen. Festgelegt durch die Reihenfolge der Freiheitsgrade in $\mathbf{q}$ (Gl. 2.22) steht die erste Zeile für den Kippwinkel κ , die zweite für den Lenkwinkel φ und die dritte für die Wegkoordinate x . So bewirkt ein positiver Kippwinkel (positiv = links) in Gleichung (2.43) ein Drehmoment, welches den Kippwinkel weiter erhöht. Ein positiver Steigungswinkel α bewirkt eine Kraft entgegen der Fahrtrichtung und damit eine Verringerung der Fahrgeschwindigkeit.

2.11 Nichtkonservative Kräfte

2.11.1 Zentrifugalkraft

Neben den Gewichtskräften gibt es eine Reihe weiterer Kräfte, die das Fahrverhalten eines Zweirades beeinflussen. Wie bereits erwähnt, ist die wichtigste wohl die Zentrifugalkraft, da sie ein Umkippen verhindert und das Fahren überhaupt erst ermöglicht. Die Berechnungsvorschrift wurde in Gleichung (2.36) bereits eingeführt. ω ist die Kurvenwinkelgeschwindigkeit und ergibt sich aus der Hinterradgeschwindigkeit $\dot{x}$ und dem Kurvenradius $r_{M,H}$ zu

$$\omega = \dot{x} \frac{\tan \delta}{L} \quad (2.44)$$

Mit dem Kurvenradius des Rahmenswerpunktes (Gleichung (2.33)) ergibt sich für die Zentrifugalkraft des Rahmens, angegeben im Inertialsystem,

$${}_{(0)}\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal,Rahmen}} = m_R \omega^2 \frac{l_R}{\sin \delta_R} \begin{pmatrix} \sin \delta_R \\ -\cos \delta_R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

δ und δ_R sind dabei Funktionen von κ und φ (Gl. (2.27), (2.32)). Wie die Gewichtskräfte werden auch die Zentrifugalkräfte generalisiert weiterverarbeitet. Dazu wird wieder die Transponierte der Jacobimatrix des Kraftangriffspunktes mit dem Kraftvektor multipliziert.

$$\mathbf{Q}_{\text{Zentrifugal,Rahmen}} = \mathbf{J}_R^T {}_{(0)}\mathbf{F}_{\text{Zentrifugal,Rahmen}} \quad (2.46)$$

2.11.2 Kontaktkraft am Vorderrad

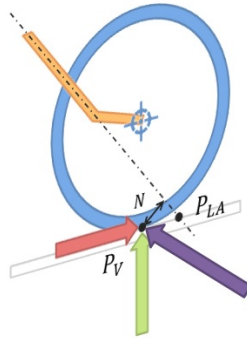


Abb. 2.7 Kräfte am vorderen Aufstandspunkt P_V . Normalkräfte (Pfeil nach oben), Längskräfte (Pfeil nach rechts), Querkräfte (Pfeil nach links oben)

Eine weitere für die Fahrdynamik relevante Kraft ist die Kontaktkraft am Aufstandspunkt des Vorderrades P_V (Abb. 2.7). Diese bildet über den Nachlauf als Hebel ein Drehmoment auf die Lenkachse und wirkt damit direkt auf die Lenkerstellung und die Fahrdynamik. In Gleichung (2.47) sind die Komponenten in

einem Aufstandspunkt-eigenem KSYS dargestellt:

$${}_{(P_V)}\mathbf{F}_{\text{Kontakt,vorn}} = \begin{pmatrix} F_{\text{Laengs}} \\ F_{\text{Quer}} \\ F_{\text{Normal}} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

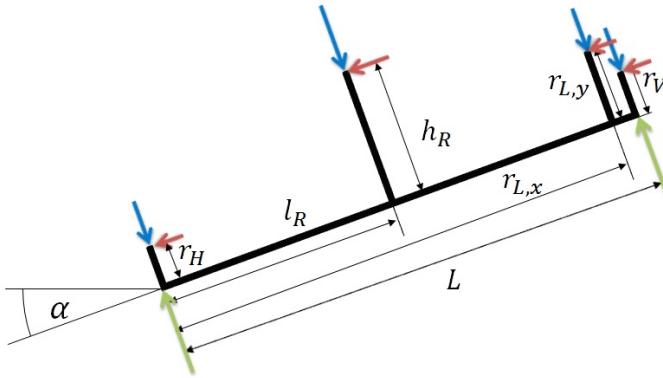


Abb. 2.8 Berechnungsmodell der Normalkräfte. Normalgewichtskräfte F_y (Pfeile nach unten), resultierende „Nickkraft“ F_x (Pfeile nach links)

Normalkraft

Es ist zweckmäßig mit der Berechnung der Normalkraft zu beginnen. Sie ist die Gegenkraft zur Gewichtskraft, abzüglich der Hangabtriebskraft, und verteilt sich je nach Schwerpunktpositionen auf Vorder- und Hinterrad (Abb. 2.8). Zusätzlich steigt bei Anstiegen und Beschleunigungen die Normalkraft am Hinterrad und die des Vorderrades sinkt. Dies wird mittels der roten Pfeile (Pfeile nach links) in Abbildung 2.8 verdeutlicht, welche die Resultierende aus Hangabtriebskraft und Trägheitskraft darstellen. Diese Kraft ist auch verantwortlich für die Nickbewegung (Einfedern der vorderen Aufhängung) eines Fahrzeuges beim Bremsen.

$$F_y = F_{G,Normal} = mg \cos \alpha \quad (2.48)$$

$$F_x = F_{Hang} - F_{Traeg} = mg \sin \alpha + m\ddot{x} \quad (2.49)$$

Die Aufstandskraft des Vorderrades erhält man nun durch die Bildung einer Drehmomentenbilanz z.B. um den hinteren Aufstandspunkt.

$$F_{Normal,vorn} = \frac{g \cos \alpha \sum_{i=1}^4 m_i l_i - (g \sin \alpha + \ddot{x}) \sum_{i=1}^4 m_i h_i}{L} \quad (2.50)$$

i bezeichnet die einzelnen Schwerpunkte der vier Körper, m_i ihre Massen und l_i bzw. h_i ihren jeweiligen Längs- bzw. Höhenabstand vom hinteren Aufstandspunkt. Die Normalaufstandskraft hat nur eine z Komponente, wodurch sie direkt im Inertialsystem angegeben werden kann.

$${}_{(0)}\mathbf{F}_{Normal,vorn} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{Normal,vorn} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Längskraft

Die Längskraft setzt sich aus einer antreibenden Kraft aus beispielsweise einem Frontmotor und einer abbremsenden Rollreibungskraft mit dem Rollreibungskoeffizienten $c_{r,V}$ zusammen. Die antreibende Kraft kann mit negativem Vorzeichen auch als Bremskraft genutzt werden. Da später das Motormoment einen Eingangsparameter des Modells darstellen soll, wird die Antriebskraft als Moment angegeben.

$$F_{Laengs,vorn} = \frac{M_{vorn}}{r_V} - c_{r,V} F_{Normal,vorn} \quad (2.52)$$

Zur Überführung der Kraft ins Inertialsystem muss sie um den Fahrwinkel δ an der z -Achse rotiert werden.

$${}_{(0)}\mathbf{F}_{Laengs,vorn} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{Laengs,vorn} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Querkraft

Die Querkraft ist die Gegenkraft zur Zentrifugalkraft und wird als Zentripetalkraft bezeichnet. Sie berechnet sich ähnlich der Normalkraft aus den Zentrifugalkräften und deren Angriffspunkten. Zu beachten sind die Längskomponenten der Zentrifugalkräfte, welche hier als Bremskraft wirken. Der y_0 -Anteil auf das Vorderrad berechnet sich aus der anteiligen Summe der Queranteile der Zentrifugalkräfte (z.B. für den Rahmen Gleichung (2.45)) nach

$$F_{Zentripetal,vorn,quer} = \frac{\sum_{i=1}^4 F_{Zentrifugal,i,y} l_i}{L} \quad (2.54)$$

Die x_0 -Anteil ist die Summe der Längsanteile der Zentrifugalkräfte.

$$F_{Zentripetal,vorn,laengs} = \sum_{i=1}^4 F_{Zentrifugal,i,x} \quad (2.55)$$

Damit ist direkt der Kraftvektor im Inertialsystem gegeben. Da hier die Gegenkräfte angreifen, muss ein negatives Vorzeichen gesetzt werden.

$${}_{(0)}\mathbf{F}_{Zentripetal,vorn} = \begin{pmatrix} -F_{Zentripetal,vorn,laengs} \\ -F_{Zentripetal,vorn,quer} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Generalisierte Kraft

Die Kontaktkraft wird wie jede andere Kraft generalisiert.

$$\mathbf{Q}_{Kontakt,Vorn} = J_{PV}^T \begin{pmatrix} F_{Laengs,vorn} \cos \delta - F_{Zentripetal,vorn,laengs} \\ F_{Laengs,vorn} \sin \delta - F_{Zentripetal,vorn,quer} \\ F_{Normal,vorn} \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

2.11.3 Kontaktkraft am Hinterrad

Für den Kontaktpunkt des Hinterrades sind nur Kräfte in Längsrichtung interessant. Diese werden in Analogie zu Gleichung (2.52) mit

$$F_{Laengs,hinten} = \frac{M_{hinten}}{r_H} - c_{r,H} F_{Normal,hinten} \quad (2.58)$$

berechnet. Die hierzu notwendige Normalkraft kann über folgende Beziehung berechnet werden:

$$F_{Norm,hinten} = F_{Norm,gesamt} - F_{Norm,vorn} = g \cos \alpha (m_V + m_R + m_L + m_H) - F_{Norm,vorn} \quad (2.59)$$

Für die generalisierte Kraft gilt

$$\mathbf{Q}_{Kontakt,Hinten} = J_H^T \begin{pmatrix} F_{Laengs,hinten} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

2.11.4 Luftwiderstand

Während der Bewegung wirkt auf jedes Fahrzeug der Strömungswiderstand der Luft. Die Kraft wirkt der Fahrtrichtung entgegen und beträgt

$$F_{Luft} = \frac{1}{2} c_{w,Fzg} A_{Fzg} \rho \dot{x}^2 \quad (2.61)$$

$c_{w,Fzg}$ ist der Luftwiderstandsbeiwert des Systems, A_{Fzg} seine Frontalfläche, ρ die Dichte der Luft und $\dot{x}$ die aktuelle Geschwindigkeit. Vereinfachend wird als Kraftangriffspunkt der Schwerpunkt des Hauptkörpers angenommen. Damit ergibt sich als generalisierte Kraft

$$\mathbf{Q}_{Luft} = J_R^T \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} c_{w,Fzg} A_{Fzg} \rho \dot{x}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie ist $I_{xx,v}$ gleich $I_{zz,v}$. Die Rotation des Rades wird von der Führungsbewegung der Fahrradgabel überlagert.

$$\omega_F = \begin{pmatrix} -\dot{\kappa} \sin \beta \\ 0 \\ \dot{\phi} + \dot{\kappa} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Die daraus entstehenden Kreismomente ergeben sich nach [24] mit

$$\mathbf{M}_{Rad} = \mathbf{L}_{Rad} \times \omega_F = I_{yy,v} \frac{\dot{x}}{r_v} \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \dot{\kappa} \cos \beta \\ 0 \\ \dot{\kappa} \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Ein Kippen nach links ($\dot{\kappa} > 0$) bewirkt demnach ein positives Drehmoment an der z_5 -Achse, ein Lenken nach links. Gleichzeitig bewirkt dieses Lenken ($\dot{\phi} > 0$) ein positives Moment in der x_5 -Achse, was einem Kippen nach rechts, also in Richtung der Ausgangsposition, gleichkommt. Durch Multiplikation der Jacobimatrix der Rotation für das Vorderrad mit der gefundenen Momentengleichung erhält man die im Modell genutzte generalisierte Gleichung.

Rad mit Direktläufer

Von besonderem Interesse ist der Effekt eines in der Vorderradnabe verbauten Elektromotors, welcher die gleichen Bewegungen wie das Vorderrad durchläuft und damit ebenso Kreismomente erzeugt. Die Berechnung erfolgt analog zum Rad im selben radlagerfesten Koordinatensystem.

$$\mathbf{M}_{Direktmotor} = \mathbf{L}_{Direktmotor} \times \omega_F = I_{yy,M} \omega_{M,Motor} \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \dot{\kappa} \cos \beta \\ 0 \\ \dot{\kappa} \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

$\omega_{M,Motor}$ ist die mechanische Winkelgeschwindigkeit des Motors, welche beim Direktläufer in Betrag und Drehsinn gleich der Raddrehzahl ist. $I_{yy,M}$ ist das Trägheitsmoment des Läufers um seine Längsachse bezogen auf den Schwerpunkt. Das vom Vorderrad ausgehende Kreismoment beträgt bei Direktläufermotoren damit

$$\mathbf{M}_{Direkt} = \mathbf{M}_{Direktmotor} + \mathbf{M}_{Rad} = (I_{yy,M} + I_{yy,v}) \frac{\dot{x}}{r_v} \begin{pmatrix} \phi + \kappa \cos \beta \\ 0 \\ \kappa \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Zusammengefasst wird beim Direktläufer das Trägheitsmoment des Rades mit dem des Läufers addiert. Die Kreismomente werden also stärker, was zu einem stabileren Fahrverhalten, aber auch zu einem erschwerten Lenken führt.

$$I_{Ersatz,Direkt} = I_{yy,v} + I_{yy,M} \quad (2.68)$$

Rad mit Getriebemotor

Neben den relativ großen Direktläufern haben sich auch mit einem Planetengetriebe verbundene Elektromotoren etabliert. Der Planetenradträger ist dabei blockiert, so dass sich der Läufer in einem dem Rad entgegengesetztem Drehsinn bewegt. Mit z_{Motor} als Getriebeübersetzung gilt für die mechanische Drehzahl eines Getriebeabennmotors damit

$$\omega_{M,Motor} = -z_{Motor} \frac{\dot{x}}{r_v} \quad (2.69)$$

Das entstehende Kreismoment im radlagerfesten System ist

$$\mathbf{M}_{Getriebemotor} = -I_{yy,M} z_{Motor} \frac{\dot{x}}{r_v} \begin{pmatrix} \phi + \kappa \cos \beta \\ 0 \\ \kappa \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

womit für diesen Antriebstyp das komplette vom Rad ausgehende Kreismoment

$$\mathbf{M}_{Getriebe} = \mathbf{M}_{Getriebemotor} + \mathbf{M}_{Rad} = (I_{yy,v} - z_{Motor} I_{yy,M}) \frac{\dot{x}}{r_v} \begin{pmatrix} \phi + \kappa \cos \beta \\ 0 \\ \kappa \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

beträgt.

Beim Getriebemotor wird das Produkt aus Läuferträgheitsmoment und Getriebeübersetzung (üblicherweise $z_{Motor} \gg 1$) vom Trägheitsmoment des Rades sub-

trahiert, was die Selbststabilisierung des Fahrrades negativ beeinflusst.

$$I_{\text{Ersatz,Getriebe}} = I_{yy,v} - z_{\text{Motor}} I_{yy,M} \quad (2.72)$$

Wird $(z_{\text{Motor}} I_{yy,M}) > I_{yy,v}$, führt dies zu einer negativen Dämpfung, also zu einem Aufschwingen des Lenkers, was sich im Fahrverhalten sehr deutlich bemerkbar machen wird und unter allen Umständen vermieden werden sollte.

Das angegebene Ersatzträgheitsmoment gilt nur zur Berechnung des Kreiselmomentes des Vorderrades. Das der rotatorischen Beschleunigung entgegen wirkende Trägheitsmoment wird durch Addition der beiden Summanden ermittelt.

Neben Getriebemotoren mit Planetengetrieben gibt es auch Motoren mit zwei-stufigem Getriebe, deren Läufer dieselbe Drehrichtung wie das Rad aufweist. Diese beinhalten zwar auch entgegengesetzt rotierende Zahnräder, deren Anteil am gesamten Trägheitsmoment allerdings vernachlässigbar klein ist. Bei diesen Motoren ändert sich der Operator der obigen Gleichung (2.72) und die beiden Summanden werden nun aufaddiert.

Traktionskonzept für ein Lastenfahrrad

Untersuchung von Fahrverhalten und Antriebsstrang

Bombach, E.

2016, XVI, 143 S. 61 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-16407-2