

In diesem Kapitel stellen wir zur Wiederholung und Vertiefung einige Begriffe und Aussagen der Mengenlehre und der Analysis zusammen, die wir im Weiteren häufig verwenden werden.

1.1 Mengenlehre

Hier erklären wir, was man in der Mathematik unter einer Menge versteht, welche Relationen zwischen Mengen bestehen können und wie man mehrere Mengen miteinander verknüpft. Als erste Mengensysteme lernen wir Zerlegungen kennen.

Eine **Menge** ist laut GEORG CANTOR (deutscher Mathematiker, 1845–1918) „... eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Die Objekte der Menge heißen **Elemente** der Menge. Dabei spielen irgendwelche Zusammenhänge zwischen den Elementen keine Rolle. Insbesondere kommt es nicht auf die Reihenfolge an und auch nicht darauf, ob ein Element mehrfach genannt wird.

Mengen werden wir üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \dots$ bezeichnen, ihre Elemente meist mit kleinen Buchstaben $x, y, \dots$. Zu ihrer Beschreibung verwendet man häufig geschweifte Klammern und zählt (falls das möglich ist) ihre Elemente auf oder gibt eine sie charakterisierende Eigenschaft an: So ist die Menge T aller ganzzahligen Teiler der Zahl zwölf gleich $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und die Menge aller geraden, natürlichen Zahlen gleich $\{2k, \text{wobei } k \text{ Element der Menge } \mathbb{N}_0 \text{ aller natürlichen Zahlen } 0, 1, 2, \dots \text{ ist}\}$. Symbolisch schreibt man dafür auch $\{2k | k = 0, 1, \dots, n, \dots\}$, das Wort „wobei“ wird dabei durch den senkrechten Strich „|“ ersetzt.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik sind zufällige Versuche zentrale Objekte. Das sind Versuche, deren Ausgang im Rahmen gewisser Möglichkeiten ungewiss ist. Die Gesamtheit der möglichen Ausgänge eines zufälligen Versuches fasst man zu einer Menge zusammen. So ist zum Beispiel das Werfen eines Spielwürfels ein zufälli-

ger Versuch und die Menge seiner möglichen Ausgänge ist $\{1, 2, \dots, 6\}$, oder das Messen einer Entfernung kann man auf Grund von eventuellen Messfehlern als zufälligen Versuch auffassen, der als Menge der möglichen Ausgänge (Messwerte) eine gewisse Menge positiver Zahlen hat.

1.1.1 Definitionen und Bezeichnungen

Dieser Punkt dient der Festlegung von Bezeichnungen und der Erinnerung an Verknüpfungen und Umformungen von Mengen. Wir begnügen uns mit einer fast stenografisch kurzen Darstellung und beginnen mit einigen in der Mengenlehre üblichen Standardbezeichnungen. Zur Veranschaulichung siehe die Abb. 1.1 und 1.2.

Es seien A und B zwei Mengen.

$x \in A$ bedeutet: x ist Element von A oder x gehört zu A ,

$x \notin A$ bedeutet: x ist nicht Element von A oder x gehört nicht zu A ,

$A \subseteq B$ bedeutet: jedes Element von A ist auch Element von B

(A ist **Teilmenge von** B),

$A \supseteq B$ bedeutet: $B \subseteq A$,

$A = B$ bedeutet: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

(A und B **sind gleich**, das heißt, sie enthalten die gleichen Elemente),

$A \subset B$ bedeutet: $A \subseteq B$ und $A \neq B$

(A ist **echte Teilmenge von** B),

$A \supset B$ bedeutet: $B \subset A$,

$\emptyset$ bedeutet: leere Menge

(**die leere Menge enthält kein Element**).

Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

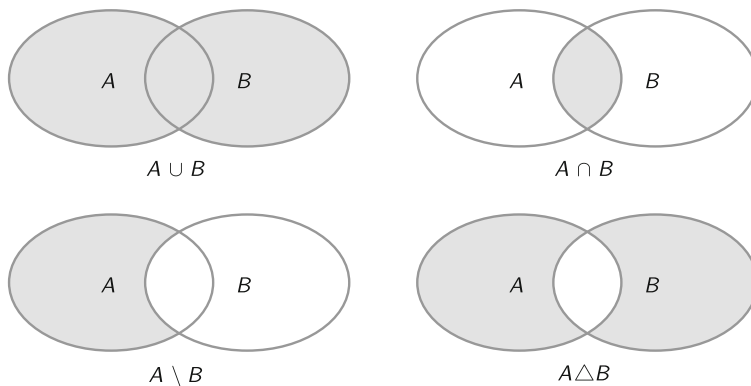


Abb. 1.1 Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, symmetrische Differenz zweier Mengen

Mengen, die mindestens ein Element enthalten, heißen **nicht leer**.

$A \cap B := \{x | x \text{ ist Element von } A \text{ und von } B\}$
(Durchschnitt von } A \text{ und } B).

Der Doppelpunkt bei einer Gleichung ($:=$ oder $=:$) weist darauf hin, dass es sich um eine Definition handelt, der Ausdruck auf der Seite des Doppelpunktes wird durch diese Gleichung definiert.

A und B heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$, Disjunkte Mengen haben kein Element gemeinsam.

$A \cup B := \{x | x \text{ ist Element von } A \text{ oder von } B\}$
(Vereinigung von } A \text{ und } B).

Hier ist nicht das ausschließende „entweder oder“ gemeint, gemeinsame Elemente der Mengen A und B sind auch Elemente von $A \cup B$.

Für beliebige Mengen A , B und C gelten folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \right\} \text{Assoziativgesetze.}$$

Die Reihenfolge der Ausführung von Vereinigungen bzw. Durchschnitten ist also gleich. Insofern macht es Sinn, diese Ausdrücke durch $A \cup B \cup C$ bzw. $A \cap B \cap C$ zu bezeichnen.

Es gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \right\} \text{Distributivgesetze,} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \right\} \text{Kommutativgesetze.}$$

Wir fahren mit der Zusammenstellung von Bezeichnungen fort:

$A \setminus B := \{x | x \text{ ist Element von } A, \text{ aber nicht Element von } B\}$
(Differenz von } A \text{ zu } B),

$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x | x \text{ ist entweder Element von } A \text{ oder Element von } B\}$
(Symmetrische Differenz von } A \text{ und } B).

Es sei E eine nicht leere Menge. Hat man es mit mehreren Teilmengen einer Menge E zu tun, so spricht man von einem **Mengensystem** $\mathcal{S}$ aus E . Gilt für zwei Mengensysteme $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ die Beziehung $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$, so sagt man, $\mathcal{S}_1$ sei ein **Teilmengensystem** von $\mathcal{S}_2$ oder $\mathcal{S}_1$ **sei kleiner als** $\mathcal{S}_2$. Ein Mengensystem $\mathcal{S}$ aus E kann man mit einem **Index** versehen,

der aus irgendeiner Menge I , der **Indexmenge**, stammt: $\mathcal{S} = (A_i, i \in I)$. Das System von Mengen $\mathcal{S} = (A_i, i \in I)$ von Mengen nennt man auch eine **Familie von Mengen A_i mit der Indexmenge I** . Die Indexmenge I kann eine beliebige nicht leere Menge sein.

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für alle } i \in I\}$$

(**Durchschnitt der Mengen $A_i, i \in I$**).

Ein Element x gehört zu $\bigcap_{i \in I} A_i$, wenn es zu allen $A_i, i \in I$, gehört ($x \in A_i$ für alle $i \in I$).

Ein Element x gehört nicht zu $\bigcap_{i \in I} A_i$, wenn es mindestens ein $i_0 \in I$ gibt, so dass x nicht zu A_{i_0} gehört ($x \notin A_{i_0}$ für mindestens ein $i_0 \in I$).

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i \text{ für mindestens ein } i \in I\}$$

(**Vereinigung der Mengen $A_i, i \in I$**).

Ein Element x gehört zu $\bigcup_{i \in I} A_i$, wenn es mindestens ein $i_0 \in I$ gibt, so dass x zu A_{i_0} gehört ($x \in A_{i_0}$ für mindestens ein $i_0 \in I$).

Ein Element x gehört nicht zu $\bigcup_{i \in I} A_i$, wenn es zu keinem $A_i, i \in I$, gehört ($x \notin A_i$ für alle $i \in I$).

Ist $I = \emptyset$, so setzt man formal $\bigcup_{i \in I} A_i := \emptyset$, und $\bigcap_{i \in I} A_i := E$, wobei E die zugrundeliegende Menge ist.

Die Distributivgesetze werden wir auch in allgemeinerer Form verwenden:

$$\bigcap_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} A_{ij} \right) = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I} A_{ij} \right)$$

für beliebige Mengen $A_{ij}, i \in I, j \in J$, und irgendwelche Indexmengen I und J .

Anstelle $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ und $\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ schreiben wir auch $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ bzw. $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Ist E eine Menge, so heißt die Menge $\mathfrak{P}(E) := \{A \mid A \subseteq E\}$ aller Teilmengen von E die **Potenzmenge** von E . Zur Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$ gehören insbesondere die leere Menge $\emptyset$ und die ganze Menge E .

Alle im Weiteren untersuchten Mengen seien Teilmengen einer gegebenen Menge E bzw. ihrer Potenzmenge $\mathfrak{P}(E)$.

Wenn $A \subseteq E$, so heißt $A^c := E \setminus A$ das **Komplement** von A bez. E .

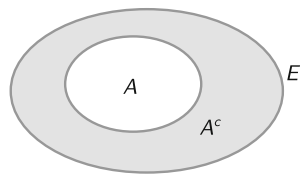
Für alle Teilmengen A von E gelten die Gleichungen

$$(A^c)^c = A, A \cap A^c = \emptyset \text{ und } A \cup A^c = E. \quad (1.2)$$

Weiterhin gelten für $A, B \subseteq E$ die Gleichungen

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c, A \setminus B = (A \cap B^c). \quad (1.3)$$

Abb. 1.2 Komplement A^c der Menge A bez. der Menge E



Allgemeiner haben wir für $A_i \subseteq E, i \in I$, die Gleichung

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c \right). \quad (1.4)$$

Ist $(A_n, n \geq 1)$ eine **Folge von Mengen**, so definieren wir die Mengen **Limes superior** und **Limes inferior** der Folge (A_n) durch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (1.5)$$

Anstelle $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ schreiben wir mitunter $\limsup_n A_n$, analog statt $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ den Ausdruck $\liminf_n A_n$.

Für eine verbale Beschreibung dieser beiden Mengen siehe Abschn. 1.1.3 Aufgabe 4).

(Man beachte den Unterschied zwischen Folgen und Mengen. Bei **Folgen** $(A_n, n \geq 1)$ kommt es auf die Reihenfolge der **Glieder** A_n an, bei Mengen $\{A_n | n \geq 1\}$ nicht.)

Aufgaben zur Verständniskontrolle

- 1.1 Geben Sie die Menge aller möglichen Ergebnisse beim Werfen zweier (unterscheidbarer) Spielwürfel an.
- 1.2 Welche der Beziehungen

$$A \subseteq B, B \subseteq A, A = B$$

bestehen für die Mengen

$$A := \{a, b, c, m, n, o\} \text{ und } B := \{c, m\}$$

und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$, und $B \setminus A$.

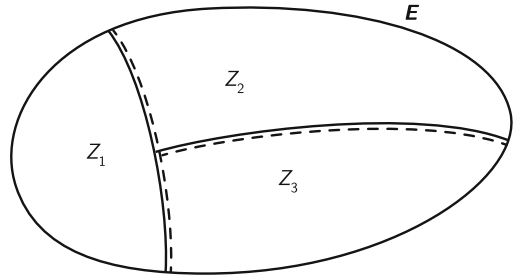
- 1.3 Zu welcher der folgenden Mengen gehört die Zahl „Drei“?

A := Menge aller positiven ganzen Zahlen, die Teiler von zwölf sind,

B := Menge aller Primzahlen,

C := Menge aller geraden ganzen Zahlen.

Abb. 1.3 Zerlegung einer Menge



1.4 Man zeige: Für je zwei Mengen A und B gilt

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \text{ und } A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B, \\ A \cap B = A \cup B \text{ genau dann, wenn } A = B.$$

1.5 Es sei $(A_i, i \in I)$ eine Familie von Mengen. Wann gehört ein Element x zur Menge $\bigcap_{i \in I} A_i$ und wann gehört es nicht dazu?

Wann gehört ein Element x zur Menge $\bigcup_{i \in I} A_i$ und wann gehört es nicht dazu?

1.6 Geben Sie die Elemente der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\{1, 2, 3\})$ an.

1.1.2 Zerlegungen

Es seien I irgendeine Indexmenge und $A_i, i \in I$, Teilmengen einer Menge E . Die $A_i, i \in I$, heißen **paarweise disjunkt**, falls $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Ein Mengensystem $\mathfrak{Z} = (Z_i, i \in I)$ aus E heißt eine **Zerlegung** von E , falls

- a) $\bigcup_{i \in I} Z_i = E$ (jedes Element von E liegt in mindestens einem der Z_i) und
- b) $Z_i \cap Z_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ (paarweise Disjunktheit)

gelten. In Abb. 1.3 ist die Zerlegung einer Menge E in drei Teilmengen dargestellt, wobei die gestrichelten Linien andeuten, dass die Elemente dieser Grenzen nicht zur jeweiligen Menge gehören.

Hat man zwei Teilmengen A_1, A_2 einer nicht leeren Menge E , so bilden sie im Allgemeinen noch keine Zerlegung. Sie erzeugen aber eine Zerlegung, indem man alle möglichen Durchschnitte von je zwei der Mengen A_1, A_1^c, A_2 und A_2^c zu einem Mengensystem $\mathfrak{Z}(A_1, A_2) := \{A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_2^c, A_1^c \cap A_2, A_1^c \cap A_2^c\}$ zusammenfasst. Dieses Mengensystem bildet eine Zerlegung von E , wobei einige dieser Mengen, aber nicht alle, leer sein können, z. B. wenn $A_1 \subseteq A_2$ gilt. Wir verallgemeinern diesen Sachverhalt wie folgt.

Sind $A_1, A_2, \dots, A_n$ Teilmengen einer nicht leeren Menge E , so bildet die Menge aller Durchschnitte

$$B_i := \bigcap_{k=1}^n M_k \text{ mit } M_k \in \{A_k, A_k^c\}, k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

eine Zerlegung von E . Dabei gilt $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ für ein gewisses $p \leq 2^n$, wobei p die Anzahl aller unterschiedlichen nicht leeren Mengen B_i bezeichnet.

(Sind z. B. alle A_k identisch gleich einer nicht leeren echten Teilmenge A von E , so gilt $p = 2^1 = 2$ und $\{B_i | 1 \leq i \leq p\} = \{A, A^c\}$. Bilden die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ bereits eine Zerlegung, so gilt $p = n$ und $\{B_i | 1 \leq i \leq n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.)

Die Zerlegung $\{B_i | 1 \leq i \leq p\}$ werden wir mit $\mathfrak{Z}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ bezeichnen und sie die von $A_1, A_2, \dots, A_n$ **erzeugte kanonische Zerlegung** nennen.

Wir überzeugen uns davon, dass es sich bei $\{B_i | 1 \leq i \leq p\}$ tatsächlich um eine Zerlegung von E handelt.

Ist $B_i \neq B_j$, wobei gemäß (1.6) $B_i = \bigcap_{k=1}^n M_k^{(i)}$ und $B_j = \bigcap_{k=1}^n M_k^{(j)}$ gelten, so gibt es mindestens ein $k \leq n$ mit $M_k^{(i)} \neq M_k^{(j)}$. Das bedeutet nach Definition der $M_k^{(i)}$ in (1.6), dass $M_k^{(i)} \cap M_k^{(j)} = \emptyset$ gilt, also wegen $B_i \subseteq M_k^{(i)}$ und $B_j \subseteq M_k^{(j)}$ auch $B_i \cap B_j = \emptyset$. Somit sind die B_i paarweise disjunkt.

Jedes $y \in E$ liegt für jedes $k \leq n$ entweder in A_k oder in A_k^c , also liegt es in einem eindeutig bestimmten B_i . Darum gilt $\bigcup_{i=1}^p B_i = E$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathfrak{Z}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ eine Zerlegung bildet.

Wir halten noch eine Eigenschaft der Zerlegung $\mathfrak{Z}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ für spätere Zwecke fest. Aus $E = \bigcup_{i=1}^p B_i$ folgt mit Hilfe des zweiten Distributivgesetzes aus (1.1) für jedes $k = 1, 2, \dots, n$

$$A_k = A_k \cap E = \bigcup_{i=1}^p (A_k \cap B_i), \quad (1.7)$$

und weil für alle $i \leq p$ und alle $k \leq n$ entweder $B_i \subseteq A_k$ oder $B_i \subseteq A_k^c$ gilt, ist $(B_i \cap A_k)$ entweder gleich B_i oder die leere Menge. Also kann man diese Vereinigung auch in der Form

$$A_k = \bigcup_{i | B_i \subseteq A_k} B_i \quad (1.8)$$

schreiben.

Aufgaben zur Verständniskontrolle

1.7 Welche der folgenden Mengensysteme

$$\mathfrak{Z}_1 := \{\{1, 2, \dots, 60\}, \{55, 56, \dots, 90\}\}$$

$$\mathfrak{Z}_2 := \{\{1, 2, \dots, 30\}, \{31, 32, \dots, 60\}, \{61, 62, \dots, 100\}\}$$

sind eine Zerlegung der Menge $\{1, 2, \dots, 100\}$?

1.8 Man gebe in beiden Fällen der Aufgabe 1.7 die von $\mathfrak{Z}_1$ bzw. $\mathfrak{Z}_2$ erzeugte kanonische Zerlegung an.

1.1.3 Übungsaufgaben

- 1) Welche Relationen bestehen zwischen den vier Mengen $A = \{\text{Stuhl}, \text{Hocker}, \text{Tisch}\}$, $B = \{\text{Stuhl}, \text{Tisch}, \text{Stuhl}, \text{Hocker}\}$, $C = \{\text{Stuhl}, \text{Hocker}\}$ und $D = \{\text{Hocker}\}$?

Geben Sie die Mengen $B \cap C$ und $A \cup D$ an.

(Beachten Sie dabei: Eine Menge besteht nach Definition aus „... wohlunterschiedenen Objekten ...“. Tritt also ein Element in der Aufzählung mehrmals auf, so zählt es als ein einziges Element dieser Menge. So gilt z. B. $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.)

- 2) Es seien A und B zwei Mengen. Wie kann man paarweise disjunkte Mengen A_1, A_2, A_3 so wählen, dass $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \cup B$ gilt?
- 3) Es seien A und B Teilmengen einer Menge E . Beweisen Sie die Formeln (1.2) und (1.3).
- 4) Es seien $A_n, n \geq 1$, Teilmengen einer Menge E . Man zeige:

- a) Ein Element x von E gehört zur Menge $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k)$ genau dann, wenn es *eine ganze positive Zahl* n_0 gibt, die von x abhängen kann, so dass $x \in A_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Mit anderen Worten, x gehört genau dann zu $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, wenn es zu allen, außer zu endlich vielen der A_n gehört.

- b) Ein Element x von E gehört zur Menge $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)$ genau dann, wenn es zu *jeder noch so großen ganzen positiven Zahl* n eine Zahl $n_1 \geq n$ gibt, die von x abhängen kann, so dass x zu A_{n_1} gehört.

Wir verwenden dafür die Sprechweise: x ist genau dann Element von $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, wenn es zu unendlich vielen der A_n gehört.

- c) Es gelten stets

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

und

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n)^c = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c.$$

- 5) Eine Folge $(A_n, n \geq 1)$ von Mengen heißt **konvergent**, falls

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n =: \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

gilt.

Zeigen Sie: Wenn (A_n) eine **monoton wachsende Folge von Mengen** bildet, d. h., wenn $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 1$ gilt, so ist die Folge (A_n) von Mengen konvergent. Bestimmen Sie in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Was kann man im Fall einer **monoton fallenden Folge (A_n) von Mengen**, das bedeutet $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, aussagen?

1.2 Reelle Zahlen

Mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ werde die Menge der **natürlichen Zahlen** bezeichnet, wir setzen $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Menge aller **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$ mit $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$.

Das Symbol $\mathbb{Q}$ steht für die Menge aller **rationalen Zahlen**, das sind Zahlen der Form $x = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Jede rationale Zahl x hat eine eindeutig bestimmte, ab einer gewissen Stelle abbrechende oder periodische Dezimaldarstellung

$$x = [x] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 10^{-k}, \quad (1.9)$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich x ist, und die b_k ganze Zahlen mit $0 \leq b_k \leq 9$ sind.

Zum Beispiel schreiben wir $1\frac{5}{7} = 1,7142857142857\dots$

Wir vereinbaren, dass Zahlen x mit

$$x - [x] = \sum_{k=1}^m b_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$$

mit $b_m < 9$ für ein m aus $\mathbb{N}$ gleichgesetzt werden mit

$$\sum_{k=1}^{m-1} b_k 10^{-k} + (b_m + 1)10^{-m}.$$

Wir setzen also zum Beispiel $2,150799999\dots = 2,1508$.

In diesem Sinne ist auch $0,99999\dots$ als 1 zu verstehen.

Die **irrationalen Zahlen** entsprechen den unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüchen. Beispiele sind $\sqrt{2} = 1,414213562373095\dots$, $\pi = 3,14159265358979\dots$ und die Eulersche Zahl $e = 2,71828182845904\dots$

Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden die irrationalen Zahlen die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**¹.

Die Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche heißt ihre **Dezimaldarstellung**. Für je zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen x und y gilt entweder $x < y$ oder $x > y$. Insofern ist es gerechtfertigt, sich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als eine **Zahlengerade** vorzustellen, oft spricht man auch von der **reellen Achse**.

Eine reelle Zahl x heiße **positiv** (bzw. **nichtnegativ**), falls $x > 0$ (bzw. $x \geq 0$) gilt.

Eine reelle Zahl x heiße **negativ** (bzw. **nichtpositiv**), falls $x < 0$ (bzw. $x \leq 0$) gilt.

¹ Wir verzichten hier auf eine axiomatische Einführung der reellen Zahlen. Einzelheiten dazu findet man z. B. in WALTER [18], Kapitel A.

Wir werden häufig zwei zusätzliche Elemente $+\infty$ (kurz: ∞) und $-\infty$ zu $\mathbb{R}$ hinzunehmen und sie uns als unendlich ferne Punkte der Zahlengeraden denken. In diesem Sinne vereinbaren wir $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ nennen wir die **erweiterte Zahlengerade** oder die **erweiterte reelle Achse**. In analoger Weise erweitern wir die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen zu der Menge $\bar{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Als Rechenregeln für die neuen Elemente definieren wir

$$\begin{aligned} x + (\pm\infty) &:= (\pm\infty) + x := (\pm\infty), \quad \frac{x}{\pm\infty} := 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\ (+\infty) + (+\infty) &:= +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty. \end{aligned}$$

Außerdem setzen wir

$$x \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0 \text{ und für } x = \infty$$

sowie

$$x \cdot (\pm\infty) := (\mp\infty) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x < 0 \text{ und für } x = -\infty.$$

Diese Regeln sind anschaulich, wenn man sich ∞ als eine sehr große, jede reelle Zahl übertreffende „Zahl“ vorstellt. Analog kann man $-\infty$ als eine sehr kleine, unterhalb jeder reellen Zahl liegende „Zahl“ ansehen.

Schließlich vereinbaren wir hier im Rahmen der Maßtheorie die Festsetzung

$$0 \cdot (\pm\infty) := (\pm\infty) \cdot 0 := 0.$$

Sind die Symbole $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}$ und $\bar{\mathbb{R}}$ mit einem als Index angefügten Pluszeichen versehen, also $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+, \bar{\mathbb{Q}}_+, \mathbb{R}_+$ und $\bar{\mathbb{R}}_+$, so verstehen wir darunter jeweils die Menge der nichtnegativen Elemente dieser Mengen, im Fall $\bar{\mathbb{R}}_+$ also die Menge $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Jede der Mengen

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty,$$

heißt ein **offenes Intervall** aus $\mathbb{R}$, jede der Mengen

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty,$$

nennt man ein **abgeschlossenes Intervall** aus $\mathbb{R}$, und jede der Mengen

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad -\infty \leq a \leq b < \infty,$$

wird als ein **nach links halboffenes Intervall** aus $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Die Definition von nach rechts halboffenen Intervallen $[a, b)$ aus $\mathbb{R}$ erfolgt analog.

Maßtheorie für Statistiker

Grundlagen der Stochastik

Küchler, U.

2016, XII, 318 S. 34 Abb., 8 Abb. in Farbe.,

ISBN: 978-3-662-46375-8