

---

## Vorwort

Dieses Buch versteht sich als eine Einführung in die Maßtheorie. Entstanden ist es aus Vorlesungen und Übungen, die ich im Rahmen des Masterstudienganges Statistik an der Humboldt-Universität zu Berlin gehalten habe. Die Hörer (ich verwende in diesem Buch der Einfachheit halber die männliche Form der Benennung von Personen, gemeint sind aber stets beide Formen, hier insbesondere Hörerinnen und Hörer) hatten ihr Bachelorstudium an unterschiedlichen Fakultäten absolviert, in denen Mathematik meist nicht im Mittelpunkt der Ausbildung stand. Bestandteil ihres Masterstudienganges Statistik waren maßtheoretisch fundierte Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Die parallel angebotenen Lehrveranstaltungen zur Maßtheorie unterstützten die Studierenden bei ihrer Ausbildung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischer Statistik.

Maßtheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik mit Verbindungen zu zahlreichen anderen mathematischen Disziplinen, insbesondere zur Wahrscheinlichkeitstheorie, aber auch zur Mathematischen Statistik, die man beide zusammen häufig als Stochastik bezeichnet. Diese Verbindung ist erst in den dreißiger Jahren des vergangenen Jahrhunderts deutlich herausgearbeitet worden, wodurch die Stochastik einen bedeutenden und lang andauernden Entwicklungsschub erhalten hat. Heute ist Maßtheorie das mathematische Fundament der Stochastik, ohne sie sind das Verständnis und die Entwicklung fortgeschrittener Theorie und Anwendungen, zum Beispiel der stochastischen Prozesse, der asymptotischen Statistik oder der sequentiellen Testtheorie, undenkbar.

Alle in der Stochastik auftretenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind spezielle Maße, nämlich solche mit Gesamtmasse Eins. Methoden und Schlussweisen der Maßtheorie finden sich deshalb auch als grundlegende Bestandteile in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik wieder. Im vorliegenden Buch werden deshalb Verbindungen von Maßtheorie und Stochastik immer wieder aufgezeigt.

Da Stochastik inzwischen in vielen Zweigen der Natur- und Wirtschaftswissenschaften zur mathematischen Modellierung realer, mit Zufall verbundener Erscheinungen eingesetzt wird, hat der Bedarf an maßtheoretischen Grundlagen zugenommen und den traditionellen Kreis von Interessenten, der meist aus Mathematikern und Studierenden der Mathematik bestand, deutlich erweitert. Insofern ist diese Einführung nicht nur für Studierende der Statistik, sondern auch für all diejenigen Wissenschaftler und Praktiker gedacht,

die an Anwendungen der Stochastik zum Beispiel in Volkswirtschaft und Finanzmathematik, in Physik, Chemie, Biologie, Medizin und anderen Gebieten interessiert sind.

Als Voraussetzung sollten die Leser dieser Einführung in ihrem Studium einen Grundkurs in Mathematik absolviert haben, der insbesondere Elemente der Differential- und Integralrechnung sowie der linearen Algebra behandelt hat.

Einen ersten Überblick über den Inhalt des Buches gewinnt man anhand des Inhaltsverzeichnisses.

In Kap. 1 werden die für die Maßtheorie wichtigen Begriffe und Aussagen der Mengenlehre und der Theorie reeller Zahlen zur Wiederholung und Vertiefung zusammengefasst.

Die Kap. 2 bis 9 umfassen das Basiswissen zur Maßtheorie aus der Sicht der Stochastik. Dabei werden die wesentlichen Begriffe und Methoden ausführlich erläutert. Im Gegenzug wird bei umfangreichen, tiefer schürfenden oder technischen Beweisen auf einschlägige Quellen verwiesen.

Die beiden Kap. 10 „Bedingte Erwartungen“ und 11 „Likelihoodfunktionen“ stellen eine fortgeschrittene Anwendung der Maßtheorie in der Stochastik dar. Sie illustrieren einerseits die Möglichkeiten, die die Maßtheorie für ein tieferes Verständnis der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik eröffnet. Andererseits sollen sie entsprechende Lehrveranstaltungen für Stochastik bzw. das Selbststudium unterstützen.

In Abschn. 12.1 bis 12.3 werden einige bekannte Begriffe und Aussagen zu reellwertigen Funktionen, normierten Räumen und Reihen reeller Zahlen, die im Text benutzt werden, zusammengefasst.

Ein umfangreiches Symbol- und ein ausführliches Sachverzeichnis am Ende des Buches unterstützen das Navigieren im Text.

Viele Beispiele, Abbildungen und Übungsaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades lockern den eher abstrakten Stoff der Maßtheorie auf. Die Erarbeitung des gebotenen Stoffes wird in den ersten drei Kapiteln außerdem durch einfache Aufgaben zur Kontrolle des Verständnisses unterstützt. Die Lösungen sämtlicher Übungsaufgaben finden die Leser im ausführlichen Abschn. 12.4 des Buches.

Für die Erarbeitung des neuen und ungewohnten Stoffes der Maßtheorie gilt insbesondere das Sprichwort: „Übung macht den ‚Master‘“. In diesem Sinne empfehle ich, möglichst viele der Übungsaufgaben selbstständig zu lösen oder sich zumindest um eine Lösung zu bemühen und erst dann die eigenen Anstrengungen mit den Lösungen zu vergleichen.

Der Umfang des Buches ist weitaus größer als das Pensum, das man in einer einsemestrigen zweistündigen Vorlesung mit separaten Übungen vermitteln kann. Der behandelte Stoff der Maßtheorie bildet aber die Grundlage für weiterführende Themen und Lehrveranstaltungen in der Stochastik, zum Beispiel der Theorie der Markowschen Prozesse und der Maximum-Likelihood-Theorie statistischer Schätzungen und Tests statistischer Hypothesen. Insofern kann das Buch auch Begleiter beim weiteren Studium der Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik sein. Für benachbarte Themen wie zum Beispiel Maßtheorie in der Funktionalanalysis oder zu Verbindungen von Maßtheorie und Topologie bzw. Algebra werden Interessenten in der zitierten Literatur fündig.

Die Maßtheorie und auch ihre Verbindung zur Wahrscheinlichkeitstheorie sind, insbesondere für Studierende der Mathematik, schon sehr oft und sehr gut in Büchern dargestellt worden. Ich erwähne hier stellvertretend zwei Werke neueren Datums aus dem deutschsprachigen Raum: das Buch von J. ELSTRODT [6] und das Buch von K. D. SCHMIDT [15]. Elstrodt gibt eine umfassende Darstellung der Maßtheorie mit vielen historischen Anmerkungen, die für ein detailliertes Studium bestens geeignet ist. Das Buch von Schmidt bietet Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie zu gleichen Teilen an und ist ein in sich geschlossenes Lehrbuch, von dessen Studium aus man sich moderne Anwendungsgebiete in der Statistik, Versicherungsmathematik und anderen Bereichen gut erschließen kann. Auf beide Bücher nehme ich mehrfach Bezug.

Zu der Entstehung dieses Buches haben mehrere Personen beigetragen. Dr. H. Mai hat Teile des Manuskriptes gelesen und zahlreiche hilfreiche Hinweise gegeben. Auch viele Studierende des Studienganges Statistik an der Humboldt-Universität zu Berlin, insbesondere des Immatrikulationsjahrganges 2013, haben durch sehr konstruktive Gestaltungsvorschläge das Manuskript beeinflusst. Unterstützend begleitet wurde das Buchprojekt auch von CASE (Center for Applied Statistics and Economics) unter dem Vorsitz von Prof. W. Härdle. Frau S. Lefevre hat Schreibfehler korrigiert und stilistische Hinweise gegeben. Eine erste Fassung des Manuskriptes hat Frau S. Bergmann geschrieben.

Allen Genannten danke ich herzlich für ihre Beiträge.

Ein besonderer Dank gebührt meiner Frau Ingeborg, die mich mit großem Interesse für die Gestaltung des Manuskriptes und vielen fachlichen Diskussionen bei der umfangreichen Arbeit unterstützt hat.

Frau A. Herrmann und Herrn C. Heine vom Springer-Verlag Heidelberg bin ich für die konstruktive und verständnisvolle Zusammenarbeit sehr verbunden.

Über Kommentare und Hinweise aus der Leserschaft zu Inhalt oder Form des Buches würde ich mich freuen.

Berlin, 5. April 2015

Uwe Küchler

Maßtheorie für Statistiker

Grundlagen der Stochastik

Küchler, U.

2016, XII, 318 S. 34 Abb., 8 Abb. in Farbe.,

ISBN: 978-3-662-46375-8