

Matrizen sind vielfältig genutzte Objekte in unterschiedlichen Teilbereichen der Mathematik und in verschiedenen Anwendungskontexten, z. B. können mit ihnen folgende Aufgabenstellungen sehr effektiv bearbeitet bzw. modelliert werden:

- Koordinatentransformationen,
- Bewegungen von Punktmengen,
- mehrdimensionale Zufallsvariable,
- lineare Gleichungssysteme.

Aus folgenden Gründen führen wir in Abschn. 2.1 Matrizen als Hilfsmittel beim Lösen linearer Gleichungssysteme ein:

- Wir knüpfen unmittelbar an die Schulmathematik an, die zumindest das Gauß'sche Eliminationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme thematisiert hat.
- Mit der geringfügigen Erweiterung des Gauß'schen Eliminationsverfahrens zum Gauß-Jordan-Verfahren lernen wir eine Rechenvorschrift kennen, die sich sowohl zur Lösung linearer Gleichungssysteme als auch zur Bestimmung der häufig benötigten Inversen einer Matrix eignet.
- Wir können die Zweckmäßigkeit der (ansonsten schwer verständlichen) Definition der Matrizenmultiplikation erkennen, wenn wir die Lösung eines linearen Gleichungssystems auf die Umformung einer Matrizengleichung zurückführen.

Nach der Einführung von Matrizen verallgemeinern wir diesen Begriff, und wir stellen die Rechenregeln für Matrizen zusammen. In Abschn. 2.3 werden wir uns detaillierter mit der Determinante einer Matrix beschäftigen.

## 2.1 Gauß-Jordan-Verfahren zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Viele Anwendungskontexte wie die Ermittlung der

- Bestandteile von Mischungen,
- Stoffumsätze bei chemischen Reaktionen,
- Stromstärken und Widerstände in Stromkreisen,
- zu- und abfließenden Verkehrsströme in Städten,
- Schnittmengen zwischen Geraden und Ebenen

können jeweils durch Aufstellen und Lösen mehrerer Bestimmungsgleichungen mit mehreren Unbekannten mathematisch modelliert werden. Dabei ergeben sich in der Regel bei Verwendung linearer Gleichungen, in denen keine Potenzen oder Produkte von unbekannten Variablen vorkommen, bereits hinreichend genaue Ergebnisse.

Aus der Schulmathematik ist uns bekannt, welche Umformungen für derartige lineare Gleichungssysteme (LGS) zulässig sind und wie diese LGS mithilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens gelöst werden.

### Zulässige Operationen für die Umformung von Linearen Gleichungssystemen (LGS)

- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor ungleich null,
- Addition oder Subtraktion von Vielfachen von Gleichungen,
- Vertauschen der Reihenfolge von Gleichungen.

Das **Gauß'sche Eliminationsverfahren** besteht aus folgenden Teilschritten, die mithilfe der für LGS zulässigen Operationen ausgeführt werden:

- Vorwärtselimination: Umformen des LGS in Stufen- oder Dreiecksform,
- Isolieren einer unbekannten Variablen,
- Rücksubstitution (Rückwärtseinsetzen): Bestimmung aller anderen unbekannten Variablen von unten nach oben.

Wir verdeutlichen das Gauß'sche Eliminationsverfahren an Beispiel 2.1.

### Beispiel 2.1

Realisierung der Vorwärtselimination:

$$\begin{array}{lcl} 2 \cdot x - y + z = -4 & \cdot (-5) \downarrow & \cdot (-3) \downarrow \\ 5 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z = 2 & \cdot 2 & \\ 3 \cdot x - y + 2 \cdot z = 3 & & \cdot 2 \end{array}$$

Im ersten Umformungsschritt werden folgende Operationen ausgeführt:

```
zeile1_neu = zeile1_alt,
zeile2_neu = (-5)*zeile1_alt + 2*zeile2_alt,
zeile3_neu = (-3)*zeile1_alt + 2*zeile3_alt.
```

Mit dem Ergebnis des ersten Umformungsschrittes verfahren wir analog:

$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot x - y + z & = & -4 \\
 y + 3 \cdot z & = & 24 \\
 y + z & = & 18
 \end{array} \cdot \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \downarrow \\ \cdot (-1) \end{array}$$


---


$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot x - y + z & = & -4 \\
 y + 3 \cdot z & = & 24 \\
 2 \cdot z & = & 6
 \end{array} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Isolation einer Variablen:

$$(3) \Rightarrow z = \frac{6}{2} = 3.$$

Rücksubstitution von unten nach oben:

$$(2) \Rightarrow y = 24 - 3 \cdot z = 24 - 3 \cdot 3 = 15,$$

$$(1) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot (-4 + y - z) = \frac{1}{2} \cdot (-4 + 15 - 3) = 4.$$

Eine Probe an allen drei Gleichungen des LGS bestätigt die Korrektheit der Lösung.

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren kann zum **Gauß-Jordan-Verfahren** erweitert werden, indem die durch das Gauß'sche Eliminationsverfahren erzeugte Stufen- oder Dreiecksform des LGS durch Rückwärtselimination (Umformung des LGS „von unten nach oben“ mithilfe der gleichen Operationen wie bei der Vorwärtselimination) in eine reduzierte Stufenform (*row reduced form*) bzw. normierte Diagonalform gebracht wird, aus der sich die Lösung direkt ablesen lässt.

Das **Gauß-Jordan-Verfahren** besteht aus folgenden Teilschritten, die mithilfe der für LGS zulässigen Operationen ausgeführt werden:

- Vorwärtselimination: Umformen des LGS in Stufen- oder Dreiecksform,
- Rückwärtselimination: Umformen der Stufen- oder Dreiecksform des LGS „von unten nach oben“ in eine reduzierte Stufenform oder in eine normierte Diagonalform.

**Beispiel 2.2**

Wir zeigen die Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens an Beispiel 2.1:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{rcl}
 2 \cdot x - y + z & = & -4 \\
 y + 3 \cdot z & = & 24 \\
 2 \cdot z & = & 6
 \end{array} \right| \cdot 0,5 \\
 \\
 \left. \begin{array}{rcl}
 2 \cdot x - y + z & = & -4 \\
 y + 3 \cdot z & = & 24 \\
 z & = & 3
 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot (-3) \uparrow \cdot (-1) \uparrow \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{array}{rcl}
 2 \cdot x - y & = & -7 \\
 y & = & 15 \\
 z & = & 3
 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \uparrow \\ \end{array} \\
 \\
 \left. \begin{array}{rcl}
 2 \cdot x & = & 8 \\
 y & = & 15 \\
 z & = & 3
 \end{array} \right| \cdot 0,5 \quad \text{Diagonalform} \\
 \\
 \left. \begin{array}{rcl}
 x & = & 4 \\
 y & = & 15 \\
 z & = & 3
 \end{array} \right| \quad \text{normierte Diagonalform}
 \end{array}$$

Es zeigt sich, dass nur mit den Zahlen gerechnet wird, die Variablen haben wir nur als „unnötigen Ballast“ mitgeschleppt. Um den Aufwand zu reduzieren, gehen wir in zwei Schritten vor:

- Wir trennen die Strukturelemente des LGS, indem wir sie in unterschiedliche rechteckige Schemata einordnen, die jeweils als **Matrix** bezeichnet werden. In Beispiel 2.1 unterscheiden wir folgende Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \dots \text{Koeffizientenmatrix,}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \dots \text{einspaltige Matrix („Spaltenmatrix“) der Absolutglieder des LGS,}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \dots \text{erweiterte Koeffizientenmatrix,}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \dots \text{einspaltige Matrix („Spaltenmatrix“) der Variablen.}$$

- Wir verwenden für unsere Umformungen die erweiterte Koeffizientenmatrix (der senkrechte Strich ist nur eine Orientierungshilfe).

Das Beispiel 2.1 nimmt dabei folgende Form an:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \downarrow \cdot(-3) \downarrow \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \downarrow \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right) \cdot 0,5$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot(-3) \uparrow \cdot(-1) \uparrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \uparrow \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \cdot 0,5$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{lcl} 1 \cdot x & = & 4 \\ 1 \cdot y & = & 15 \\ 1 \cdot z & = & 3 \end{array}$$

Das Gauß-Jordan-Verfahren wird an weiteren Beispielen demonstriert.

**Beispiel 2.3****Unlösbares LGS**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \downarrow \cdot(-3) \downarrow \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & 18 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \downarrow \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

In der letzten Zeile ist der Widerspruch bereits ersichtlich, da  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z \neq 6$ . Deshalb kann das Verfahren hier abgebrochen werden.

**Beispiel 2.4****Mehrdeutig lösbares LGS**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 4 & 2 \\ 10 & -4 & 8 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \downarrow \cdot(-5) \downarrow \\ \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \downarrow \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \uparrow \\ \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot 0,5$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ reduzierte Stufenform}$$

$$\begin{array}{l} x + 2 \cdot z = 10 \\ y + 3 \cdot z = 24 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 2 \cdot t \\ 24 - 3 \cdot t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2.5****Mehrere LGS mit gleicher Koeffizientenmatrix**

Sollen mehrere LGS mit gleicher Koeffizientenmatrix wie z. B.

$$\begin{array}{l} \text{LGS1: } \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 - y_1 + z_1 = -4 \\ 5 \cdot x_1 - 2 \cdot y_1 + 4 \cdot z_1 = 2 \\ 3 \cdot x_1 - y_1 + 2 \cdot z_1 = 3 \end{array} \end{array} \quad \text{und LGS2: } \begin{array}{l} 2 \cdot x_2 - y_2 + z_2 = 2 \\ 5 \cdot x_2 - 2 \cdot y_2 + 4 \cdot z_2 = -7 \\ 3 \cdot x_2 - y_2 + 2 \cdot z_2 = 1 \end{array}$$

gelöst werden, dann kann dies mit dem Gauß-Jordan-Verfahren simultan realisiert werden:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-5) \downarrow \quad \cdot(-3) \downarrow \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 24 & -24 \\ 0 & 1 & 1 & 18 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \downarrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -20 \end{array} \right) \cdot 0,5$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 24 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot(-3) \uparrow \cdot(-1) \uparrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 0 & -7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \uparrow \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 8 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -10 \end{array} \right) \cdot 0,5$$

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -10 \end{array} \right)$$

Ergebnisse:  $x_1 = 4$ ;  $y_1 = 15$ ;  $z_1 = 3$  bzw.  $x_2 = 9$ ;  $y_2 = 6$ ;  $z_2 = -10$ .

In Abschn. 2.2 werden wir die Matrizenmultiplikation so definieren, dass ein **LGS als Matrizengleichung darstellbar** ist. Für das Beispiel 2.1 soll gelten:

Das LGS

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot x - y + z & = & -4 \\ 5 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z & = & 2 \\ 3 \cdot x - y + 2 \cdot z & = & 3 \end{array}$$

soll mithilfe der Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ , der Spaltenmatrix der

Absolutglieder  $C = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und der Spaltenmatrix der Variablen  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  als

Matrizengleichung darstellbar sein:

$$A \cdot X = C$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit das LGS wieder entsteht, muss für die linke Seite der Matrizengleichung gelten:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 5 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z \\ 3 \cdot x - 1 \cdot y + 2 \cdot z \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen, wie jede Zeile der Matrix  $A$  mit der Spaltenmatrix  $X$  zu verknüpfen ist.



Dieses Zwischenergebnis werden wir in Abschn. 2.2 verallgemeinern, und wir werden das Gauß-Jordan-Verfahren nutzen, um die Inverse einer Matrix zu ermitteln.

## 2.2 Rechenoperationen mit Matrizen

Wir haben in Abschn. 2.1 aus den Strukturelementen eines Linearen Gleichungssystems (LGS) unterschiedliche Matrizen gebildet.

Allgemein ist eine **Matrix** eine Anordnung von  $m \cdot n$  mathematischen Objekten in einem rechteckigen Schema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Die Strukturelemente einer Matrix werden als **Elemente** bezeichnet. Wir haben bereits Zahlen und Variable als Elemente verwendet, doch dabei kann es sich auch um andere mathematische Objekte wie Vektoren, Polynome, Funktionsterme, Differenzialquotienten oder Matrizen handeln.

Eine Matrix wird häufig mit einem Großbuchstaben symbolisiert, ihre Elemente mit dem gleichen Buchstaben (als Klein- oder Großbuchstabe) sowie einem Zeilen- und einem Spaltenindex. Dabei wird immer zuerst der Zeilen- und danach der Spaltenindex benannt. Wenn die Darstellung der Indizes keine eigenständige Bedeutung besitzt, dann dürfen die Indizes in beliebiger Weise in Hoch- oder Tiefstellung (Superskript bzw. Subskript) geschrieben werden.

**Schreibweisen** für eine  $m \times n$ -**Matrix**, d. h. eine Matrix vom **Typ**  $(m, n)$  mit  $i = 1, \dots, m$  und  $k = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
 A &= (A_{ik}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \\
 A &= (A^i_k) = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_n \end{pmatrix}, \\
 A &= (A_i^k) = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m^1 & \dots & A_m^n \end{pmatrix}, \\
 A &= (A^{ik}) = \begin{pmatrix} A^{11} & \dots & A^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{m1} & \dots & A^{mn} \end{pmatrix}. \\
 A &= (a_{ik}) = (a^i_k) = (a_i^k) = (a^{ik}) \text{ analog.}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Besteht eine Matrix aus genau einer Zeile  $(a_{i1} \dots a_{in})$  bzw. aus genau einer Spalte

$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ , dann wird sie als **Zeilen- bzw. Spaltenmatrix** bezeichnet.

Die Matrix  $A$  im Beispiel besteht aus  $m$  Zeilenmatrizen bzw.  $n$  Spaltenmatrizen.

- **Bemerkung** In der Literatur werden Zeilen- bzw. Spaltenmatrizen häufig als **Zeilen- bzw. Spaltenvektoren** bezeichnet. Dies ist nach mathematischem Begriffsverständnis zulässig, da die Menge der Matrizen mit den für Matrizen definierten Rechenoperationen einen Vektorraum bildet und es sich deshalb bei Matrizen um Vektoren handelt, außerdem gibt es eine Analogie zwischen der Multiplikation von Matrizen und dem Skalarprodukt von Vektoren (s. Abschn. 4.4). Da in der Physik ein anderer Vektorbegriff als in der Mathematik existiert, muss in Abhängigkeit vom Kontext entschieden werden, ob die Vermischung der Begrifflichkeiten für Vektoren und Matrizen sinnvoll oder eher eine Quelle von Missverständnissen ist. Wir gehen in Kap. 4 ausführlich auf die unterschiedliche Verwendung des Vektorbegriffs in der Mathematik und Physik ein.

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten einer Matrix  $A$  vom Typ  $(m, n)$  entsteht eine Matrix vom Typ  $(n, m)$ , die als **Transponierte**  $A^T$  zur Matrix  $A$  bezeichnet wird. Wir erarbeiten die Beziehungen zwischen den Elementen einer Matrix und denen der dazu transponierten Matrix anhand von Beispielen.

### Beispiel 2.6

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} = (A_{pq}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{pmatrix}$$

Die Elemente der transponierten Matrix  $A^T$  werden wie üblich in Indexdarstellung angegeben, d. h., zuerst wird der Index für die Zeile, dann derjenige für die Spalte genannt:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A^T)_{11} & (A^T)_{12} \\ (A^T)_{21} & (A^T)_{22} \\ (A^T)_{31} & (A^T)_{32} \end{pmatrix}.$$

Es gelten:  $A_{21} = 4 = (A^T)_{12}$  und  $(A^T)_{32} = 6 = A_{23}$ , d. h.  $(A^T)_{pq} = A_{qp}$ .

Einstieg in die Hochschulmathematik  
Verständlich erklärt vom Abiturniveau aus  
Wagner, J.

2016, XIX, 292 S. 96 Abb., 14 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-662-47512-6