
2.1 Einführung

Die Newtonschen Gesetze gelten in jedem Inertialsystem. Der Formalismus der klassischen Mechanik ist invariant unter Galilei-Transformationen, und es ist durch die Beobachtung eines dynamischen Systems von Teilchen und anderer Körper nicht möglich zu entscheiden, ob sich ein Bezugssystem in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befindet. In der Welt der klassischen Mechanik gilt daher:

Das Relativitätsprinzip

Es gibt keinen absoluten Ruhe-Maßstab. Nur Relativbewegung ist beobachtbar.

In der Relativitätstheorie wird dieses Prinzip als fundamental zugrunde gelegt, als eine Aussage über das Wesen von Raum und Zeit, so wie auch über die Eigenschaften der Newtonschen Bewegungsgleichungen. Aber wenn ihm eine derart universelle Bedeutung beigemessen wird, dann muss es für die gesamte Physik gelten und nicht nur für die Newtonsche Dynamik. Zunächst scheint dies unproblematisch zu sein – es ist schwer vorstellbar, dass es auf einem solch grundlegenden Niveau gilt, nicht aber für komplexere physikalische Wechselwirkungen. Gleichwohl treten schwerwiegende Probleme auf, wenn wir versuchen, es auf den Elektromagnetismus auszudehnen, denn die Galilei-Transformationen sind mit den Maxwell-Gleichungen nicht vereinbar.

Für Systeme, die langsam bewegte Ladungen und langsam veränderliche elektrische und magnetische Felder beinhalten, scheint alles unkompliziert zu sein. Diese werden durch Gesetze bestimmt, die gegenüber Transformationen zwischen gleichförmig bewegten Bezugssystemen invariant zu sein scheinen. Man kann sich eine moderne Version von Galileis Schiff vorstellen, das auch einige Magnete, Batterien, Halbleiter und andere elektrische Bauelemente mit sich führt. Salvatis Argumentation für das Relativitätsprinzip würde hier genauso überzeugend erscheinen.

Das Problem tritt auf, wenn wir schnell veränderliche Felder einbeziehen – insbesondere, wenn wir die Ausbreitung des Lichts betrachten. Einstein formulierte es so: „Daß die Elektrodynamik Maxwells . . . in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt“ [3]. Die zentrale Schwierigkeit besteht darin, dass die Maxwell'schen Gleichungen Licht, zusammen mit anderen elektromagnetischen Wellen, eine feste Geschwindigkeit zuschreiben: Im leeren Raum breitet es sich in jede Richtung mit derselben Geschwindigkeit aus, unabhängig von der Bewegung der Quelle – eine Tatsache, die mit der Galilei-Invarianz nicht verträglich ist. Licht, das sich in einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit c ausbreitet, sollte die Geschwindigkeit $c + u$ in einem Bezugssystem besitzen, das sich mit Geschwindigkeit u auf die Quelle zu bewegt. Es sollte also möglich sein, dass sich Licht mit jeder beliebigen Geschwindigkeit ausbreitet. Licht, das sich mit Geschwindigkeit c in einem Bezugssystem ausbreitet, in dem die Quelle in Ruhe ist, sollte in einem bewegten Bezugssystem eine andere Geschwindigkeit besitzen; somit würde die Galilei-Invarianz eine Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle implizieren.

In diesem Kapitel sehen wir uns die Maxwell-Gleichungen, die grundlegenden Gleichungen des Elektromagnetismus, und die Lorentzkraft mit dem Ziel an, den Widerspruch zur Galilei-Invarianz klarer zu verstehen. Wir werden uns dann in Kapitel 3 Einsteins Auflösung zuwenden, die darin besteht, das Relativitätsprinzip zu bewahren, aber die Galilei-Transformationen durch die *Lorentz-Transformationen* zu ersetzen.

2.2 Die Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus

Maxwells Glanzleistung war die Formulierung eines konsistenten Systems partieller Differentialgleichungen, das die gesamte Bandbreite bekannter Wechselwirkungen elektrischer und magnetischer Felder mit bewegten Ladungen beschrieb. Seine Gleichungen vereinheitlichten die Behandlung von Elektrizität und Magnetismus, indem sie zum ersten Mal die vollständige Dualität zwischen elektrischen und magnetischen Feldern aufdeckten. Sie wurden für eine beinahe unvorstellbare Vielfalt physikalischer Prozesse bestätigt, ausgehend von der Ausbreitung des Lichts über kosmische Distanzen hinweg, über das Verhalten magnetischer Felder von Sternen und bei den alltäglichen Anwendungen der Elektrotechnik und in Laborexperimenten bis hin – in ihrer Quanten-Version – zum Austausch von Photonen zwischen individuellen Elektronen.

Die Gleichungen bleiben ein wesentlicher Bestandteil der modernen Physik; aber Maxwells Verständnis der Natur elektrischer und magnetischer Felder und die Rolle des „elektromagnetischen Äthers“ hatte keinen Bestand, außer in der archaischen und irreführenden Terminologie, die das Fachgebiet noch immer durchzieht – „magnetischer Fluss“, „Kraftlinien“ und so fort. Wir werden auf diese Angelegenheit bald zurückkommen, da sie zentral ist für den scheinbaren Widerspruch zum Relativitätsprinzip.

2.3 Ladungen, Felder und die Lorentzkraft

Die grundlegenden Objekte der modernen Form der Maxwellschen Theorie sind

- geladene Teilchen und
- die elektrischen und magnetischen Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$, die vektorielle Größen sind und sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen.

Die Ladung e eines Teilchens, die positiv oder negativ sein kann, ist eine immanente Größe, analog zur schweren Masse. Sie bestimmt die Stärke der Wechselwirkung mit elektrischen und magnetischen Feldern – so wie seine Masse die Stärke der Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld bestimmt.

Die Wechselwirkung findet in zwei Richtungen statt. Erstens üben elektrische und magnetische Felder auf ein geladenes Teilchen eine Kraft aus, die von der Größe der Ladung, der Geschwindigkeit des Teilchens und von den Werten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ am Ort des Teilchens abhängt. Die Kraft ist durch das *Lorentzsche Kraftgesetz* gegeben,

$$\mathbf{f} = e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.1)$$

wobei e die Ladung und $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit des Teilchens bezeichnet. Sie ist analog zur Gravitationskraft

$$\mathbf{f} = m \mathbf{g} \quad (2.2)$$

auf ein Teilchen der Masse m im Gravitationsfeld $\mathbf{g}$. Mit Hilfe dieses Kraftgesetzes kann ein Beobachter durch die Messung der Kraft auf eine Standard-Ladung, die sich mit bekannter Geschwindigkeit bewegt, im Prinzip die elektrischen und magnetischen Felder an einem Punkt messen.

Zweitens erzeugen bewegte Ladungen elektrische und magnetische Felder. Über die Formulierung folgender grundlegender Prinzipien hinaus werden wir jetzt noch nicht im Detail die Art und Weise betrachten, wie sie dies tun.

EM1

Die Felder hängen linear von den Ladungen ab.

Dies bedeutet, dass dann, wenn wir zwei Ladungsverteilungen überlagern, die resultierenden $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{B}$ -Felder die Summen der Felder sind, die die beiden Verteilungen jeweils einzeln erzeugen. EM1 wird als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

EM2

Eine stationäre Punktladung e erzeugt ein elektrisches, aber kein magnetisches Feld. Das elektrische Feld ist gegeben durch

$$\mathbf{E} = \frac{k e \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.3)$$

wobei $\mathbf{r}$ der von der Ladung ausgehende Ortsvektor ist, $r = |\mathbf{r}|$, und k ist eine positive Konstante, analog zur Gravitationskonstanten.

Durch Kombination von (2.3) und (2.1) erhalten wir das inverse Abstandsgesetz

$$\mathbf{f} = \frac{k e e' \mathbf{r}}{r^2} \frac{1}{r} \quad (2.4)$$

für die elektrostatische Kraft zwischen zwei stationären Ladungen, die auch *Coulomb-Kraft* genannt wird; anders als bei der Gravitation ist sie abstoßend, wenn die Ladungen dasselbe Vorzeichen besitzen.

EM3

Eine mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegte Punktladung e erzeugt ein Magnetfeld

$$\mathbf{B} = \frac{k' e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.5)$$

wobei k' eine weitere positive Konstante ist.

Dies kann durch Messungen magnetischer Felder, die von in elektrischen Stromkreisen fließenden Strömen erzeugt werden, abgeleitet werden. Die Konstanten k und k' in EM2 und EM3 kennzeichnen die Stärke der elektrischen und magnetischen Wechselwirkung. Sie werden üblicherweise notiert als

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k' = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (2.6)$$

Die Ladung e wird in Coulomb gemessen, $|\mathbf{B}|$ in Tesla und $|\mathbf{E}|$ in Volt pro Meter. Werden die übrigen Größen in SI-Einheiten angegeben, dann gilt

$$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12}, \quad \mu_0 = 1,3 \times 10^{-6}. \quad (2.7)$$

Die Ladung eines Elektrons beträgt $-1,6 \times 10^{-19}$ Coulomb; die Stromstärke in einem Heizstrahler entspricht 5–10 Coulomb pro Sekunde. Die magnetische Feldstärke der Erde beträgt etwa 4×10^{-5} Tesla; die stärksten Stabmagneten können Felder von nahezu einem Tesla erzeugen; im zweiten Stock des Clarendon Laboratory in Oxford gibt es ein Feld

mit etwa 50 Tesla; und das Magnetfeld auf der Oberfläche eines Neutronensterns hat rund 10^8 Tesla.

Obwohl wir die Gravitation im Alltag stärker wahrnehmen, ist sie sehr viel schwächer als die elektrostatische Kraft – die elektrostatische Abstoßung zwischen zwei Protonen ist $1,2 \times 10^{36}$ mal stärker als ihre gravitative Anziehung (bei jedem Abstand – beide Kräfte genügen einem inversen Abstandsquadratgesetz).

Unser Ziel ist, von EM1–EM3 zu den Maxwell-Gleichungen überzugehen, indem die Gleichungen (2.3) und (2.5) durch partielle Differentialgleichungen ersetzt werden, die die Feldstärken zu den Ladungs- und Stromdichten ρ und $\mathbf{J}$ einer stetigen Ladungsverteilung in Beziehung setzen. Diese Dichten werden als Grenzwerte definiert,

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\Sigma e}{V} \right), \quad \mathbf{J} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\Sigma e \mathbf{v}}{V} \right), \quad (2.8)$$

wobei V ein kleines Volumen bezeichnet, das den betrachteten Punkt enthält, auf den es sich im Grenzwert zusammenzieht, und e ist eine Ladung innerhalb des Volumens, die sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt; die Summen werden über die Ladungen in V gebildet, während das Volumen zusammengezogen wird (wobei wir uns um die genauen Einzelheiten des Grenzwert-Prozesses keine allzu großen Gedanken machen werden).

2.4 Stationäre Ladungsverteilungen

Wir beginnen die Aufgabe, die grundlegenden Prinzipien des vorangegangenen Abschnitts in partielle Differentialgleichungen zu konvertieren, mit der Betrachtung des elektrischen Feldes einer stationären Ladungsverteilung. Dabei wird der Übergang zum stetigen Grenzwert mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes, mit dem das inverse Abstandsquadratgesetz umformuliert wird, vorgenommen.

Das Gaußsche Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen dem Integral des elektrischen Feldes über eine geschlossene Oberfläche und der in ihr enthaltenen Gesamtladung. Für eine Punktladung ist das elektrische Feld durch EM2 gegeben:

$$\mathbf{E} = \frac{e \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}.$$

Wegen $\text{div } \mathbf{r} = 3$ und $\text{grad } r = \mathbf{r}/r$ gilt

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div} \left(\frac{e \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3 \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \right) = 0$$

überall, außer bei $r = 0$. Mit dem Gaußschen Integralsatz folgt daraus

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.9)$$

für jede geschlossene Fläche ∂V , die ein Volumen V berandet, das die Ladung nicht enthält.

Und wenn das Volumen die Ladung enthält? Betrachten Sie ein Gebiet, das von einer um die Ladung zentrierten Sphäre S_R vom Radius R berandet wird. Dann hat S_R den nach außen gerichteten Normalenvektor $\mathbf{r}/r$. Deshalb gilt

$$\int_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{e}{4\pi R^2 \varepsilon_0} \int_{S_R} dS = \frac{e}{\varepsilon_0}. \quad (2.10)$$

Insbesondere hängt das Oberflächenintegral auf der linken Seite nicht von R ab.

Betrachten Sie nun ein beliebiges endliches Volumen, das von einer geschlossenen Fläche S berandet wird. Wenn sich die Ladung nicht innerhalb des Volumens befindet, dann verschwindet das Oberflächenintegral von $\mathbf{E}$ über S wegen (2.9). Wenn sich die Ladung aber innerhalb befindet, dann wenden wir (2.9) auf das Volumen V zwischen S und einer kleinen Sphäre S_R um die Ladung an, und wir folgern

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_R} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (2.11)$$

also stimmen die Oberflächenintegrale über S und über S_R überein. Deshalb gilt

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} e/\varepsilon_0 & \text{falls sich die Ladung im durch } S \text{ berandeten Volumen befindet} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Wird über eine beliebige Ladungsverteilung summiert, so sammelt das Integral auf der linken Seite die Gesamtladung innerhalb von S zusammen. Daher gilt das Gauß'sche Gesetz.

Satz 2.1 (Gauß'sches Gesetz) *Sei V ein Volumen, das von einer geschlossenen Fläche ∂V berandet wird. Dann gilt*

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2.13)$$

wobei $\mathbf{E}$ das gesamte elektrische Feld und Q die Gesamtladung innerhalb von V ist.

Nun können wir zum stetigen Grenzwert übergehen. Angenommen, $\mathbf{E}$ wird von einer Ladungsverteilung mit Dichte ρ (Ladung pro Volumeneinheit) erzeugt. Nach dem Gauß'schen Gesetz gilt

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

für jedes Volumen V . Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes führt nun zu

$$\int_V (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\varepsilon_0) dV = 0.$$

Da dies für jedes Volumen gilt, folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0. \quad (2.14)$$

Diese Gleichung besagt, dass Ladungen elektrische Felder erzeugen.

Das elektrische Feld einer einzelnen stationären Ladung e kann als Gradient einer *Potentialfunktion* ϕ geschrieben werden,

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbarer Weg, dann gilt

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b \frac{d}{ds} \phi(\gamma(s)) ds = \phi(\gamma(a)) - \phi(\gamma(b)).$$

Somit hängt das Wegintegral von $\mathbf{E}$ längs γ nur von den Endpunkten von γ ab. Insbesondere erhalten wir für geschlossene Wege

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (2.15)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2.16)$$

denn nach dem Satz von Stokes gilt

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Für eine stetige Ladungsverteilung gilt ebenfalls $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ mit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbf{r}' \in V} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.17)$$

Bei diesem Integral ist $\mathbf{r}$ fest; es ist der Ort, an dem das Potential ϕ ausgewertet wird. Integriert wird über die Positionen $\mathbf{r}'$ innerhalb des Volumens V . Obwohl der Integrand an der Stelle $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ singulär wird, ist das Integral selbst wohldefiniert (siehe Übung 3.3). Daher gelten (2.15) und (2.16) auch für stetige stationäre Ladungsverteilungen.

Somit sind die elektrischen Felder stationärer Ladungsverteilungen *konservative Vektorfelder* in dem Sinne, dass die aggregierte Arbeit, die die Felder an Ladungen verrichten, die entlang geschlossener Wege bewegt werden, verschwindet.

2.5 Die Divergenz des magnetischen Feldes

Wir können dasselbe Argument, mit dem das Gaußsche Gesetz nachgewiesen wurde, auch auf das magnetische Feld einer langsam bewegten Ladung e anwenden. In diesem Fall gilt

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3},$$

wobei $\mathbf{r}$ den Vektor vom Ort der Ladung zum Ort der Messung des Feldes bezeichnet. Wegen $\mathbf{r}/r^3 = -\text{grad}(1/r)$, (11.10) und (11.5) folgt

$$\text{div} \left(\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{v} \cdot \text{rot} \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) = 0.$$

(Es gilt $\text{rot} \mathbf{v} = 0$, denn $\mathbf{v}$, die Geschwindigkeit der Ladung, hängt nicht von $\mathbf{r}$ ab.) Daraus folgt aber $\text{div} \mathbf{B} = 0$ für $\mathbf{r} \neq 0$, wie im Falle des elektrischen Feldes.

Jedoch verschwindet im magnetischen Fall auch das Integral des Feldes über eine Fläche, die die Ladung umgibt, denn ist S_R eine um die Ladung zentrierte Sphäre vom Radius R , dann gilt

$$\int_{S_R} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int_{S_R} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS = 0.$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist dieser Zusammenhang für jedes Volumen, das die Ladung enthält, gültig. Wir schließen, dass für den Fall, dass magnetische Felder nur durch bewegte Ladungen erzeugt werden, für jedes Volumen V gilt

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

so dass also

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.18}$$

folgt. Wenn es dagegen freie „magnetische Pole“ gäbe, die magnetische Felder auf dieselbe Weise erzeugen, wie Ladungen elektrische Felder, dann würde dies nicht gelten; dann gäbe es eine „magnetische Poldichte“ auf der rechten Seite, analog zur elektrischen Ladungsdichte in (2.14).

2.6 Inkonsistenzen mit dem galileischen Relativitätsprinzip

Unser zentrales Anliegen ist die Untersuchung der Verträglichkeit der Gesetze des Elektromagnetismus mit dem Relativitätsprinzip. Wie Albert Einstein hervorhob, hängen einfache elektromagnetische Wechselwirkungen nur von der Relativbewegung ab; der Strom, der in einem sich durch ein Magnetfeld bewegenden Leiter induziert wird, ist gleich dem,

der in einem stationären Leiter hervorgerufen wird, wenn der Magnet am Leiter vorüber geführt wird. Unglücklicherweise spiegelt sich diese Symmetrie nicht in den grundlegenden Prinzipien EM1 – EM3 wider. Wir stoßen sehr schnell auf Widersprüche, wenn wir annehmen, dass sie in jedem Inertialsystem gelten.

Einer tritt wie folgt zutage. Ein Beobachter $\mathcal{O}$ kann die Werte von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ an einem Punkt im Raum dadurch bestimmen, dass er die Lorentzkraft misst, die auf eine sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegende Probeladung e ausgeübt wird,

$$\mathbf{f} = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Ein zweiter Beobachter $\mathcal{O}'$, der sich relativ zu $\mathcal{O}$ mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, misst aufgrund des Relativitätsprinzips dieselbe Beschleunigung, und daher dieselbe Kraft, die aber nun auf ein ruhendes Teilchen wirkt. Daher misst er das elektrische Feld $\mathbf{E}' = \mathbf{f}/e$. Wir schließen, dass ein sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ durch die Felder $\mathbf{B}$ und $\mathbf{E}$ bewegendes Beobachter ein elektrisches Feld $\mathbf{E}'$ sieht, wobei

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.19)$$

gilt. Werden die Rollen der beiden Beobachter vertauscht, dann sollte auch

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad (2.20)$$

gelten, wobei $\mathbf{B}'$ das Magnetfeld ist, das vom zweiten Beobachter gemessen wird. Wenn beides gilt, dann muss $\mathbf{B} - \mathbf{B}'$ ein skalares Vielfaches von $\mathbf{v}$ sein.

Dies ist jedoch nicht verträglich mit EM3; wenn die Felder diejenigen einer relativ zum ersten Beobachter ruhenden Punktladung sind, dann ist $\mathbf{E}$ durch (2.3) gegeben, und es gilt

$$\mathbf{B} = 0.$$

Andererseits sieht der zweite Beobachter das Feld einer Punktladung, die sich mit Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ bewegt, so dass

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (2.21)$$

gilt. Also ist $\mathbf{B} - \mathbf{B}'$ orthogonal, und nicht parallel, zu $\mathbf{v}$.

Dieser offensichtliche Widerspruch wird zum Teil durch die Erkenntnis aufgelöst, dass EM3 nicht exakt gilt, sondern nur dann, wenn die Geschwindigkeiten klein genug sind, so dass die magnetische Kraft zwischen zwei Teilchen gegenüber der elektrostatischen Kraft vernachlässigt werden kann. Ist v eine typische Geschwindigkeit, dann lautet die Bedingung, dass $v^2 \mu_0$ viel kleiner als $1/\epsilon_0$ sein sollte. Dies bedeutet, dass die betreffenden Geschwindigkeiten viel kleiner als

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

sein sollten. Wir werden später sehen, dass c die Lichtgeschwindigkeit ist.

2.7 Die Grenzen der Galilei-Invarianz

Unsere grundlegenden Prinzipien müssen nun als Näherungen angesehen werden – sie beschreiben die Wechselwirkungen von Teilchen und Feldern, wenn sich die Teilchen relativ zueinander mit Geschwindigkeiten bewegen, die sehr viel kleiner sind als die des Lichts. Um zu betonen, dass wir insbesondere nicht erwarten können, dass EM3 für Teilchen gilt, die sich mit Geschwindigkeiten vergleichbar mit c bewegen, müssen wir es ersetzen durch

EM3'

Eine sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegendes Ladung erzeugt für $v \ll c$ ein magnetisches Feld

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} + O(v^2/c^2). \quad (2.22)$$

Für das magnetische Feld eines beliebig bewegten Systems von Ladungen gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.23)$$

Im zweiten Teil halten wir mit (2.23) an der differentiellen Form der Aussage fest, dass es keine freien magnetischen Monopole gibt; das magnetische Feld wird nur durch die Bewegung von Ladungen erzeugt. Mit dieser Änderung ist die Theorie mit dem Relativitätsprinzip konsistent, vorausgesetzt, wir ignorieren Terme der Ordnung v^2/c^2 . Die Ersetzung von EM3 durch EM3' löst das offensichtliche Paradoxon auf; die von Einstein bemerkte Symmetrie zwischen dem Strom, der durch die Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Feld erzeugt wird und dem, der durch die Bewegung eines Magneten über einen Leiter hinweg entsteht, ist erklärt, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten viel kleiner sind als die des Lichts.

Das grundlegende Problem bleibt jedoch bestehen; die Gleichungen des Elektromagnetismus sind für mit c vergleichbare Geschwindigkeiten nicht invariant gegenüber Galilei-Transformationen. Das Paradoxon ist immer noch vorhanden, aber es ist subtiler, als es auf den ersten Blick zu sein schien. Es gibt drei mögliche Auswege: Entweder ist die Nicht-Invarianz real und verursacht beobachtbare Effekte (notwendigerweise von der Ordnung v^2/c^2 oder kleiner) oder die Maxwell'sche Theorie ist falsch oder die Galilei-Transformationen sind falsch. Überraschenderweise werden wir den letzten Weg einschlagen. Aber damit greifen wir vor. Zunächst müssen wir die Ableitung der Maxwell-Gleichungen abschließen.

2.8 Das Induktionsgesetz von Faraday

Das magnetische Feld einer langsam bewegten Ladung wird im Vergleich zu seinem elektrischen Feld stets klein sein (selbst wenn wir $\mathbf{B}$ durch $c\mathbf{B}$ ersetzen, um es in denselben Einheiten wie $\mathbf{E}$ auszudrücken). Die von in elektrischen Stromkreisen fließenden Strömen

erzeugten magnetischen Felder werden dennoch nicht von großen elektrischen Feldern dominiert. Dies liegt daran, dass die Ströme durch einen Fluss mit geringer Geschwindigkeit fließender Elektronen erzeugt werden, während die Materie innerhalb des Drahtes im Großen und Ganzen elektrisch neutral ist, wobei sich die elektrischen Felder der positiv geladenen Kerne und die der negativ geladenen Elektronen gegenseitig aufheben.

Dies ist der physikalische Zusammenhang, der bei der folgenden Ableitung des Faradayschen Induktionsgesetzes aus der Galilei-Invarianz für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als c sind, beachtet werden sollte. Das Gesetz stellt eine Beziehung her zwischen der elektromotorischen Kraft oder der „Spannung“ entlang eines elektrischen Stromkreises und der Veränderungsrate des magnetischen Feldes $\mathbf{B}$ über die Fläche, die vom Stromkreis aufgespannt wird. In seiner differentiellen Form wird dieses Gesetz eine der Maxwellschen Gleichungen.

Wir nehmen zunächst an, dass die Felder durch Ladungen erzeugt werden, die sich alle relativ zu einem Bezugssystem R mit derselben Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegen. Dann liegt in einem zweiten Bezugssystem R' , das sich relativ zu R mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, eine stationäre Ladungsverteilung vor. Falls die Geschwindigkeit sehr viel kleiner als die des Lichts ist, dann besteht zwischen dem elektrischen Feld $\mathbf{E}'$, das in R' gemessen wird, und den in R gemessenen elektrischen und magnetischen Feldern $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Da das in R' gemessene Feld das einer stationären Ladungsverteilung ist, gilt

$$\text{rot } \mathbf{E}' = 0.$$

In R bewegen sich alle Ladungen mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so dass ihre Konfiguration an einem Ort $\mathbf{r}$ zu einem Zeitpunkt t mit der Konfiguration am Ort $\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau$ zum Zeitpunkt $t + \tau$ übereinstimmt. Daher gilt

$$\mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, t + \tau) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau, t + \tau) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

und wenn wir somit die Ableitung bezüglich τ an der Stelle $\tau = 0$ betrachten, dann erhalten wir

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 0. \quad (2.24)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \text{rot } \mathbf{E}' & (2.25) \\ &= \text{rot } \mathbf{E} + \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B} - \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{B} \\ &= \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

denn es gilt $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Wir erhalten also den Zusammenhang

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.26)$$

Gleichung (2.26) ist linear in $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$; addieren wir also die elektrischen und magnetischen Felder verschiedener Ströme von Ladungen, die sich mit jeweils unterschiedlichen Geschwindigkeiten relativ zu R bewegen, so gilt sie nach wie vor.

Gleichung (2.26) kodiert das Faradaysche Gesetz der *elektromagnetischen Induktion*, das beschreibt, wie veränderliche magnetische Felder elektrische Ströme erzeugen können. Im statischen Fall gilt

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

und die Gleichung reduziert sich auf $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ – also auf die Bedingung, aufgrund derer das elektrostatische Feld konservativ ist; das heißt, es wird insgesamt keine Arbeit verrichtet, wenn eine Ladung entlang eines geschlossenen Weges herumgeführt wird.

Betrachten Sie nun allgemeiner einen Leiter in der Form einer geschlossenen Kurve γ . Sei S eine beliebige Fläche, die γ als Rand hat. Dann folgt aus (2.26)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ist das magnetische Feld zeitlich veränderlich, dann ist das Integral von $\mathbf{B}$ über S nicht konstant, und damit ist das Linienintegral von $\mathbf{E}$ längs γ von Null verschieden. Es wird also ein elektrisches Feld entlang des Weges erzeugt, das auf die Elektronen im Leiter einwirkt und einen elektrischen Stromfluss verursacht. Die Größe

$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

die in Volt gemessen wird, gibt die Arbeit an, die das elektrische Feld an einer Einheitsladung verrichtet, während sich diese einmal entlang des Weges γ herumbewegt. Sie wird *elektromotorische Kraft* entlang des Stromkreises genannt. Das Integral $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ist der mit dem Stromkreis verknüpfte *magnetische Fluss*. Die Beziehung (2.27) zwischen der elektromotorischen Kraft und der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses ist das *Faradaysche Gesetz*.

2.9 Die Felder gleichförmig bewegter Ladungen

Wir können eine weitere der Maxwell'schen Gleichungen aus dieser Argumentation extrahieren. Nach EM3' erzeugt eine Ladung e , die sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, ein elektrisches Feld $\mathbf{E}$ und ein magnetisches Feld

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} + O(v^2/c^2),$$

wobei $\mathbf{r}$ den Vektor von der Ladung zu demjenigen Punkt bezeichnet, an dem das Feld gemessen wird. Im Inertialsystem R' , in dem die Ladung in Ruhe ist, beträgt das elektrische Feld

$$\mathbf{E}' = \frac{e \mathbf{r}}{4\pi \varepsilon_0 r^3}.$$

Im Bezugssystem, in dem sie sich mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt, gilt $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + O(v/c)$. Daraus folgt mit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$c\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}'}{c} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c} + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Wird auf beiden Seiten die Rotation gebildet und werden Terme der Ordnung v^2/c^2 vernachlässigt, so folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(c\mathbf{B}) &= \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c} (\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Nun gilt jedoch

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

wegen (2.24). Daraus folgt

$$\operatorname{rot}(c\mathbf{B}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c\varepsilon_0} \mathbf{J} = c\mu_0 \mathbf{J},$$

wobei $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ definiert wurde. Wird über die unterschiedlichen Geschwindigkeiten der Teilchen summiert, dann folgt ganz allgemein für beliebige Ladungsverteilungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J},$$

vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten der Ladungen klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.

2.10 Die Maxwell'schen Gleichungen

Zusammen mit der Annahme der Galilei-Invarianz für Geschwindigkeiten, die viel kleiner sind als die des Lichts, ermöglichten die grundlegenden Prinzipien abzuleiten, dass die elektrischen und magnetischen Felder, die von stetigen Verteilungen bewegter Ladungen im ansonsten leeren Raum erzeugt werden, folgende Gleichungen erfüllen:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.29)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.30)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.31)$$

Dabei bezeichnet ρ die Ladungsdichte, $\mathbf{J}$ die Stromdichte, und es gilt $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$. Dies sind die *Maxwell'schen Gleichungen*, die Grundlage der modernen Elektrodynamik. Zusammen mit der Lorentzkraft beschreiben sie die Dynamik von Ladungen und elektromagnetischen Feldern.

Wir haben sie abgeleitet, indem wir untersuchten, wie grundlegende elektromagnetische Prozesse von bewegten Bezugssystemen aus beurteilt werden – eine unbefriedigende Vorgehensweise, weil wir unterwegs gesehen haben, dass die Prinzipien, die wir der Ableitung zugrunde gelegt haben, mit der Galilei-Invarianz für Geschwindigkeiten, die mit der des Lichts vergleichbar sind, nicht verträglich sind. Maxwell leitete seine Gleichungen ab, indem er ein ausgeklügeltes mechanisches Modell für elektrische und magnetische Felder, die er als Verschiebungen im *lichterzeugenden Äther* auffasste, analysierte. Dies ist ebenfalls unbefriedigend, weil das Modell schon lange aufgegeben wurde. Der Grund, warum die Maxwell-Gleichungen heute als die Basis für theoretische und praktische Anwendungen des Elektromagnetismus akzeptiert werden, hat mit alledem wenig zu tun. Zunächst einmal sind die Gleichungen konsistent, und zweitens beschreiben sie das Verhalten realer Felder mit unglaublicher Genauigkeit.

2.11 Die Kontinuitätsgleichung

Es ist nicht unmittelbar klar, dass die Maxwell-Gleichungen konsistent sind. Wenn ρ und $\mathbf{J}$ als Funktionen der Koordinaten und der Zeit gegeben sind, dann bestehen sie aus zwei skalaren und zwei Vektorgleichungen in den unbekannten Komponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$. Dies sind zusammen acht Gleichungen für sechs Unbekannte – mehr Gleichungen als Unbekannte. Daher wäre es möglich, dass sie tatsächlich inkonsistent sind.

Bilden wir die Divergenz der vierten Gleichung (2.31), dann erhalten wir

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B},$$

was konsistent mit der zweiten Gleichung ist, so dass hier keine Schwierigkeit auftritt. Bilden wir dagegen die Divergenz der dritten Gleichung (2.30) und substituieren die erste, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E}) + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{J} \\ &= \mu_0 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dies führt nur dann nicht zu einem Widerspruch, wenn

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \quad (2.33)$$

gilt. Die Ladungs- und Stromdichten können also nicht unabhängig voneinander gewählt werden, sondern müssen die *Kontinuitätsgleichung* (2.33) erfüllen. Sie gilt für physikalisch sinnvolle Ladungsverteilungen; sie ist die differentielle Form der Aussage, dass Ladungen weder erzeugt noch vernichtet werden.

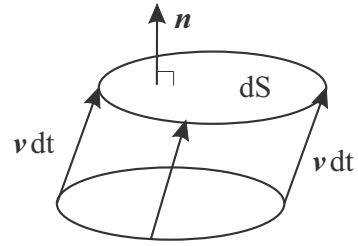
2.12 Die Erhaltung der Ladung

Um den Zusammenhang zwischen der Kontinuitätsgleichung und der Ladungserhaltung zu sehen, betrachten wir ein Volumen V , das von einer Fläche S berandet wird. Wenn die Ladung erhalten bleibt, dann muss jede Änderung der in V enthaltenen Gesamtladung durch einen Zu- oder Abfluss von Ladungen verursacht werden. Betrachten Sie ein kleines Stück dS von S mit nach außen gerichteter Einheitsnormalen $\mathbf{n}$. Betrachten Sie nun alle Teilchen, die eine bestimmte Ladung e und eine bestimmte Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ zu einem Zeitpunkt t besitzen. Angenommen, es gibt σ von ihnen pro Einheitsvolumen (σ ist eine Funktion des Ortes). Die Teilchen, die dS in der Zeit zwischen t und $t + dt$ durchqueren, sind diejenigen, die im Volumen

$$|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt| \quad (2.34)$$

enthalten sind, siehe Abb. 2.1. Sie tragen $e\sigma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt$ zum Ladungsfluss durch das Flächenelement bei. Der Wert von $\mathbf{J}$ am Oberflächenelement ist aber die Summe von $e\sigma \mathbf{v}$

Abb. 2.1 Der Fluss durch ein Flächenelement



über alle möglichen Werte von $\mathbf{v}$ und e . Durch Summation über $\mathbf{v}$, e und die Flächenelemente erhalten wir daher nach dem Übergang zum Grenzwert einer stetigen Verteilung für die Gesamtrate des Durchflusses den Ausdruck

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Die Ladungserhaltung impliziert, dass die Rate des Durchflusses mit der Rate der Abnahme der Gesamtladung innerhalb von V übereinstimmen sollte. Dies bedeutet

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.35)$$

Vertauschen wir beim ersten Summanden Ableitung und Integral und wenden den Gauß'schen Integralsatz auf den zweiten Summanden an, dann folgt

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} \right) dV = 0. \quad (2.36)$$

Wenn dies für jedes Volumen V gilt, dann müssen ρ und $\mathbf{J}$ die Kontinuitätsgleichung erfüllen. Umgekehrt impliziert die Kontinuitätsgleichung das Gesetz von der Ladungserhaltung.

2.13 Historische Notiz

Gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts waren vier Typen elektromagnetischer Phänomene bekannt, nicht aber die Zusammenhänge zwischen ihnen:

- *Magnetismus*; das Wort leitet sich aus dem Griechischen ab für „Stein aus Magnesia“.
- *Statische Elektrizität*; hervorgerufen durch das Reiben von Bernstein mit Fell; das Wort „Elektrizität“ stammt vom griechischen Wort für „Bernstein“ ab.

- *Licht*.
- *Galvanismus* oder „tierische Elektrizität“ – die Elektrizität, die von Batterien produziert wird, entdeckt von Luigi Galvani.

Die Entwicklung einer vereinheitlichten Theorie war ein langwieriges und schmerzhaftes Geschäft. Sie wurde durch im Rückblick bizarr erscheinende Versuche erschwert, Elektromagnetismus mit Hilfe mechanischer Modelle zu begreifen, die Vorstellungen von „elektrischen Flüssigkeiten“ und „magnetischen Wirbeln“ beinhalteten. Wir können die Hinterlassenschaften dieser Periode, die mit Einsteins Arbeit in 1905 endete, an den irregeführten und archaischen Begriffen erkennen, die in der modernen Terminologie noch überlebt haben: „magnetischer Fluss“, „Kraftlinien“, „elektrische Verschiebung“, usw.

Maxwells Beitrag war entscheidend, obwohl vieles von dem, was hier „Maxwellsche Theorie“ genannt wird, von seinen Nachfolgern stammt (Lorentz, Hertz, Einstein, ...); und ein Schlüsselement in Maxwells eigener Beschreibung des Elektromagnetismus – der „elektromagnetische Äther“, ein alles durchdringendes Medium, das als Träger elektromagnetischer Wellen angenommen wurde, – wurde von Einstein hinausgeworfen, wie wir sehen werden.

Eine grobe Chronologie lautet wie folgt.

- 1800 Volta demonstriert den Zusammenhang zwischen Galvanismus und statischer Elektrizität.
- 1820 Oerstedt weist nach, dass der von einer Batterie verursachte Stromfluss eine Kraft auf einen Magneten ausübt.
- 1822 Ampère schlägt vor, dass Licht eine Wellenbewegung in einem „lichterzeugenden Äther“ sei, der sich aus zwei Arten elektrischer Flüssigkeiten zusammensetzt. Im selben Jahr wurde Galileis *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme* [4] vom Index der verbotenen Bücher entfernt.
- 1831 Faraday weist nach, dass bewegte Magnete Ströme in Leitern induzieren können.
- 1846 Faraday vermutet, dass Licht eine Vibration magnetischer Kraftlinien ist.
- 1863 Maxwell publiziert die Gleichungen, die die Dynamik elektrischer und magnetischer Felder beschreiben.
- 1905 Einsteins Arbeit *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* [3].

2.14 Aufgaben

- 2.1 Zeigen Sie, dass dann, wenn $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ die Maxwellschen Gleichungen für $\rho = 0 = \mathbf{J}$ erfüllen, dies auch für

$$\mathbf{E}' = \cos \alpha \mathbf{E} - c \sin \alpha \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = c^{-1} \sin \alpha \mathbf{E} + \cos \alpha \mathbf{B}$$

für jede Konstante α der Fall ist (diese Transformation wird *Dualitätsrotation* genannt).

2.2 Es bezeichnen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ die Vektoren der Standardbasis. Sei $a > 0$ und

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{I\mu_0(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})}{2\pi a^2} & \text{falls } x^2 + y^2 < a^2 \\ \frac{I\mu_0(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})}{2\pi(x^2 + y^2)} & \text{falls } x^2 + y^2 \geq a^2, \end{cases}$$

wobei I konstant ist. Zeigen Sie, dass

$$\text{rot } \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \mathbf{k}}{\pi a^2} & \text{falls } x^2 + y^2 < a^2 \\ 0 & \text{falls } x^2 + y^2 \geq a^2. \end{cases}$$

[Dies beschreibt das magnetische Feld, das von einem Strom I in einem langen, geraden Draht erzeugt wird.]



<http://www.springer.com/978-3-662-46372-7>

Spezielle Relativitätstheorie

Woodhouse, N.

2016, XII, 201 S. 19 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-46372-7