Erlebnis Algebra

Zahlen, Operationen, Gleichungen und Symmetrien – von der Schulmathematik zur modernen Mathematik

Was dem erwachsenen Mathematiker recht ist –
seine eigenen Begriffe zu erfinden und die anderer nachzuerfinden,
Mathematik nicht als einen Sachbestand, sondern als Tätigkeit zu üben,
ein Feld zu erkunden, Fehler zu machen und von seinen Fehlern zu lernen –,
das soll dem Lernenden von Kindesbeinen an billig sein.
Hans Freudenthal, „Mathematik als pädagogische Aufgabe" (1976)

Einführung

Die Mathematik hat über viele Jahrtausende eine universelle Sprache entwickelt, die besonders geeignet ist, Muster und Strukturen in unserer Vorstellung und in der realen Welt um uns herum zu beschreiben. Zu den Aha-Erlebnissen beim mathematischen Arbeiten – ob als Lernender in der Schule oder Universität, ob als beruflich Mathematiktreibender oder -anwender – zählt dabei die Erfahrung, dass sich viele einzelne Phänomene mit einigen übergreifenden und alles durchdringenden Prinzipien und Konzepten erfassen lassen. Dann erlebt man, dass die Mathematik nicht ein Sammelsurium von Fakten und Regeln ist, sondern ein Kosmos von ästhetischen Strukturen und wiederkehrenden Kernideen: Immer wieder geht es um Operationen, also systematische Beziehungen zwischen Zahlen oder zwischen anderen mathematischen Objekten. Immer wieder geht es um Symmetrien, mit denen man Phänomene des Wiederholens und Gleichbleibens beschreiben kann.

Ein Gebiet der Mathematik, das diesen vereinheitlichenden Blick ganz besonders repräsentiert, ist die Algebra. In der ursprünglichen Bedeutung des arabischen Wortes *al-gabr* geht es um die Rechenverfahren „durch Ergänzen und Ausgleichen" (Lehrbuch von al-Chwarizmi, 825 n. Chr.). Als Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen ist uns diese „klassische Algebra" auch aus der Schule vertraut. Im 19. Jahrhundert hat sich die Algebra aber gewandelt und befasst sich nunmehr als „moderne Algebra" mit Verknüpfungen und ihren Strukturen. Dabei werden Zahlenräume und geometrische Abbildungen nur noch als konkrete Beispiele einer viel allgemeineren Sichtweise betrachtet.

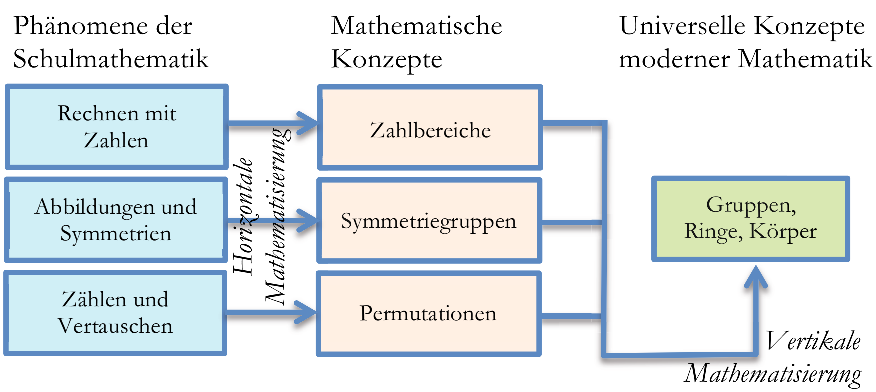
Ziel des Buches ist es, diese moderne Algebra nicht nur systematisch darzustellen (dazu gibt es mittlerweile Hunderte von Lehrbüchern), sondern die *Bedeutung* der Konzepte der modernen Algebra (vor allem von Gruppen, Ringen und Körpern) erlebbar zu machen. Es will Gelegenheit schaffen, die Entstehung dieser Sprache, die mittlerweile die Grundlage der modernen Mathematik darstellt, mitzuerleben und sich aktiv an ihrer Entwicklung zu beteiligen. Den Kern aller Kapitel bilden immer wieder diese Fragen:

(1) Welche Phänomene gibt es in der Welt der Verknüpfungen in der Arithmetik, der Geometrie oder der Kombinatorik und wie kann man sie mathematisch systematisch beschreiben? – Die **aktive Konstruktion mathematischer Konzepte** zur Beschreibung von konkreten Phänomenen nennt man auch „horizontale Mathematisierung“.

(2) Wie mündet diese mathematische Beschreibung in eine universelle Sprache über Verknüpfungen und ihre Strukturen? – Eine solche **Entwicklung einer verallgemeinernden Sprache** bezeichnet man auch als „vertikale Mathematisierung“.

(3) Welches sind die Kernideen und auch die historischen Anlässe für solche Entwicklungen? – Den **Sinn** mathematischer Konzepte versteht man besser, wenn man erleben kann, (1) welche **konkreten Probleme** sie lösen und in welchen Situationen sie nützlich sind, (2) welche Bedeutung sie in der **Geschichte** der Mathematik hatten und (3) wie sie mit der **Schulmathematik** verknüpft sind.

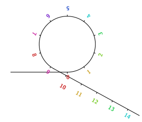
(4) Wie kann man sich die zentralen Konzepte anschaulich vorstellen? – Auch (oder gerade) allgemeine, abstrakte mathematische Ideen brauchen konkrete Beispiele und Erfahrungen und eine Verankerung in anschaulichen Vorstellungen. Daher gründen sich alle Erkundungen und Erklärungen auf **interaktiven Erkundungen** von konkreten Phänomenen und **visuellen Darstellungen**.



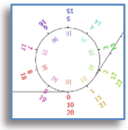
Die Kapitel und Unterkapitel dieses Buches sind so aufgebaut, dass sie sowohl vorlesungsbegleitend als auch zum Selbststudium zu verwenden sind.

Jeder neue Abschnitt beginnt zunächst mit einer Erkundung, die dazu auffordert, ein mathematisches Phänomen zu untersuchen:

Erkundung 3.3: Die ganzen Zahlen stellt man sich in der Regel als Zahlenstrahl vor.



Probieren Sie aus, wie gut sich diese Strategien und Vorstellungen übertragen lassen und wo sie ihre Grenze haben, weil der Zahlenkreis doch anders funktioniert.



→Programm Zahlenstrahl_aufwickeln

Zu den Erkundungen (und auch zu anderen Abschnitten des Buches) gibt es Computerprogramme, die zum einen das interaktive Explorieren unterstützen und zum anderen die mathematischen Konzepte anschaulich visualisieren. Alle Computerprogramme basieren auf der Software *GeoGebra* (Version 5) und *Cinderella* (Version 2). Diese Software ist unter www.geogebra.de bzw. unter www.cinderella.de frei erhältlich und für Windows und MacOS verfügbar. Die jeweiligen Programme und Dateien können Sie als Paket oder einzeln unter www.erlebnis-algebra.de herunterladen.

Im Anschluss an die Erkundungen werden die möglichen Ergebnisse vorgestellt, diskutiert und die sich daraus ergebenden mathematischen Begriffe und Verfahren begründet bzw. hergeleitet. Das Ergebnis dieser ausführlichen Überlegungen sind formale Definitionen, die noch einmal hervorgehoben werden:

Elemente a und b in einem Ring (also einer Struktur mit einer Addition und einer Multiplikation), für die $a \cdot b = 0$ (also das Nullelement der Addition) ist, obwohl weder $a = 0$ noch $b = 0$, heißen *Nullteiler*.

Weitere Anwendungen der neuen Begriffe werden vorgestellt und diskutiert. Übungsaufgaben innerhalb des Kapitelabschnitts und am Ende jedes Kapitels geben Gelegenheit für eine vertiefende Beschäftigung mit den neuen mathematischen Konzepten:

Übung 3.3: Untersuchen Sie die Gleichung $x^2 = a$ in verschiedenen $\mathbb{Z}_n$. Für welche a ist diese Gleichung lösbar? Wann besitzt sie keine, eine oder sogar mehrere Lösungen? Erkennen Sie eine Systematik?

http://www.springer.com/978-3-662-46296-6

Erlebnis Algebra
zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten
Leuders, T.
2016, IX, 264 S. 288 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-46296-6