

## Kapitel 2

# Klassische Bruch- und Versagenshypothesen

In diesem Kapitel soll ein kurzer Einblick in einige klassische Bruch- und Versagenshypothesen für statische Materialbeanspruchung gegeben werden. Das Wort *klassisch* deutet in diesem Zusammenhang an, dass die meisten dieser *Festigkeits-hypothesen*, wie sie auch genannt werden, schon älteren Datums sind. Sie gehen teilweise auf Überlegungen Ende des 19. bzw. Anfang des 20. Jahrhunderts zurück, und sie sind untrennbar mit der Entwicklung der Festkörpermechanik verbunden. Durch die moderne Bruchmechanik wurden sie, was die Forschung betrifft, etwas in den Hintergrund gedrängt. Wegen ihrer weiten Verbreitung, die nicht zuletzt mit ihrer Einfachheit zusammenhängt, haben sie jedoch eine beachtliche Bedeutung.

### 2.1 Grundbegriffe

Festigkeits-hypothesen sollen eine Aussage darüber machen, unter welchen Umständen ein Material versagt. Ausgangspunkt sind dabei Experimente unter speziellen, meist einfachen Belastungszuständen. Als Beispiel sind in Abb. 2.1 zwei typische Spannungs-Dehnungs-Verläufe für Materialien unter einachsiger Zug schematisch dargestellt. Bis zu einer bestimmten Grenze verhalten sich viele Werkstoffe im wesentlichen rein elastisch. Bei *duktiler* Verhalten treten nach Überschreiten der *Fließgrenze* plastische Deformationen auf. Die *Bruchgrenze* wird in diesem Fall erst nach hinreichend großen inelastischen Deformationen erreicht. Im Gegensatz dazu

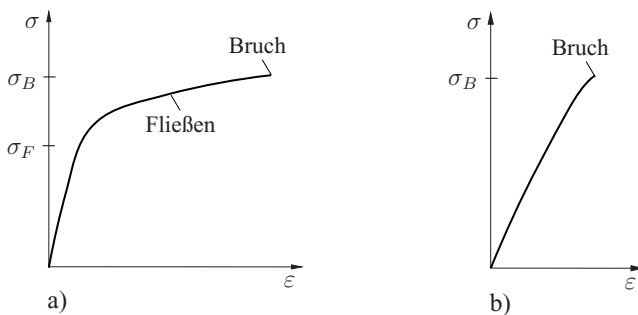


Abb. 2.1 Materialverhalten: a) duktil, b) spröde

ist *sprödes* Materialverhalten dadurch gekennzeichnet, dass vor dem Bruch keine bemerkenswerten inelastischen Deformationen auftreten.

Abhängig von der Problemstellung kennzeichnet man häufig die *Festigkeit* bzw. das *Versagen* eines Materials durch die Fließgrenze oder durch die Bruchgrenze. Gemeinsam ist beiden, dass sich an ihnen das Materialverhalten drastisch ändert. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass duktilen bzw. spröden Verhalten keine reinen Stoffeigenschaften sind. Vielmehr hat der Spannungszustand einen wesentlichen Einfluss auf das Materialverhalten. Als Beispiel sei nur erwähnt, dass ein hydrostatischer Spannungszustand bei Materialien, die als plastisch deformierbar gelten, im allgemeinen zu keinen inelastischen Deformationen führt. Unter bestimmten Beanspruchungen kann sich ein solcher Werkstoff also durchaus spröde verhalten.

Wir nehmen nun an, dass sowohl für den betrachteten einfachen Belastungszustand als auch für eine beliebig komplexe Beanspruchung das Verhalten des Materials und damit auch die Versagensgrenze alleine durch den aktuellen Spannungszustand oder Verzerrungszustand charakterisierbar sind. Dann kann die Versagensbedingung durch

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{oder} \quad G(\varepsilon_{ij}) = 0 \quad (2.1)$$

ausgedrückt werden. Wie die Fließbedingung, die ja durch (2.1) miterfasst wird, kann man die Versagensbedingung  $F(\sigma_{ij}) = 0$  als *Versagensfläche* im sechsdimensionalen Raum der Spannungen bzw. im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen deuten. Ein Spannungszustand  $\sigma_{ij}$  auf der Fläche  $F = 0$  charakterisiert dabei Versagen infolge Fließens oder Bruch.

Eine Versagensbedingung der Art (2.1) setzt voraus, dass der Materialzustand beim Versagen unabhängig von der Deformationsgeschichte ist. Dies kann mit hinreichender Genauigkeit auf das erstmalige Einsetzen des plastischen Fließens bei duktilen Materialien oder auf den Bruch von spröden Werkstoffen zutreffen. Daneben muss das Material bis zum Erreichen der Versagensgrenze als Kontinuum ohne makroskopische Defekte aufgefasst werden können. Das bedeutet insbesondere, dass nicht etwa makroskopische Risse das Verhalten eines Werkstoffes bestimmen.

Der Deformationsprozess bei plastisch verformbaren Werkstoffen – hierzu zählt man häufig auch Beton oder geologische Materialien – nach Erreichen der Fließgrenze kann durch die Fließregel beschrieben werden. Die Kinematik des Bruches bei sprödem Materialverhalten wird durch letztere nicht bestimmt. Einfache kinematische Aussagen sind dann im allgemeinen nur bei speziellen Spannungszuständen möglich.

## 2.2 Versagenshypothesen

Es ist formal möglich, beliebig viele Versagenshypothesen vom Typ (2.1) aufzustellen. Im folgenden sind einige gängige Bedingungen zusammengestellt, von denen ein Teil auf bestimmte Materialklassen mit technisch hinreichender Genauigkeit angewendet werden kann. Ein Teil hat allerdings nur noch historische Be-

deutung. Auf die VON MISESSche und die TRESCASche Fließbedingung wird hier nicht nochmals eingegangen; sie sind in Abschnitt 1.3.3.1 diskutiert.

### 2.2.1 Hauptspannungshypothese

Diese Hypothese geht auf W.J.M. RANKINE (1820–1872), G. LAMÉ (1795–1870) und C.L. NAVIER (1785–1836) zurück. Nach ihr wird das Materialverhalten durch zwei Kennwerte – die *Zugfestigkeit*  $\sigma_z$  und die *Druckfestigkeit*  $\sigma_d$  – bestimmt. Versagen wird angenommen, wenn die größte Hauptnormalspannung den Wert  $\sigma_z$  oder die kleinste Hauptnormalspannung die Grenze  $-\sigma_d$  erreicht, das heißt, wenn eine der Bedingungen

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_z, \\ -\sigma_d, \end{cases} \quad \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_z, \\ -\sigma_d, \end{cases} \quad \sigma_3 = \begin{cases} \sigma_z, \\ -\sigma_d, \end{cases} \quad (2.2)$$

erfüllt ist. Die zugehörige Versagensfläche im Raum der Hauptspannungen ist durch die Oberfläche eines Würfels gegeben (Abb. 2.2a). Als Versagenskurve für den ebenen Spannungszustand ( $\sigma_3 = 0$ ) ergibt sich ein Quadrat (Abb. 2.2b).

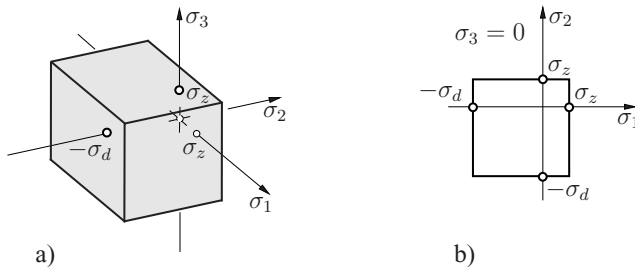


Abb. 2.2 Hauptspannungshypothese

Die Hauptspannungshypothese soll in erster Linie das spröde Versagen von Werkstoffen beschreiben. Bei Zugbeanspruchung verbindet man mit ihr im allgemeinen die kinematische Vorstellung einer Dekohäsion der Schnittflächen senkrecht zur größten Hauptspannung. Die Hypothese vernachlässigt den Einfluss von zwei Hauptspannungen auf das Versagen; sie ist nur recht eingeschränkt anwendbar.

### 2.2.2 Hauptdehnungshypothese

Bei der von DE SAINT-VENANT (1797–1886) und C. BACH (1889) vorgeschlagenen Hypothese wird angenommen, dass Versagen eintritt, wenn die größte Hauptdehnung einen kritischen Wert  $\varepsilon_z$  annimmt. Setzt man linear elastisches Verhalten

bis zum Versagen voraus und führen wir mit  $\sigma_z = E\varepsilon_z$  die kritische Spannung  $\sigma_z$  ein, so folgen die Versagensbedingungen

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_z, \quad \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) = \sigma_z, \quad \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_z. \quad (2.3)$$

Die Versagensfläche wird in diesem Fall durch eine dreiflächige Pyramide um die hydrostatische Achse mit dem Scheitel bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_z/(1 - 2\nu)$  gebildet (Abb. 2.3a). Die Versagenskurve für den ebenen Spannungszustand ist in Abb. 2.3b dargestellt.

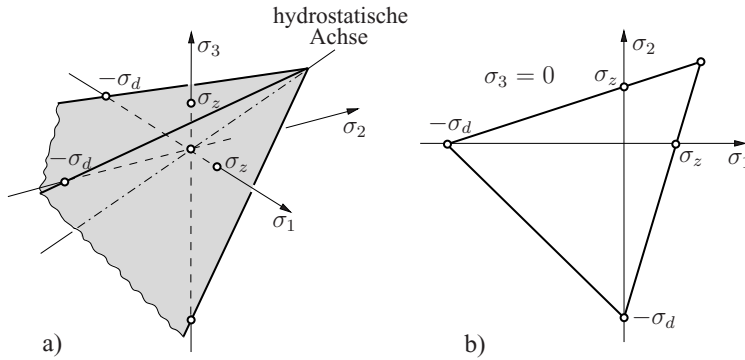


Abb. 2.3 Hauptdehnungshypothese

Nach dieser Hypothese müsste Versagen unter einachsigen Druck bei einem Betrag  $\sigma_d = \sigma_z/\nu$  auftreten. Für die meisten Werkstoffe widerspricht dies der experimentellen Erfahrung.

### 2.2.3 Formänderungsenergiehypothese

Die Hypothese von E. BELTRAMI (1835-1900) postuliert Versagen, wenn die Formänderungsenergiegedichte  $U$  einen materialspezifischen kritischen Wert  $U_c$  erreicht:  $U = U_c$ . Dabei wird in der Regel von linear elastischem Verhalten bis zum Versagen ausgegangen. Führt man mit  $U_c = \sigma_c^2/2E$  eine einachsige Versagensspannung  $\sigma_c$  ein und drückt man  $U = U_V + U_G$  unter Verwendung von (1.50) durch die Hauptspannungen aus, so ergibt sich

$$(1+\nu)[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + (1-2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = 3\sigma_c^2. \quad (2.4)$$

Die entsprechende Versagensfläche ist ein Rotationsellipsoid um die hydrostatische Achse mit den Scheiteln bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm\sigma_c/\sqrt{3(1-2\nu)}$ .

Nach dieser Hypothese kommt es bei hinreichend großen hydrostatischem Druck immer zum Versagen; dies steht in Widerspruch zu experimentellen Ergeb-

nissen. Lässt man in  $U$  den Anteil  $U_V$  der Volumenänderungsenergiedichte weg (inkompressibles Material), so geht die Beltramische Hypothese in die von Misessche Fließbedingung über.

In neuerer Zeit wurde die Formänderungsenergiehypothese in modifizierter Form wieder zur Verwendung in Rissausbreitungskriterien vorgeschlagen (vgl. S-Kriterium, Abschnitt 4.9).

### 2.2.4 Coulomb-Mohr Hypothese

Diese Hypothese soll vor allem das Versagen infolge Gleiten bei geologischen und granularen Materialien, wie zum Beispiel Sand, Gestein oder Böden beschreiben. Solche Materialien können Zugspannungen nicht oder nur in beschränktem Maße aufnehmen.

Zur physikalischen Motivierung gehen wir von einer beliebigen Schnittfläche aus, in welcher die Normalspannung  $-\sigma$  (Druck) und die Schubspannung  $\tau$  herrschen. Das *Coulombsche* Reibungsgesetz – angewandt auf die Spannungen – postuliert Gleiten, wenn  $\tau$  einen kritischen Wert annimmt, der proportional zur Druckspannung  $-\sigma$  ist:  $|\tau| = -\sigma \tan \rho$ . Darin ist  $\rho$  der materialabhängige *Reibungswinkel*. Für  $-\sigma \rightarrow 0$  folgt aus diesem Gesetz auch  $|\tau| \rightarrow 0$ ; Zugspannungen können in diesem Fall nicht auftreten. Vielfach setzt Gleiten für  $\sigma = 0$  allerdings erst bei einer endlichen Schubspannung ein. Auch können die Materialien häufig beschränkte Zugspannungen aufnehmen. Es bietet sich dann an, von der modifizierten Gleitbedingung

$$|\tau| = -\sigma \tan \rho + c \quad (2.5)$$

auszugehen. Diese ist als *Coulomb-Mohr-Hypothese* bekannt (C.A. COULOMB (1736–1806); O. MOHR (1835–1918)). Den Parameter  $c$  bezeichnet man als *Kohäsion*.

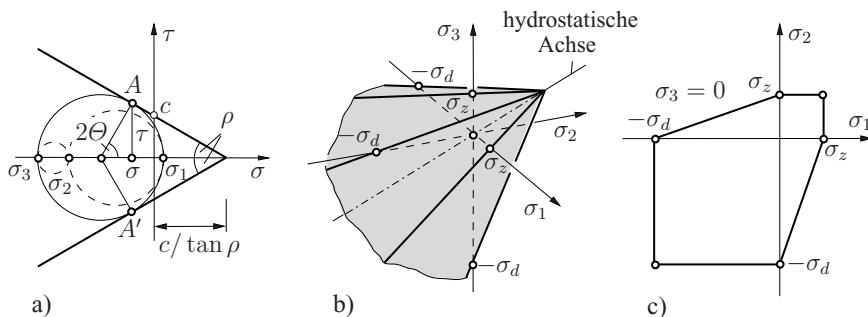


Abb. 2.4 Coulomb-Mohr-Hypothese

Im  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm entsprechen der Gleitbedingung (2.5) zwei Geraden, welche die Einhüllende der zulässigen Mohrschen Kreise bilden (Abb. 2.4a). Gleiten tritt

für diejenigen Spannungszustände ein, bei denen der größte Mohrsche Kreis die Einhüllende gerade tangiert. Für die zugehörigen Hauptspannungen liest man die Bedingung

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \left[ \frac{c}{\tan \rho} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right] \sin \rho \quad (2.6)$$

ab. Hieraus ergibt sich zum Beispiel die Zugfestigkeit bei einachsiger Beanspruchung mit  $\sigma_1 = \sigma_z$  und  $\sigma_3 = 0$  zu  $\sigma_z = 2c \cos \rho / (1 + \sin \rho)$ ; analog folgt die Druckfestigkeit mit  $\sigma_1 = 0$  und  $\sigma_3 = -\sigma_d$  zu  $\sigma_d = 2c \cos \rho / (1 - \sin \rho)$ . Angemerkt sei noch, dass (2.6) als Spezialfall für  $\rho \rightarrow 0$  die Trescasche Fließbedingung beinhaltet (vgl. Abschnitt 1.3.3.1).

Es ist manchmal zweckmäßig, anstelle der Parameter  $\rho$  und  $c$  die Materialkennwerte  $\sigma_d$  und  $\kappa = \sigma_d / \sigma_z$  zu verwenden. Aus (2.6) ergibt sich dann, dass für Gleiten eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein muss:

$$\left. \begin{array}{l} \kappa \sigma_1 - \sigma_3 \\ -\sigma_1 + \kappa \sigma_3 \end{array} \right\} = \sigma_d, \quad \left. \begin{array}{l} \kappa \sigma_2 - \sigma_1 \\ -\sigma_2 + \kappa \sigma_1 \end{array} \right\} = \sigma_d, \quad \left. \begin{array}{l} \kappa \sigma_3 - \sigma_2 \\ -\sigma_3 + \kappa \sigma_1 \end{array} \right\} = \sigma_d. \quad (2.7)$$

Hierbei wurden die Hauptspannungen *nicht* von vornherein ihrer Größe nach geordnet. Die zugehörige Versagensfläche ist eine sechsflächige Pyramide um die hydrostatische Achse (Abb. 2.4b). Ihr Scheitel befindet sich bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_d / (\kappa - 1)$ . Die Versagenskurve im ebenen Spannungszustand wird durch das in Abb. 2.4c dargestellte Sechseck gebildet.

Wie eingangs erwähnt, nimmt man an, dass Gleiten in Schnitten stattfindet, in welchen (2.5) erfüllt ist. Ihnen entsprechen in Abb. 2.4a die Punkte  $A$  und  $A'$ . Die Normale der Gleitebene liegt demgemäß in der von der größten Hauptspannung  $\sigma_1$  und der kleinsten Hauptspannung  $\sigma_3$  aufgespannten Ebene. Sie schließt mit der Richtung von  $\sigma_1$  die Winkel

$$\Theta_{1,2} = \pm(45^\circ - \rho/2) \quad (2.8)$$

ein. Die mittlere Hauptspannung  $\sigma_2$  hat nach dieser Hypothese keinen Einfluss auf das Versagen und den Versagenswinkel. Hingewiesen sei noch auf die Tatsache, dass Versagen entlang der durch (2.8) bestimmten Fläche nur dann eintritt, falls dies auch kinematisch möglich ist.

Das Ergebnis (2.8) für die Orientierung der Versagensfläche wird unter anderem in der Geologie dazu benutzt, um unterschiedliche Typen von Verwerfungen der Erdkruste zu erklären. Dabei wird davon ausgegangen, dass alle Hauptspannungen Druckspannungen sind ( $|\sigma_3| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_1|$ ) und in vertikaler Richtung (senkrecht zur Erdoberfläche) bzw. horizontaler Richtung wirken. Eine *Normal-Verwerfung* wird danach mit einer Situation erklärt, bei der die vertikale Hauptspannung betragsmäßig größer ist als die in horizontaler Richtung wirkenden Hauptspannungen (Abb. 2.5a). Bei einer *Schiebe-Verwerfung* wird dagegen angenommen, dass die vertikale Druckspannung die betragsmäßig kleinste Hauptspannung ist (Abb. 2.5b). Schließlich bringt man eine *durchlaufende Verwerfung* in Verbindung mit einem

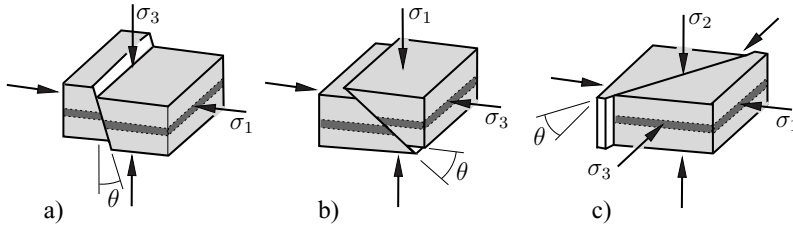


Abb. 2.5 Verwerfungen

vertikalen Druck  $\sigma_2$ , der betragsmäßig zwischen der größten und der kleinsten Hauptspannung liegt (Abb. 2.5c).

Aus Experimenten geht hervor, dass die Coulomb-Mohr-Hypothese das Verhalten verschiedener Materialien zwar im Druckbereich gut, doch im Zugbereich weniger gut beschreibt. Verantwortlich hierfür kann in verschiedenen Fällen eine Änderung des Versagensmechanismus gemacht werden. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn im Zugbereich Versagen nicht infolge Gleiten eintritt, sondern mit einer Dekohäsion der Schnittflächen senkrecht zur größten Zugspannung verbunden ist. Eine Möglichkeit zur Verbesserung der Versagensbedingung besteht dann zum Beispiel darin, die Versagensfläche durch Normalspannungsabschnitte (*tension cut-off*) zu modifizieren (Abb. 2.6).

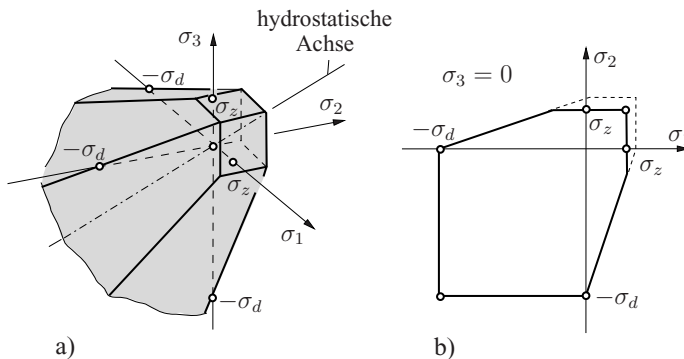


Abb. 2.6 Tension cut-off

Die Hypothese (2.5) geht von einem linearen Zusammenhang zwischen  $\tau$  und  $\sigma$  aus. Eine Verallgemeinerung der Art

$$|\tau| = h(\sigma) \quad (2.9)$$

wurde von O. MOHR (1900) vorgeschlagen, wobei die Funktion  $h(\sigma)$  experimentell zu bestimmen ist. Letztere stellt im  $\sigma$ - $\tau$ -Diagramm die Einhüllende der zulässigen Mohrschen Kreise dar (Abb. 2.7). Wie schon bei der Hypothese (2.5) hat auch hier die mittlere Hauptspannung  $\sigma_2$  keinen Einfluss auf das Versagen. Insofern

kann man beide als spezielle (nicht allgemeine) Formen einer Versagensbedingung  $F(\sigma_1, \sigma_3) = 0$  ansehen.

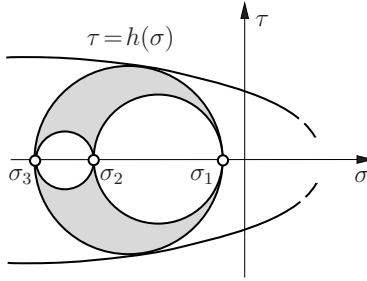


Abb. 2.7 Mohrsche Versagenshypothese

## 2.2.5 Drucker-Prager-Hypothese

Nach der Hypothese von D.C. DRUCKER (1918-) und W. PRAGER (1903-1980) kommt es zum Versagen, wenn die Bedingung

$$F(I_\sigma, II_s) = \alpha I_\sigma + \sqrt{II_s} - k = 0 \quad (2.10a)$$

erfüllt ist. Darin sind  $I_\sigma$ ,  $II_s$  Invarianten des Spannungstensors bzw. seines Deviators und  $\alpha$ ,  $k$  Materialparameter. Mit  $\sigma_m = \sigma_{\text{oct}} = I_\sigma/3$  und  $\tau_{\text{oct}} = \sqrt{2 II_s}/3$  kann man (2.10a) ähnlich wie die Mohr-Coulomb-Hypothese deuten. Versagen tritt danach ein, wenn die Oktaederschubspannung  $\tau_{\text{oct}}$  einen Wert annimmt, der linear von der mittleren Normalspannung  $\sigma_m$  abhängt (vgl. (2.5)):

$$\tau_{\text{oct}} = -\sqrt{6} \alpha \sigma_m + \sqrt{2/3} k. \quad (2.10b)$$

Die durch (2.10a,b) aufgespannte Versagensfläche im Raum der Hauptspannungen bildet einen Kreiskegel um die hydrostatische Achse mit dem Scheitel bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = k/3\alpha$  (Abb. 2.8a). Die zugeordnete Versagenskurve für den ebenen Spannungszustand ( $\sigma_3 = 0$ ) ist eine Ellipse (Abb. 2.8b). Wie die Coulomb-Mohr-Hypothese findet die Drucker-Prager-Hypothese als Fließ- bzw. Bruchbedingung vorwiegend Anwendung bei granularen und geologischen Materialien. Für  $\alpha = 0$  geht sie in die von Misessche Fließbedingung über.

Experimente zeigen, dass in manchen Fällen die Beschreibung der Versagensbedingung mittels zweier Materialparameter nicht hinreichend ist. Sie muss dann geeignet modifiziert werden. Als Beispiel sei eine Möglichkeit der Erweiterung der Drucker-Prager-Hypothese angegeben, welche verschiedentlich Anwendung findet:



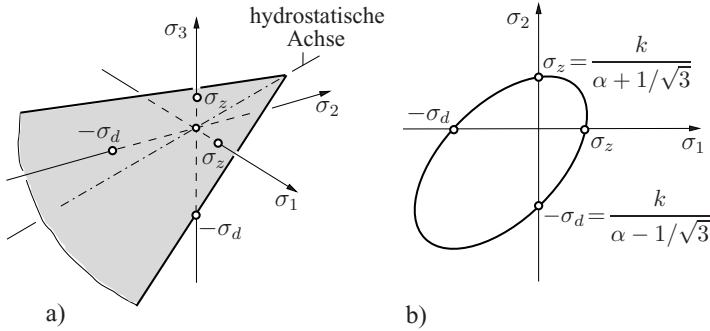


Abb. 2.8 Drucker-Prager-Hypothese

$$F(I_\sigma, II_s) = \alpha I_\sigma + \sqrt{II_s + \beta I_\sigma^2} - k = 0. \quad (2.11)$$

Darin ist  $\beta$  ein weiterer Materialkennwert.

### 2.2.6 Johnson-Cook Kriterium

Während die zuvor diskutierten Versagenshypothesen für die Beschreibung des Einsetzens von sprödem Versagen oder von plastischem Fließen gedacht sind, soll das Kriterium von JOHNSON und COOK (1985) das duktile Versagen nach ausgeprägter plastischer Deformation beschreiben. Dem endgültigen Versagen geht in vielen Materialien die Bildung, das Wachstum und das Zusammenwachsen von mikroskopischen Hohlräumen bzw. Poren voraus (siehe Abschnitte 3.1.3 und 9.4), welches hauptsächlich durch die hydrostatische Zugspannung gesteuert wird. Dementsprechend wird angenommen, dass die plastische Dehnung beim Versagen  $\varepsilon_{vers}$  mit dem Verhältnis von hydrostatischer zu deviatorischer Spannung - wie in Abb. 2.9 dargestellt - abnimmt und durch die Beziehung

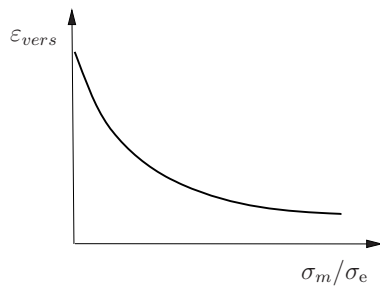


Abb. 2.9 Johnson-Cook Kriterium

$$\varepsilon_{fail} = D_1 + D_2 \exp \left( D_3 \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \right) \quad (2.12)$$

approximiert werden kann. Darin sind  $\varepsilon_{vers}$  die Größe der äquivalenten plastischen Dehnung  $\varepsilon_e^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$  beim Versagen,  $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$  die hydrostatische Spannung,  $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  die äquivalente (von Mises) Spannung und  $D_1, D_2, D_3$  Materialkonstanten.

Es soll erwähnt werden, dass die direkte Beziehung zwischen der akkumulierten plastischen Dehnung beim Versagen und dem Spannungszustand im Versagenskriterium (2.12) nur sinnvoll ist, wenn während der gesamten Deformationsgeschichte eine Proportionalbelastung vorherrscht, d.h. wenn das Verhältnis  $\sigma_m/\sigma_e$  konstant ist (siehe Abschnitt 1.3.3.3). Das Versagensmodell lässt sich auf nichtproportionale Belastung erweitern, wenn es mit einem Evolutionsgesetz für die duktile Schädigung verbunden wird. Entsprechende Modelle für duktiles Versagen werden in Abschnitt 9.4 diskutiert.

### 2.3 Deformationsverhalten beim Versagen

Die Versagensbedingungen alleine lassen keinen unmittelbaren Schluss auf das Deformationsverhalten bzw. die Kinematik beim Versagen zu. Aussagen hierüber kann man nur dann machen, wenn mit der Versagenhypothese a priori eine bestimmte kinematische Vorstellung verbunden ist, oder wenn man eine solche Annahme zusätzlich einführt.

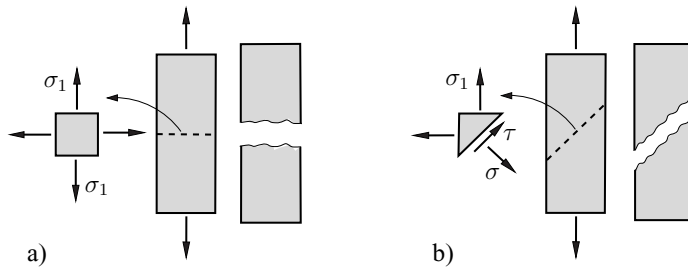


Abb. 2.10 Bruchflächen

Beim Versagen infolge Bruch wird ein Körper in zwei oder mehrere Teile getrennt. Dies geht einher mit der Schaffung neuer Oberflächen, d.h. der Bildung von *Bruchflächen*. Der dabei ablaufende kinematische Vorgang kann mit einfachen Mitteln nicht beschrieben werden. Nur bei hinreichend gleichförmigen Spannungszuständen lassen sich Aussagen treffen, die sich an experimentellen Erfahrungen orientieren. Letztere zeigen zwei Grundmuster der Bildung von Bruchflächen. Beim *normalflächigen Bruch* fällt die Bruchfläche mit der Schnittfläche zusammen, in

der die größte Hauptnormalspannung wirkt; diese muss eine Zugspannung sein (Abb. 2.10a). Wird die Bruchfläche dagegen von Schnitten gebildet, in denen eine bestimmte Schubspannung (z.B.  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\text{oct}}$  etc.) einen kritischen Wert annimmt, so spricht man von einem *scherflächigen Bruch* (Abb. 2.10b). Abhängig vom Spannungszustand und vom Materialverhalten treten diese beiden Typen auch in vielfältigen Mischformen auf.

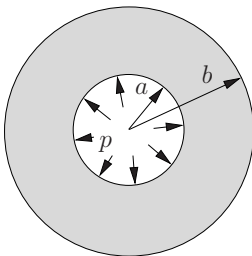
Kennzeichnet “Versagen” das Einsetzen von Fließen, so entspricht die Versagensbedingung einer Fließbedingung. Im Rahmen der inkrementellen Plastizität lassen sich dann die beim Fließen auftretenden Deformationen mit Hilfe der Fließregel  $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \partial F / \partial \sigma_{ij}$  beschreiben (vgl. Abschnitt 1.3.3.2). Für die von Misesche und die Trescasche Fließbedingung sind die entsprechenden Gleichungen in (1.83a) und (1.84) zusammengestellt. Als Beispiel seien hier noch die inkrementellen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das Drucker-Prager-Modell angegeben. Vorausgesetzt sei dabei, dass die Fließfläche unabhängig von der Deformationsgeschichte ist (ideal plastisches Material). Die Fließregel liefert in diesem Fall mit (2.10a,b),  $I_\sigma = \sigma_{kk} = \sigma_{ij}\delta_{ij}$  und  $II_s = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$  formal das Ergebnis

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \left( \alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{II_s}} \right). \quad (2.13)$$

Auf die Bestimmung von  $d\lambda$  sei hier verzichtet. Es sei angemerkt, dass nach (2.13) im allgemeinen plastische Volumenänderungen auftreten; für das entsprechende Inkrement ergibt sich  $d\varepsilon_{kk}^p = 3\alpha d\lambda$ . Experimente legen allerdings nahe, dass bei granularen Materialien die assoziierte Fließregel nicht gültig ist. Fließen erfolgt hier also nicht senkrecht zur Fließfläche. Gleichung (2.13) sollte folglich für solche Werkstoffe nicht verwendet werden.

## 2.4 Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.1** a) Man bestimme für das rotationssymmetrische ebene Problem eines linear-elastischen dickwandigen Zylinders (Radien  $a$  und  $b$ ) unter Innendruck  $p$  die Spannungsverteilung unter Verwendung der komplexen Potentiale



$$\Phi(z) = Az \quad , \quad \Psi(z) = \frac{B}{z} \quad .$$

b) Bestimmen Sie potentielle Versagensorte im Zylinder gemäß dem Hauptnormalspannungskriterium und dem Hauptschubspannungskriterium.

Abb. 2.11

**Lösung**

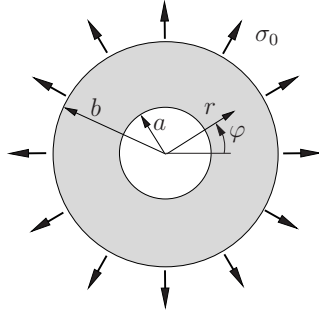
a)

$$\sigma_\varphi = p \frac{(b/r)^2 + 1}{(b/a)^2 - 1} = \sigma_1 > 0, \quad \sigma_r = p \frac{(b/r)^2 - 1}{(b/a)^2 - 1} = \sigma_2 < 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0.$$

b) Hauptnormalspannungskriterium: Da  $\sigma_\varphi = \sigma_1 > 0$  die größte Normalspannung ist, sollte Versagen auf Flächen senkrecht zur Umfangsrichtung, d.h. in radialer Richtung stattfinden.

Hauptschubspannungskriterium: Wegen  $\tau_{r\varphi} = 0$  ist die maximale Schubspannung überall im Zylinder unter  $45^\circ$  zur radialen Richtung geneigt. Dies kann durch die Differentialbeziehung  $dr = r d\varphi$  ausgedrückt werden, deren Lösung  $\varphi(r) = \varphi_0 + \ln(r/r_i)$  lautet, d.h. Versagen findet entlang von *logarithmischen Spiralen* statt.

**Aufgabe 2.2** Ein dickwandiger Zylinder wird am Außenrand durch die Radialspannung  $\sigma_0$  belastet. Angenommen sei ein ebener Verzerrungszustand und ein starr-idealplastisches Material mit der Fließspannung  $\sigma_F$ .



a) Wie groß muss  $\sigma_0$  sein, damit plastischer Kollaps auftritt, d.h. das Material überall plastisch fließt?

b) Wie groß sind dann die Spannungen?

Hinweis: die Gleichgewichtsbedingung für das ebene rotationssymmetrische Problem lautet

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{r}(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0.$$

Abb. 2.12

**Lösung**

a)

$$\sigma_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_F \ln \frac{b}{a},$$

b)

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_F \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_F \left(1 + \ln \frac{r}{a}\right), \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_F \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a}\right).$$

**2.5 Literatur**

Gould, P.L. *Introduction to Linear Elasticity* Springer, New York, 1993

Paul, B. *Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture*. In *Fracture – A Treatise*, Vol. 2, ed. H. Liebowitz, pp. 315-496, Academic Press, London, 1968

Nadai, A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1963

Bruchmechanik

Mit einer Einführung in die Mikromechanik

Gross, D.; Seelig, Th.

2016, XI, 370 S. 205 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-46736-7